Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 539, 2024 г.

С. М. Хрящев

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ ЭЛЕМЕНТОВ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБР

§1. Введение

Цепные дроби могут использоваться для представления элементов некоторых множеств. В классических случаях в качестве множества элементов рассматривались некоторые множества скаляров: множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, [1–3], а затем множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел, [4–6]. Некоторые авторы рассматривали различные обобщения цепных дробей для представления элементов необязательно числовых множеств, [7–11].

В этой работе рассматривается некоторый класс специальных ассоциативных алгебр, в котором содержатся поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, тело кватернионов $\mathbb{H}$ и некоторые другие, например алгебра бикватернионов. Элементы этих алгебр будем называть гиперчислами или просто числами. Наиболее полные новые результаты получены для тела кватернионов $\mathbb{H}$. Элементы этого множества могут интерпретироваться как четырехкомпонентные наборы вещественных величин, однако эти элементы могут также рассматриваться как многомерные скаляры.

Мы будем изучать вопросы представления элементов каждого рассматриваемого множества цепными дробями с элементами из некоторого дискретного подмножества (решетки целых элементов) этого множества. Для множества $\mathbb{R}$ в качестве такого множества будем рассматривать множество целых чисел $\mathbb{Z}$, для множества $\mathbb{C}$ – множество гауссовых комплексных целых чисел $\mathbb{Z}[i]$, для множества $\mathbb{H}$ – множество липшицевых целых кватернионов $\mathbb{Z}[i,j,k]$ (в квадратных скобках указаны мнимые единицы). Могут быть рассмотрены и другие виды решеток.

Мы будем также изучать вопросы качества приближений элементов некоторых множеств конечными дробями. В классическом случае

Ключевые слова: многокомпонентные цепные дроби, дискретные динамические системы.

условия сходимости цепных дробей к аппроксимируемым элементам могут быть даны в терминах поведения знаменателей подходящих цепных дробей. Кроме аналогичных условий мы дадим другие условия сходимости в терминах поведения так называемых квазизнаменателей аппроксимируемых элементов, формируемых с помощью определенных процедур. Мы покажем, как эти условия соотносятся со стандартными условиями сходимости.

Эта работа продолжает исследования работ [13–17] и некоторых других. Необходимый теоретический материал можно найти в [18–20].

1.1. Предварительные сведения о цепных дробях. Пусть $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ – некоторая последовательность абстрактных символов из некоторого множества W с бинарными операциями сложения и умножения (необязательно коммутативного) элементов и операцией обращения элемента, которая выполнима необязательно для всех элементов.

Конечная цепная дробь задается для любого n формальным выражением вида

$$a_0 + (a_1 + \dots + (a_{n-1} + (a_n)^{-1})^{-1} \dots)^{-1}. \tag{1}$$

Бесконечная цепная дробь задается формальным выражением вида

$$a_0 + (a_1 + \dots + (a_{n-1} + (a_n + \dots)^{-1})^{-1} \dots)^{-1}. \tag{2}$$

Мы предполагаем, что для данной последовательности a_n все операции выполнимы, иначе считаем, что последовательности a_n является исключительной.

Отрезок $r_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ длины n бесконечной цепной дроби (2) является конечной цепной дробью и является краткой формой записи цепной дроби (1). Таким образом, бесконечная цепная дробь понимается как предельный объект (в определенном смысле) последовательности своих отрезков.

Используя арифметические операции, выражение вида (1) можно записать в виде «обыкновенной дроби», числитель и знаменатель которой суть целые элементы. Так как мы не предполагаем наличия коммутативности по умножению, то имеются два варианта записи обыкновенных дробей. Предполагая, что знаменатели обыкновенных дробей не обращаются в ноль, для $n = 1, 2, \dots$ мы имеем следующие левую и правую обыкновенные дроби

$$r'_n = (q'_n)^{-1} p'_n, \quad r''_n = p''_n (q''_n)^{-1}, \tag{3}$$

где значения p'_n, q'_n и p''_n, q''_n являются соответственно *числителем и знаменателем* отрезка цепной дроби длины n.

В частности, для $n = 1$ цепная дробь записывается в виде следующей правой обыкновенной дроби:

$$r_1 = a_0 + a_1^{-1} = (a_0 a_1 + 1) a_1^{-1} =: p'_1 (q'_1)^{-1} =: r'_1, \tag{4}$$

где

$$q'_1 = a_1, \quad p'_1 = a_0 a_1 + 1, \tag{5}$$

и для левой обыкновенной дроби

$$r_1 = a_0 + a_1^{-1} = a_1^{-1}(a_1 a_0 + 1) =: (q''_1)^{-1} p''_1 =: r''_1, \tag{6}$$

где

$$q''_1 = a_1, \quad p''_1 = a_1 a_0 + 1. \tag{7}$$

Аналогично, для $n = 2$, используя формулу (4), имеем для цепной дроби в виде следующей правой обыкновенной дроби

$$\begin{aligned} r_2 &= a_0 + (a_1 + a_2^{-1})^{-1} = a_0 + ((a_1 a_2 + 1) a_2^{-1})^{-1} = a_0 + a_2 (a_1 a_2 + 1))^{-1} \\ &= (a_0 (a_1 a_2 + 1)) + a_2)(a_1 a_2 + 1))^{-1} = (a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2)(a_1 a_2 + 1))^{-1} \\ &= ((a_0 a_1 + 1) a_2 + a_0)(a_1 a_2 + 1))^{-1} =: p'_2 (q'_2)^{-1} =: r'_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$q'_2 = a_1 a_2 + 1, \quad p'_2 = (a_0 a_1 + 1) a_2 + a_0, \tag{9}$$

и, используя формулу (6), имеем запись в виде левой обыкновенной дроби

$$\begin{aligned} r_2 &= a_0 + (a_1 + a_2^{-1})^{-1} = a_0 + (a_2^{-1}(a_2 a_1 + 1))^{-1} = a_0 + (a_2 a_1 + 1))^{-1} a_2 \\ &= (a_2 a_1 + 1))^{-1}((a_2 a_1 + 1)) a_0 + a_2) = (a_2 a_1 + 1))^{-1}(a_2 a_1 a_0 + a_0 + a_2) \\ &= (a_2 a_1 + 1)^{-1}(a_2 (a_1 a_0 + 1) + a_0) =: (q''_2)^{-1} p''_2 =; r''_2, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$q''_2 = a_2 a_1 + 1, \quad p''_2 = a_2 (a_1 a_0 + 1) + a_0, \tag{11}$$

и т. д.

Методом математической индукции может быть обосновано, что пары значений (q'_n, p'_n) и (q''_n, p''_n) однозначно определяют обыкновенные дроби r'_n и r''_n, которые, очевидно, совпадают, т. е.

$$r'_n = r''_n =: r_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

При этом соотношения (5) или (7) образуют базу индукции, а соотношения вида (9) или (11) используются для индукционного перехода. Очевидно, соотношения (12) эквивалентны следующим соотношениям

$$q'_n p''_n = p'_n q''_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Отметим, что значения q'_n, p'_n и q''_n, p''_n выражаются через элементы a_n, $n = 0, 1, \ldots$ цепной дроби по однотипным формулам, но порядок следования элементов цепной дроби взаимно обратный, а именно

$$q'_n = K_n(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1), \quad p'_n = K_{n+1}(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0), \tag{14}$$

$$q''_n = K_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n), \quad p''_n = K_{n+1}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n), \tag{15}$$

где K_n, $n = 0, 1, \ldots$ является последовательностью полиномов специального вида от коэффициентов цепных дробей. Эти полиномы называются *континуантами.*

Таким образом, если имеется последовательность символов $(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, то формулам (14) или (15) могут быть вычислены пары значения (q'_n, p'_n) и (q''_n, p''_n), из которых можно формировать значения дробей r'_n и r''_n для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Альтернативный способ формирования этих последовательностей может быть осуществлен с помощью ниже следующих уравнений Эйлера.

1.2. Уравнения Эйлера. Пусть имеется некоторое последовательность $(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ элементов, из которых составлены цепные дроби вида (1) или (2). Нетрудно показать, что величины q'_n и p'_n, а также q''_n и p''_n, удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям (уравнениям Эйлера).

Для удобства дальнейших вычислений положим, что

$$q'_{-1} = q''_{-1} = 0, \quad q'_0 = q''_0 = 1, \tag{16}$$

$$p'_{-1} = p''_{-1} = 1, \quad p'_0 = p''_0 = a_0. \tag{17}$$

Таким образом, левая и правая пары уравнений для числителей и знаменателей подходящих дробей при $n \geqslant 1$ соответственно имеют вид

$$q'_n = a_n q'_{n-1} + q'_{n-2}, \tag{18}$$

$$p'_n = a_n p'_{n-1} + p'_{n-2}, \tag{19}$$

и

$$q''_n = q''_{n-1}a_n + q''_{n-2}, \tag{20}$$
$$p''_n = p''_{n-1}a_n + p''_{n-2}. \tag{21}$$

Доказательство формул (19), (18) и (21), (20) можно провести методом математической индукции, где в качестве базы при $n = 1$ можно использовать формулы (16), (17), (см., например, [2, 3]).

Векторная запись уравнений Эйлера. Рассмотрим следующие соответственно вектор-столбец и вектор-строку:

$$\overline{r}'_n = \mathrm{col}(q'_n, p'_n), \quad \widetilde{r}''_n = \mathrm{row}(q''_n, p''_n), \tag{22}$$

где $q'_n \in \mathrm{W}$, $p'_n \in \mathrm{W}$ и $q''_n \in \mathrm{W}$, $p''_n \in \mathrm{W}$ при $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Системы уравнений Эйлера (19) – (18) и (21) – (20) начальными данными

$$\overline{r}'_{-1} = \mathrm{col}(0, 1),\ \overline{r}'_0 = \mathrm{col}(1, a_0), \tag{23}$$
$$\widetilde{r}''_{-1} = \mathrm{row}(0, 1),\ \widetilde{r}''_0 = \mathrm{row}(1, a_0) \tag{24}$$

могут быть записаны соответственно в виде векторного уравнения

$$\overline{r}'_n = a_n\overline{r}'_{n-1} + \overline{r}'_{n-2}, \quad n \geqslant 1 \tag{25}$$

или в виде векторного уравнения

$$\widetilde{r}''_n = \widetilde{r}''_{n-1}a_n + \widetilde{r}''_{n-2}, \quad n \geqslant 1. \tag{26}$$

Обозначим $\overline{r}''_n = \mathrm{col}(q''_n, p''_n) = (\widetilde{r}''_n)^\top$. Тогда, учитывая, что a_n – скаляр, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\overline{r}''_n = \overline{r}''_{n-1}a_n + \overline{r}''_{n-2}, \quad n \geqslant 1. \tag{27}$$

Каждую последовательностей пар элементов, даваемых уравнениями Эйлера, будем называть *сопровождающей последовательностью пар* (левой (q'_n, p'_n) или правой (q''_n, p''_n)), связанную с последовательностью a_n, где $n = 0, 1, \ldots$.

1.3. Некоторые замечания о структурах на множестве целых элементов. Если мы рассматриваем классические цепные дроби с элементами из множеств $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}[i]$, в которых имеется коммутативность по умножению, то можно рассматривать только левое или только правое представления, которые эквивалентны. Но для цепных дробей с элементами из алгебры без свойства коммутативности умножения приходится рассматривать левые и правые представления одновременно, как мы увидим ниже.

Приведенные выше формулы показывают, что множество W, из элементов которых формируются цепные дроби, должно иметь алгебраическую структуру кольца $\mathfrak{W} := (\mathrm{W}, +, \circ)$, где «$+$» есть операция сложения и «$\circ$» есть операция умножения. Вместо знака «$\circ$» используется также знак «$\cdot$» или пустой символ.

Величины q'_n, p'_n и q''_n, p''_n, $n = 0, 1, \ldots$, также принадлежат этому кольцу. Мы априори не предполагаем, что все элементы кольца обязательно обратимы, однако мы предполагаем, что множество необратимых элементов является в определенном смысле исключительным, которое задается некоторым соотношением. Например, для множества квадратных матриц это множество матриц, определители которых равны нулю.

Использование сопровождающих последовательностей пар делает целесообразным использование удвоенного множества $\mathrm{W} \times \mathrm{W} = \mathrm{W}^2$ целых элементов. Это множество допускает структуру линейного пространства (модуля) над кольцом (множеством скаляров) $\mathfrak{W}$. Элементами множества W^2 являются пары (w_1, w_2). Операции «$+$» сложения пар и операция «$\cdot$» умножения скаляра на пару осуществляются покомпонентно.

Для произвольной последовательности $(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ элементов из множества W объект вида (2), т. е. цепная дробь, может не существовать. Этот объект понимается как финальный объект для сопровождающей последовательности пар, даваемых системами уравнений Эйлера вида (19)–(18) или (21)–(20). Для установления существования этого финального объекта на множестве W^2 должны быть определены некоторые геометрические структуры, в терминах которых описывается сходимость последовательностей пар (q'_n, p'_n) или (q''_n, p''_n), где $n = 0, 1, \ldots$. В том случае, если величины q'_n или q''_n обратимы, мы говорим о сходимости обыкновенных дробей вида (3), которые называются подходящими дробями, или конвергентами.

Например, для классических цепных необходимым и достаточным условием существования бесконечной цепной дроби вида (2) является расходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, см. [1]. Для обобщенных бесконечных цепных дробей условия существования финальных объектов более сложные.

В дальнейшем, мы в определенном смысле будем исследовать обратную проблему, а именно находить условия разложимости элементов некоторых множеств T в цепные дроби с элементами из множеств W. В следующих разделах мы снабдим рассматриваемые множества T некоторыми структурами.

§2. Структуры на множестве состояний

В этом и следующем разделах мы описываем некоторые алгебраические и геометрические структуры множества состояний, элементы которых будут представляться цепными дробями.

2.1. Основные алгебраические структуры множества состояний. В качестве множеств состояний мы будем использовать множества различной природы (обозначаются W, T и т.д.). В частности, будут использоваться числовые множества ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). На рассматриваемых множествах могут быть заданы бинарные операции сложения «+ » и умножения «$\circ$ » (также используется вариант обозначения «$\cdot$» или пустой символ).

Алгебраические структуры на множествах задаются набором объектов и операций. Под объектами понимаются исходные множества, а также уже имеющиеся структуры. Структура и множество обозначаются одной и той же буквой, но разными шрифтами. Мы рассматриваем следующие структуры.
$\mathcal{T}_+ = (\mathrm{T}, +)$ – абелева группа по сложению на множестве T.
$\mathcal{T}_\circ = (\mathrm{T}, \circ)$ – полугруппа по умножению на множестве T.
$\mathfrak{T} = (\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_\circ)$ – кольцо на множестве T.
$\mathbb{T} = (\mathbb{R}, \phi, \mathfrak{T})$ – алгебра над полем $\mathbb{R}$ на кольце $\mathfrak{T}$, где отображение $\mathbb{R} \overset{\phi}{\mapsto} \mathfrak{T}$ – гомоморфизм. Гомоморфизм позволяет ввести умножение слева элемента f поля $\mathbb{R}$ на элемент t кольца $\mathfrak{T}$ по формуле $f \cdot t = \phi(f) \circ t$. Таким образом, определено отображение $\mathbb{R} \times \mathfrak{T} \overset{\cdot}{\mapsto} \mathfrak{T}$. Аналогичное справедливо для умножения справа. Введенная структура позволяет трактовать алгебру как линейное пространство.

Для введенных выше структур мы используем выделение объекта из структуры, например $\mathrm{T} = \mathrm{set}(\mathfrak{T})$, $\mathfrak{T} = \mathrm{ring}(\mathbb{T})$ и т.д., что позволяет конструировать новые структуры из имеющихся.

$L(\mathbb{A}, \mathrm{T}) = (\mathbb{A}, \mathrm{T}, \cdot, +)$ – линейное пространство (линейный модуль) на множестве T над алгеброй $\mathbb{A}$, где $\mathbb{A} \times \mathrm{T} \overset{\cdot}{\mapsto} \mathrm{T}$ – операция умножения слева элемента алгебры на элемент множества и $\mathrm{T} \times \mathrm{T} \overset{+}{\mapsto} \mathrm{T}$ – операция сложения элементов множества.

В линейном пространстве $L(\mathbb{A}, \mathrm{T})$ можно фиксировать некоторый базис $\mathrm{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$, где $e_i \in \mathrm{T}, i = 1, \ldots, m$. Тогда это линейное пространство имеет $\mathbb{A}$-размерность m и его можно представить как линейную оболочку элементов базиса E , т. е. $L(\mathbb{A}, \mathrm{T}) = \mathscr{L}(\mathbb{A}, \mathrm{E})$. Таким образом, $L(\mathbb{A}, \mathrm{T}) \simeq \mathbb{A}^m$, т. е. линейное пространство $L(\mathbb{A}, \mathrm{T})$ изоморфно пространству $\mathbb{A}^m$.

Мы рассматриваем следующие два случая линейных пространств.

1. Пространство $L(\mathbb{R}, \mathrm{T}) \simeq \mathbb{R}^m$ имеет $\mathbb{R}$-размерность m. В этом подпространстве может быть рассматрена линейная оболочка элементов базиса E над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, т. е. решетка $\mathscr{L}(\mathbb{Z}, \mathrm{E}) =: \mathbb{Z}[E]$. Из элементов этого множества формируются цепные дроби. Как и выше, мы будем считать, что линейное пространство (модуль) $\mathbb{Z}[E]$ изоморфно множеству $\mathbb{Z}^m$. Множество $\mathbb{W} = (\mathbb{Z}, \phi, \mathfrak{W})$ будем интерпретировать как некоторую дискретную подалгебру алгебры $\mathbb{T}$.

2. Пространство $L(\mathbb{T}, \mathrm{T}^2) \simeq \mathbb{T}^2$, где $\mathbb{T}^2$ – удвоенное пространство состояний имеет $\mathbb{T}$-размерность 2.

В заключение этого раздела отметим, что заданная на некотором множестве T алгебра $\mathbb{T}$ является основной структурой для пространства состояний в этой работе. В частности, для алгебр $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ линейные пространства имеют соответственно вещественные размерности $m = 1, 2, 4$ и элементы этих алгебр могут быть представлены как линейные комбинации своих вещественных и мнимых единиц с вещественными коэффициентами. Как известно, это единственные ассоциативные алгебры, в которых обратные элементы существуют для всех ненулевых элементов.

Наличие структуры алгебры на множестве состояний позволяет интерпретировать элементы множества состояний как *многокомпонентные скаляры.* Кроме того, она позволяет ввести понятие сопряженного элемента и понятие обратного элемента по крайней мере для части элементов множества состояний. Связанные с этим понятием структуры, а также некоторые другие структуры на множестве состояний, будут рассмотрены в следующих разделах.

2.2. Операция сопряжения. Для элемента $t \in \mathbb{T}$ элемент $t_r^\star \in \mathbb{T}$ является правым сопряженным, а элемент $t_l^\star \in \mathbb{T}$ является левым сопряженным, если для них выполнены соотношения

$$t \cdot t_r^\star = e_1 f_r = f_r, \quad t_l^\star \cdot t = f_l e_1 = f_l, \tag{28}$$

где $f_r, f_l \in \mathbb{R}$. Мы обычно предполагаем, что $t_l^\star \cdot t = t \cdot t_r^\star$, т.е. $f_l = f_r := f$.

Заметим, что введенные сопряженные элементы определяются неоднозначно указанными выше соотношениями. В частности, элемент $t^\star$ определяется с точностью до скалярного множителя (элемента поля). Обычно дополнительно требуют, чтобы были выполнены следующие соотношения

$$(t^\star)^\star = t, \quad (t \cdot s)^\star = s^\star \cdot t^\star, \tag{29}$$

а также

$$(t + s)^\star = t^\star + s^\star, \quad (t\lambda)^* = t^*\lambda = \lambda t^* = (\lambda t^*). \tag{30}$$

Мы далее будем рассматривать *алгебры с операцией сопряжения*, т. е. будем предполагать, что этих алгебрах каждый элемент имеет сопряженный элемент. Для конкретных алгебр, сопряженные элементы также могут быть введены тем или иным способом.

2.3. Норма элемента. Величина $t \cdot t^\star =: |t|^2$ называется «вещественным квадратом» элемента $t \in \mathbb{T}$. Она может быть неопределенного знака. Кроме того, значение $|t|^2$ может обращаться в ноль для ненулевых элементов. Корень из модуля этой величины может быть назван *псевдонормой.* Из формул (30), в частности, следует, что $|ts|^2 = |t|^2|s|^2$.

Если в алгебре каждый элемент имеет ненулевую псевдонорму, и следовательно обратный элемент, то этом случае алгебру можно также рассматривать как тело. В более общем случае рассматриваемую ассоциативную алгебру будем называть *алгеброй над полем с частичным делением*,

Псевдонорма алгебры $\mathbb{T}$ индуцирует псевдонорму $|\cdot|$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, которая может не совпадать с евклидовой нормой $\|\cdot\|$. Мы предполагаем, что между этими нормами имеется следующее отношение подчинения. Существует вещественная неотрицательная монотонная функция $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, такая что $\gamma(0) = 0$ и для любого $t \in \mathbb{T}$ верно неравенство $0 \leqslant \gamma(|t|) \leqslant \|t\|$. В силу этого неравенства сходимость последовательностей в норме $\|\cdot\|$ является сильной и влечет слабую сходимость в норме $|\cdot|$.

Приведем примеры. Если алгебра $\mathbb{T}$ является телом, то для любого $t \in \mathbb{T}$ верно $|t| = \|t\|$, т.е. γ – тождественная функция и соотношения $|t| = 0$ и $t = 0$ равносильны. Если алгебра $\mathbb{T}$ является алгеброй матриц и для матрицы t сопряженая матрица $t^\star$ является союзной матрицей, состоящей из алгебраических дополнений матрицы t, то $|t|^2 = |tt^\star| = \det t$ и $|t| = (abs(\det t))^{1/2} \leqslant \|t\|^{m/2}$. Последнее неравенство есть следствие известного неравенства Адамара. Отметим, что для алгебры вещественных матриц множество необратимых матриц t задается соотношением $|t|^2 := \det t = 0$. Для матриц второго порядка правая часть этого соотношения является знакопеременной квадратичной формой в пространстве $\mathbb{R}^4$. Таким образом, указанное соотношение задает поверхность второго порядка (конус) пространстве $\mathbb{R}^4$. Аналогичное справедливо для всех алгебр, не являющихся телом.

2.4. Операция обращения элемента. Для элементов t, имеющих ненулевой квадрат псевдонормы $|t|^2$, можно определить обратные элементы по следующим формулам

$$t_r^{-1} = \frac{1}{t \cdot t_r^\star} t_r^\star = \frac{1}{|t|^2} t_r^\star, \quad t_l^{-1} = \frac{1}{t_l^\star \cdot t} t_l^\star = \frac{1}{|t|^2} t_l^\star,$$

для которых справедливы равенства $t \cdot t_r^{-1} = 1$ и $t_l^{-1} \cdot t = 1$. Если $t_r^\star = t_l^\star$, то $t_r^{-1} = t_l^{-1}$. Также справедливы равенства $(t_1 t_2)^{-1} = (t_2)^{-1}(t_1)^{-1}$. Кроме того, $|t^{-1}| = \frac{1}{|t|}$.

§3. Расширенное пространство состояний и его структуры

Пусть имеется некоторая алгебра $\mathbb{T}$. Рассмотрим множество $\mathbb{T}^2$, которое будем понимать как множество столбцов $\mathrm{col}(t, s)$, где компоненты $t \in \mathrm{ring}(\mathbb{T})$, $t \in \mathrm{ring}(\mathbb{T})$ являюся элементами соответствующего кольца. На этом множестве определена операция покомпонентного сложениия столбцов и операция покомпонентного умножения (слева или справа) столбцов на элемент $\lambda \in \mathrm{ring}(\mathbb{T})$. Таким образом, множество $\mathbb{T}^2$ имеет структуру линейного пространства.

3.1. Проекции и поднятия. Введем далее *проективное пространство* как фактор-пространство по классам эквивалентности «однородных элементов».

L) *Левое проективное пространство:*

$\mathrm{P}_l^1(\mathbb{T}) := ((\mathbb{T}^2 \setminus \{0\})/\sim)$, где $(t,s) \sim (\lambda t, \lambda s) = \lambda(t,s)$ для $t,s,\lambda \in \mathrm{ring}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$.

Разбиение на классы эквивалентности определяет отображение проектирования

$$\underset{l}{\mathrm{Pr}} : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathrm{P}_l^1(\mathbb{T}). \tag{31}$$

Если элемент x имеет левый обратный элемент, то $(x,y) = x(1, x^{-1}y)$. Следовательно, соответствующий проективный элемент из множества $\mathrm{P}_l^1(\mathbb{T})$ можно отождествить с элементом $z' = x^{-1}y \in \mathrm{ring}(\mathbb{T})$. Таким образом, компоненты компоненты x и y элемента (x,y) связаны соотношением $y = xz'$.

R) *Правое проективное пространство:*

$\mathrm{P}_r^1(\mathbb{T}) := ((\mathbb{T}^2 \setminus \{0\})/\sim)$, где $(t,s) \sim (t\mu, s\mu) = (t,s)\mu$ для $t,s,\lambda \in \mathrm{ring}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$.

Разбиение на классы эквивалентности определяет отображение проектирования

$$\underset{r}{\mathrm{Pr}} : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathrm{P}_r^1(\mathbb{T}). \tag{32}$$

Если элемент x имеет правый обратный элемент, то $(x,y) = (1, yx^{-1})x$. Следовательно, соответствующий проективный элемент из множества $\mathrm{P}_l^r(\mathbb{T})$ можно отождествить с элементом $z'' = yx^{-1} \in \mathrm{ring}(\mathbb{T})$. Таким образом, компоненты x и y элемента (x,y) связаны соотношением $y = z''x$.

Далее, соответствие $z \mapsto (1,z) =: \overset{\circ}{\overline{z}}$ можно рассматривать как включение T в T^2. Элемент вида $\overset{\circ}{\overline{z}}$ будем называть базовым элементом соответствующего одномерного линейного подпространства в пространстве $\mathbb{T}^2$. Величину z назовем его *базовым направлением.*

Пусть некоторое дискретное множество $\mathbb{W}$ (решетка целых элементов) содержится в $\mathbb{T}$. В пространстве $\mathbb{T}^2$ рассмотрим подмножество $\mathbb{W}^2$, элементы которого суть пары (q,p). Этому подмножеству соответствует в пространстве $\mathrm{P}_l^1(\mathbb{T})$ подмножество $\mathbb{P}_l^1(\mathbb{W})$ (множество рациональных элементов).

Пусть имеется некоторый элемент (q', p') множества $\mathbb{W}^2$. Подмножество $\mathcal{Q}'$ таких элементов $r' = {q'}^{-1}p'$ множества $\mathbb{P}^1_l(\mathbb{W})$ будем считать множеством “обыкновенных дробей”

Аналогично для элементов (q'', p'') множества $\mathbb{W}^2$ вводится подмножество $\mathcal{Q}''$ множества $\mathbb{P}^1_r(\mathbb{W})$, состоящее из элементов вида $r'' = p''{q''}^{-1}$. Очевидно, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'' =: \mathcal{Q}$.

Если элементы (q', p') и (q'', p'') множества $\mathbb{W}^2$ таковы, что им соответствующие проективные элементы $r' = {q'}^{-1}p'$ и $r'' = p''{q''}^{-1}$ совпадают, т. е. $r' = r'' =: r$, то эти элементы принадлежат линейному одномерному подпространству с базовым элементом $(1, r) =: \overset{\circ}{\overline{r}} \in \mathbb{T}^2$.

Замечание 1. Если в $\mathbb{T}$ все ненулевые элементы имеют обратные, то мы будем отождествлять пространства $\mathbb{P}^1_l(\mathbb{T})$ или $\mathbb{P}^1_r(\mathbb{T})$ с пространством $\mathbb{T} \setminus \{0\}$ (например, в случае, когда алгебра $\mathbb{T}$ есть тело). При этом $\mathbb{P}^1_l(\mathbb{W})$ или $\mathbb{P}^1_r(\mathbb{T})$ – множества рациональных элементов в $\mathbb{T}$. Таким образом, в этом случае сходимость дробей r_n можно трактовать как сходимость соответствующих последовательностей в пространстве $\mathbb{P}^1(\mathbb{T})$.

Для элемента $z \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ его прообраз $\mathrm{Pr}_l^{-1}(z) \in \mathbb{T}^2$ (левый) или прообраз $\mathrm{Pr}_r^{-1}(z) \in \mathbb{T}^2$ (правый) будем называть *поднятием* этого элемента.

Правый и левый прообразы принадлежат одномерным линейным подпространствам с одним и тем же базисным элементом $\overset{\circ}{\overline{r}} = (1, z)$.

Пусть

$$r'_n = (q'_n)^{-1}p'_n, \quad r''_n = p''_n(q''_n)^{-1},$$

где $r'_n = r''_n =: r_n$.

Используя понятие поднятия, сопровождающие последовательности пар вида (25), (27) можно записать в следующих формах:

$$\overline{r}'_n = q'_n\overset{\circ}{\overline{r}}_n, \quad \overline{r}''_n = \overset{\circ}{\overline{r}}_n q''_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\overset{\circ}{\overline{r}}_n = \mathrm{col}(1, r_n).$$

3.2. Билинейные формы на множестве $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$. Введем определитель второго порядка с коэффициентами из алгебры $\mathbb{T}$. Пусть элемент $\overline{b} \in \mathbb{T}^2$ и элемент $\overline{c} \in \mathbb{T}^2$, где $\overline{b} = \mathrm{col}(b^1, b^2)$, $\overline{c} = \mathrm{col}(c^1, c^2)$. Определим функцию Δ переменных $\overline{b}, \overline{c}$ по "правилу определителя":

$$\Delta(\overline{b}, \overline{c}) := \det(\overline{b}, \overline{c}) := \begin{vmatrix} b^1 & c^1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = b^1c^2 - b^2c^1, \tag{33}$$

где разложение определителя происходит по элементам первого столбца. Отметим, что элементы определителя необязательно перестановочны и значение определителя есть некоторый элемент множества $\mathbb{T}$. Функцию Δ можно понимать также как симплектическое скалярное произведение.

Очевидно, справедливы следующие равенства

$$\Delta(\overline{b}' + \overline{b}'', \overline{c}) = \Delta(\overline{b}', \overline{c}) + \Delta(\overline{b}'', \overline{c}), \quad \Delta(\overline{b}, \overline{c}' + \overline{c}'') = \Delta(\overline{b}, \overline{c}') + \Delta(\overline{b}, \overline{c}''),$$
$$\Delta(\delta\overline{b}, \overline{c}) = \delta\Delta(\overline{b}, \overline{c}), \quad \Delta(\overline{b}, \overline{c}\gamma) = \Delta(\overline{b}, \overline{c})\gamma, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{T}.$$

Из приведенных свойств следует, что значение $\Delta(\overline{b}, \overline{c})$ можно интерпретировать как величину $\mathbb{T}$-значного объема параллелограмма, натянутого на векторы $\overline{b}, \overline{c}$.

Для некоторых пар упорядоченных $\overline{b}, \overline{c}$ величина Δ может принимать вещественное значение. Для таких пар можно ввести понятие ориентации. Если $\Delta(\overline{b}, \overline{c}) > 0$, то пару $\overline{b}, \overline{c}$ будем называть *положительно ориентированной*, если $\Delta(\overline{b}, \overline{c}) < 0$, то пару $\overline{b}, \overline{c}$ будем называть *отрицательно ориентированной*.

Легко видеть, что для любых элементов $\overline{b}, \overline{c}$ существует элемент $\delta \in \mathbb{T}$ и существует элемент $\gamma \in \mathbb{T}$, такие что

$$\Delta(\delta\overline{b}, \overline{c}) \in \mathbb{R}, \quad \Delta(\overline{b}, \overline{c}\gamma) \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

т. е. эти значения являются вещественными. Например, $\delta = (\Delta(\overline{b}, \overline{c}))^\star$ – левый сопряженный элемент к исходному определителю, $\gamma = (\Delta(\overline{b}, \overline{c}))^\star$ – правый сопряженный элемент к исходному определителю.

Если элементы $\overline{b}, \overline{c}$ – целые, то элементы δ и γ также будут целыми. Следовательно, значения определителей $\Delta(\delta\overline{b}, \overline{c})$ и $\Delta(\overline{b}, \overline{c}\gamma)$ будут целыми вещественными числами. Знаки этих чисел задают *ориентацию пар* $(\delta\overline{b}, \overline{c})$ и $(\overline{b}, \overline{c}\gamma)$. Таким образом, можно определить ориентацию пары направлений $(\mathring{\overline{b}}, \mathring{\overline{c}})$, где $\mathring{\overline{b}} = (1, (b^1)^{-1}b^2)$ и $\mathring{\overline{c}} = (1, c^2(c^1)^{-1})$.

Если первые компоненты векторов $\overline{b}, \overline{c}$ обратимы, то

$$\Delta(\overline{b}, \overline{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b^1)^{-1}b^2 = c^2(c^1)^{-1} =: r \quad \Leftrightarrow \quad \overline{b} = b^1\mathring{\overline{r}},\ \overline{c} = \mathring{\overline{r}}c^1,$$

где $\overset{\circ}{\overline{r}} = \mathrm{col}(1, r)$. Из этого свойства следует, что параллелограмм имеет нулевой объем тогда и только тогда, когда векторы $\overline{b}, \overline{c}$ имеют одно и тоже базовое направление r, т. е. в этом смысле они параллельны.

Мы будем говорить, что вектор $\overset{\circ}{\overline{z}} = (1, z)$ *лежит между* векторами $\overline{r}'$ и $\overline{r}''$, если пары $(\overline{r}', \overline{r}'')$ и $(\overset{\circ}{\overline{z}}, \overline{r}'')$ имеют одинаковую ориентацию, т. е. $\Delta(\overline{r}', \overline{r}'') \cdot \Delta(\overset{\circ}{\overline{z}}, \overline{r}'') > 0$, см. рис. 1 и рис. 3.

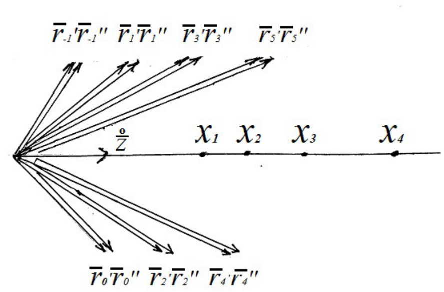

Рис. 1. Вектор $\overset{\circ}{\overline{z}} = (1, z)$ лежит между ограничивающими последовательностями $\overline{r}_n'$ и $\overline{r}_n''$, $n = 0, 1, \ldots$.

Билинейная форма Δ является некоторой метрической характеристикой пространства $\mathbb{T}$, в терминах которой можно выражать многие приведенные ниже свойства цепных дробей. В частности, условие (13) может быть переписано в виде

$$\Delta(\overline{r}_n', \overline{r}_n'') = 0, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{35}$$

В следующих разделах мы рассмотрим некоторые другие важные свойства цепных дробей, выраженные в терминах билинейной формы Δ, см. формулы (36) – (37) и другие.

§4. Вспомогательные утверждения

Приведенные ниже утверждения о свойствах цепных дробей будут использоваться для получения величин невязок цепных дробей и аппроксимируемых элементов в разделах 9.1.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\overline{r}'_n, \overline{r}''_n$ *– сопровождающие последовательности пар вида* (25), (27) *Предположим, что выполнены условия* (13), *или* (35). *Тогда справедливы соотношения*

$$\Delta(\overline{r}'_{n-1}, \overline{r}''_n) = q'_{n-1}p''{}_n - p'_{n-1}q''{}_n = (-1)^{n-1}, \tag{36}$$

$$\Delta(\overline{r}'_n, \overline{r}''_{n-1}) = q'_n p''_{n-1} - p'{}_n q''_{n-1} = (-1)^n. \tag{37}$$

Доказательство леммы 1. .

Докажем формулу (37). Доказательство леммы проведем по индукции. Учитывая формулы (16), (17), получим, что первые два значения формулы (37) имеют вид

$$\Delta(\overline{r}'_0, \overline{r}''_{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta(\overline{r}'_1, \overline{r}''_0) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_1 a_0 + 1 & a_0 \end{vmatrix} = -1. \tag{38}$$

Из формулы (25) с учетом формулы (35) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta(\overline{r}'_n, \overline{r}''_{n-1}) &= \Delta(a_n \overline{r}'_{n-1} + \overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-1}) \\ &= a_n \Delta(\overline{r}'_{n-1}, \overline{r}''_{n-1}) + \Delta(\overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-1}) = \Delta(\overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-1}). \end{aligned}$$

Далее, из формулы (27) с учетом формулы (35) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta(\overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-1}) &= \Delta(\overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-2} a_{n-1} + \overline{r}''_{n-3}) \\ &= \Delta(\overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-2}) a_{n-1} + \Delta(\overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-3}) = \Delta(\overline{r}'_{n-2}, \overline{r}''_{n-3}). \end{aligned}$$

Учитывая формулы (38), по индукции получим, что $\Delta(\overline{r}'_n, \overline{r}''_{n-1}) = (-1)^n$.

Аналогично доказывается формула (36). □

Замечание 2. Знаки правых частей равенств (36) и (37) задают ориентации соответствующих пар векторов $(\overline{r}'_n, \overline{r}''_{n-1})$ и $(\overline{r}'_{n-1}, \overline{r}''_n)$ при меняющихся значениях параметра n. При возрастании параметра n лево-правая первая пара (36) имеет положительную ориентацию, при убывании параметра n лево-правая первая пара (37) имеет отрицательную ориентацию.

Лемма 2. *Верны следующие соотношения*

$$p'_n(p'_{n-1})^{-1} = (p''_{n-1})^{-1} p''_n, \quad q'_n(q'_{n-1})^{-1} = (q''_{n-1})^{-1} q''_n. \tag{39}$$

Доказательство. Преобразуем уравнения Эйлера к следующему виду. Левую пару (19)–(18) и правую пару (21)–(20) запишем соответственно в виде

$$s'_n = a_n + (s'_{n-1})^{-1}, \quad s'_0 = a_0, \quad n \geqslant 1, \tag{40}$$

$$t'_n = a_n + (t'_{n-1})^{-1}, \quad t'_1 = a_1, \quad n \geqslant 2, \tag{41}$$

где

$$s'_n = p'_n(p'_{n-1})^{-1} =: \mathfrak{p}'_{n/n-1}, \quad t'_n = q'_n(q'_{n-1})^{-1} =: \mathfrak{q}'_{n/n-1}. \tag{42}$$

Аналогично

$$s''_n = a_n + (s''_{n-1})^{-1}, \quad s''_0 = a_0, \quad n \geqslant 1, \tag{43}$$

$$t''_n = a_n + (t''_{n-1})^{-1}, \quad t''_1 = a_1, \quad n \geqslant 2, \tag{44}$$

где

$$s''_n = (p''_{n-1})^{-1}p''_n =: \mathfrak{p}''_{n/n-1}, \quad t''_n = (q''_{n-1})^{-1}q''_n =: \mathfrak{q}''_{n/n-1}. \tag{45}$$

Пары уравнений (40), (43) и (41), (44) задают одни и те же величины, как как начальные условия для них соответственно совпадают, а именно, $s'_0 = s''_0 = a_0$ и $t'_1 = t''_1 = a_1$. Таким образом, для $n \geqslant 0$ верно, что

$$s'_n = s''_n =: s_n =: \mathfrak{p}_{n/n-1}, \quad t'_n = t''_n =: t_n =: \mathfrak{q}_{n/n-1}. \tag{46}$$

Таким образом, выше приведенные систеиы левых и правых уравнений одинаковы и могут быть переписаны в виде

$$s_n = a_n + (s_{n-1})^{-1}, \quad s_0 = a_0, \quad n \geqslant 1, \tag{47}$$

$$t_n = a_n + (t_{n-1})^{-1}, \quad t_1 = a_1, \quad n \geqslant 2. \tag{48}$$

□

Замечание 3. Рекуррентная формула (48), определяющая последовательность t_n, аналогична введенной ниже рекуррентной формуле (53), определяющей последовательность α_n, но в обратном времени. Последовательности t_n соответствуют цепные дроби, аналогичные тем, которые генерируются итеративной последовательностью α_n, но коэффициенты записываются в обратном порядке. В частности, для $n \geqslant 1$ значение $t_n = \big(a_n, \dots, a_1\big)$, т. е. может быть записано в виде цепной дроби с обратным следованием элементов.

Замечание 4. Соотношения (39) могут быть переписаны в виде

$$\Delta(\overline{s}''_n, \overline{s}'_n) := \begin{vmatrix} p''_{n-1} & p'_{n-1} \\ p''_n & p'_n \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta(\overline{t}''_n, \overline{t}'_n) := \begin{vmatrix} q''_{n-1} & q'_{n-1} \\ q''_n & q'_n. \end{vmatrix} = 0. \tag{49}$$

Следствие 1. *Из леммы* 2, *учитывая соотношения* $|q'_0| = |q''_0| = 1$ *и* $|p'_0| = |p''_0| = |a_0|$, *следует, что*

$$|q'_n| = |q''_n|, \quad |p'_n| = |p''_n|, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{50}$$

Обозначим общее значение $|q'_n|^2 = |q''_n|^2 =: q_n^2$. Тогда $|q_n| = \sqrt{q_n^2}$.

§5. О процедуре представления элементов пространства $\mathbb{T}$ последовательностями цепных дробей

Далее мы будем изучать свойства разложений элементов некоторых множеств состояний в цепные дроби. В качестве таких множеств будем рассматривать некоторые алгебры $\mathbb{T}$, рассмотренные в раздела 2.1, содержащие дискретные подмножества (решетки) $\mathbb{W}$. Из элементов этих множеств будем формировать цепные дроби.

5.1. Способы округления. При формировании цепной дроби используются те или другие способы округления. Округление – это некоторая аппроксимация элемента множества $\mathbb{T}$ некоторым элементом множества $\mathbb{W}$.

По аналогии с вещественными числами, каждое число $z \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ будем представлять в виде $z = [z] + \langle z \rangle$, где $[z]$ –*целая часть числа* z принадлежит множеству $\mathbb{W}$ и $\langle z \rangle$ – *дробная часть числа* z ("остаток"). Для числа z значение его целой части $[z]$ может определяться по-разному и зависит от способа округления. Обычно предполагается, что для дробной части должно быть выполнено условие, что норма $|\langle z \rangle| < 1$.

Таким образом, в общем случае задается некоторая функция

$$a : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}, \quad z \mapsto [z] =: a(z). \tag{51}$$

Конкретные способы назначения целой части элемента (способ округления) могут быть, например, следующие.

1. Покомпонентное округление числа до целой части с недостатком или избытком. В этом случае целую часть будем обозначать $\lfloor z \rfloor$ или $\lceil z \rceil$.

2. Целая часть может быть ближайшим целом числом к числу z. В этом случае целую часть будем обозначать $\lfloor z \rceil$.

3. Если способ округления не важен, то целую часть будем обозначать $[z]$.

Способы округления, при которых функция a не меняется на каждом шаге формирования цепной дроби, будем называть стационарными. Альтернативно, можно предполагать, что имеется возможность выбирать функцию округления на каждом шаге из некоторого набора допустимых функций, т. е. считать, что функция a является многозначной. В основном, это, нужно, чтобы избежать вырождения процесса формирования цепной дроби.

5.2. Алгоритм Евклида. Для разложения элемента в цепную дробь с элементами $a_n \in \mathbb{W} \setminus \{0\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ может быть использован *алгоритм Евклида*, который приводит к построению некоторой рекуррентной последовательности $\{\alpha_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $\alpha_0 := z$. Далее члены рекуррентной последовательности вычисляем по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= [\alpha_0] + \langle \alpha_0 \rangle = [\alpha_0] + \alpha_1^{-1}, \quad \text{где}\, \alpha_1 = \langle \alpha_0 \rangle^{-1},\\
\alpha_1 &= [\alpha_1] + \langle \alpha_1 \rangle = [\alpha_1] + \alpha_2^{-1}, \quad \text{где}\, \alpha_2 = \langle \alpha_1 \rangle^{-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_n &= [\alpha_n] + \langle \alpha_n \rangle = [\alpha_n] + \alpha_{n+1}^{-1}, \quad \text{где}\, \alpha_{n+1} = \langle \alpha_n \rangle^{-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned} \tag{52}$$

где для $[.]$ – целая часть числа и $\langle . \rangle$ – дробная часть числа, которые определенны некотором способом по формуле вида (51). Для $n \geqslant 0$ обозначим $a_n = [\alpha_n]$. Тогда среднее уравнение (52) можно переписать в виде

$$\alpha_n = a_n + \alpha_{n+1}^{-1}. \tag{53}$$

Отметим, что на каждом шаге n функция округления $a(.)$ может быть разная, т. е. она она может зависеть от параметра n. Выбор способа округления на каждом шаге делается, в частности, таким образом, чтобы обеспечить на следующем шаге существование обратного элемента. Кроме того, выбор способа округления позволяет в ряде случаев обеспечить для последовательности α_n некоторые желаемые свойства.

Следуя работе [4], последовательность $\{\alpha_n,\ n = 0, 1, \dots\}$ будем называть *итерационной последовательностью.* Она полностью определяет отрезки $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ бесконечной цепной дроби.

Если z – "иррациональное число", то при формировании итерационной последовательности могут быть следующие ситуации.

1. Процедура продолжается неограниченное число шагов.

2. На некотором шаге n при любом способе округления величины α_n для остатка $\langle\alpha_n\rangle$ величина нормы $|\langle\alpha_n\rangle| = 0$, т. е. величина $\langle\alpha_n\rangle \neq 0$ не имеет обратной, так значение этой величины принадлежит множеству M критических элементов $tt^\star = 0$. Заметим, что такая ситуация невозможна, если в качестве пространства состояний $\mathbb{T}$ рассматриваются множества $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

3. Существует номер n_0, такой что при любых способах округления для всех $n \geqslant n_0$ верно $|\langle\alpha_n\rangle| = 1$. Это означает, что при $n \geqslant n_0$ все значения α_n лежат на единичной сфере $tt^\star = 1$.

Мы будем говорить, что имеется *невырожденая итерационная последовательность*, если для нее не встречаются случаи 2 или 3.

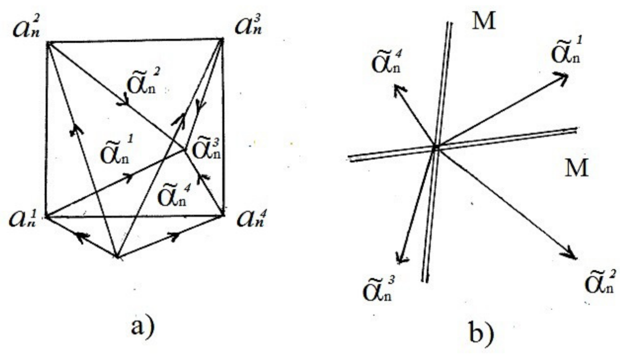

Рис. 2. Итеративная последовательность $\alpha_n = a_n^k + \langle\alpha_n^k\rangle$, $\langle\alpha_n^k\rangle =: \tilde\alpha_n^k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

На рис. 2 дана схематическая иллюстрация действия функции округления для случая $\mathbb{T} = \mathbb{C}$. На рис. 2a) показаны точки a_n^k, $k = 1, 2, 3, 4$ вершин единичного квадрата I_n, которые суть разные варианты округления вектора α_n. Все изображенные векторы исходят из начала системы координат, конец вектора α_n находятся внутри квадрата I_n, концы векторов a_n^k находятся в вершинах этого квадрата. Векторы $\langle\alpha_n^k\rangle =: \widetilde{\alpha}_n^k$ – возможные остатки округления, где $k = 1, 2, 3, 4$.

На рис. 2b) начальные точки векторов $\langle\alpha_n^k\rangle$, $k = 1, 2, 3, 4$ помещены в начало системы координат посредством параллельного переноса. Двойной линией показаны точки критического множества M, на котором не должны лежать одновременно концы всех векторов $\langle\alpha_n^k\rangle, k = 1, 2, 3, 4$.

5.3. Представление элементов разложения в виде рекуррентной последовательности конечных цепных квазидробей. Используя элементы итеративной последовательности, каждую бесконечную цепную дробь можно записать формально (символически) в конечном виде.

$$\big(a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n\big), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{54}$$

где α_n – величина остатка последовательности, который можно представить с учетом формулы (53) в виде $\alpha_n = a_n + (\alpha_{n+1})^{-1}$. Таким образом, дробь (54) также может быть записана в виде

$$\big(a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1}\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{55}$$

С ростом n элемент α_n сдвигается вправо. Для единообразия конечная дробь может быть также записана в виде

$$\big(a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0\big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{56}$$

где символ “0” можно понимать как “ноль” или бесконечную последовательность, состоящую из нулей.

Мы можем рассматривать любую обыкновенную дробь с числителем p и знаменателем q как элемент r проективного пространства $\mathbb{P}^1(\mathbb{T})$ (левого или правого), связанного с пространством $\mathbb{T}^2$.

Пусть имеется некоторый элемент $z \in \mathbb{T}$ и r_n – последовательность подходящих дробей. Пусть $r'_n = (q'_n)^{-1}p'_n$ – левое представление подходящей дроби и $r''_n = p''_n(q''_n)^{-1}$ – правоя представление подходящая дроби, где $r'_n = r''_n = r_n$ (формула (12)).

Если число z – рациональное, то это значение, записанное в виде конечной цепной дроби вида (1), совпадает со значением её последней подходящей дроби на шаге n, которое можно представить соответственно в левом и правом видах, т. е.

$$r'_n = (a_n q'_{n-1} + q'_{n-2})^{-1}(a_n p'_{n-1} + p'_{n-2}), \tag{57}$$

$$r''_n = (p''_{n-1}a_n + p''_{n-2})(q''_{n-1}a_n + q''_{n-2})^{-1}. \tag{58}$$

Эти формулы непосредственно следует соответственно из формул (19)–(18) и из формул (21)–(20).

Принимая во внимание формулу (55), для бесконечной цепной дроби можно также выписать соотношения, аналогичные соотношениям (57) и (58).

Таким образом, для $n = 0, 1, \dots$ аппроксимируемое значение z в левом и правом представлениях удовлетворяют соотношениям

$$z' = (\alpha'_{n+1} q'_n + q'_{n-1})^{-1} (\alpha'_{n+1} p'_n + p'_{n-1}), \tag{59}$$

$$z'' = (p''_n \alpha''_{n+1} + p''_{n-1})(q''_n \alpha''_{n+1} + q''_{n-1})^{-1}, \tag{60}$$

где $z' = z'' = z$ и $\alpha'_n = \alpha''_n$ — члены итеративной последовательности α_n в левом и правом представлениях (они совпадают). В формулах (59) и (60), величины

$$x'_{n+1} := \alpha'_{n+1} q'_n + q'_{n-1}, \quad x''_{n+1} := q''_n \alpha''_{n+1} + q''_{n-1}, \tag{61}$$

$$y'_{n+1} := \alpha'_{n+1} p'_n + p'_{n-1}, \quad y''_{n+1} := p''_n \alpha''_{n+1} + p''_{n-1} \tag{62}$$

можно интерпретировать как члены последовательностей соответственно левых и правых квазичислителей величины z. Для величины $z \in \mathbb{T}$ ее поднятие есть элемент $\mathring{\overline{z}} := \mathrm{col}(1, z) \in \mathbb{T}^2$. Следовательно, справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (25), (27), т. е. для $n \geqslant 0$

$$\overline{z}'_{n+1} = \alpha_{n+1} \overline{r}'_n + \overline{r}'_{n-1}, \tag{63}$$

$$\overline{z}''_{n+1} = \overline{r}''_n \alpha_{n+1} + \overline{r}''_{n-1}, \tag{64}$$

где

$$\overline{z}'_{n+1} := \mathrm{col}(x'_{n+1}, y'_{n+1}) = x'_{n+1} \mathring{\overline{z}}, \quad \overline{z}''_{n+1} := \mathrm{col}(x''_{n+1}, y''_{n+1}) = \mathring{\overline{z}} x''_{n+1}. \tag{65}$$

В формулах (65) использовано, что для любого n верно $z'_n = z'$ и $z''_n = z''$, где $z' = z'' = z$.

Уравнения (63), (64) имеют форму уравнений (25), (27) для сопровождающей последовательности пар знаменателей и числителей для подходящих дробей. Таким образом, уравнения (63), (64) задают “сопровождающие последовательности пар квазизнаменателей и квазичислителей” для аппроксимируемых элементов.

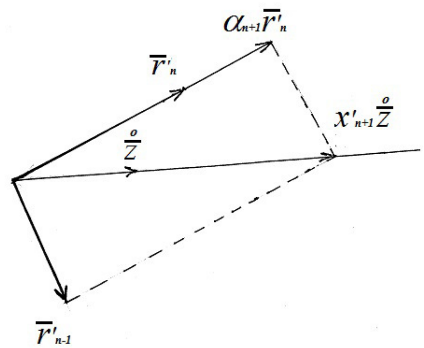

Рис. 3. Направление $\overset{\circ}{\overline{z}} = (1, z)$ элемента $\overline{z} = x'_{n+1}\overset{\circ}{\overline{z}}$, где x'_{n+1} – знаменатель дроби $z := z'_{n+1} = y'_{n+1}(x'_{n+1})^{-1}$.

§6. Формулы для невязок аппроксимируемых элементов

В этом разделе мы дадим выражения невязок через знаменатели и квазизнаменатели.

Пусть $\overline{r}'_n$ и $\overline{r}''_n$ – некоторые целые левые и правые элементы расширенного пространства состояний. Пусть также $\overline{z}'_n$ и $\overline{z}''_n$ – квазицелые левые и правые элементы аппроксимируемых элементов расширенного пространства состояний, заданные формулами (63) и (64).

Тогда с учетом формул из раздела (3.2), умножая соотношения (63) справа на r''_n и соотношения (64) слева на r'_n, получаем, что

$$\Delta(\overline{z}'_{n+1}, \overline{r''}_n) = \Delta(\overline{r}'_{n-1}, \overline{r}''_n), \quad \Delta(\overline{r}'_n, \overline{z}''_{n+1}) = \Delta(\overline{r}'_n, \overline{r}''_{n-1}). \tag{66}$$

Из формул (66) следует, что вектор $\overline{z}'_{n+1}$ лежит между векторами $\overline{r}'_{n-1}, \overline{r}''_n$ и вектор $\overline{z}''_{n+1}$ лежит между векторами $\overline{r}'_n, \overline{r}''_{n-1}$, см. рис. 1.

С учетом формул из раздела (3.2) формулы (66) можно переписать в следующих видах

$$x'_{n+1}\Delta(\overset{\circ}{\overline{z}}, \overset{\circ}{\overline{r}}_n) = q'_{n-1}\Delta(\overset{\circ}{\overline{r}}_{n-1}, \overset{\circ}{\overline{r}}_n), \quad \Delta(\overset{\circ}{\overline{r}}_n, \overset{\circ}{\overline{z}})x''_{n+1} = \Delta(\overset{\circ}{\overline{r}}_n, \overset{\circ}{\overline{r}}_{n-1})q''_{n-1}. \tag{67}$$

Пусть $\overline{r}''_n = \mathrm{col}(q''_n, p''_n)$ и $\overline{r}'_n = \mathrm{col}(q'_n, p'_n)$. Тогда соотношения (65) можно переписать с учетом формул (36) – (37) в следующем виде

$$x'_{n+1}(p''_n - zq''_n) = (-1)^{n-1}, \quad (q'_n z - p'_n)x''_{n+1} = (-1)^n. \tag{68}$$

Заметим, что если $|x_{n+1}|^{-1} < 1$, то величины p_n и q_n не имеют общего делителя.

Замечание. В формулах (68) необязательно предполагать, что компоненты пар направлений обратимы. В случае обратимости можно говорить об аппроксимации “тангенса угла направления” $z = \frac{z}{1}$ подходящими дробями r_n. Если величины x_{n+1}, q_n обратимы, то формулы (68) можно записать в следующих видах

$$(z - r_n) = (-1)^n (x'_{n+1})^{-1}(q''_n)^{-1}, \quad (z - r_n) = (-1)^n (q'_n)^{-1}(x''_{n+1})^{-1}. \tag{69}$$

§7. Критерии сходимости подходящих дробей

Мы здесь будем использовать псевдонорму “$|.|$” алгебры $\mathbb{T}$. Для алгебр $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ она совпадает с сильной нормой “$\|.\|$”. Пусть элемент z не является рациональным. Значения правых частей в формулах (68) и (69) можно считать некоторыми характеристиками аппроксимации направления $(1, z)$ направлениями $(1, r_n)$.

Из формул (68) непосредственно следует теорема о слабой сходимости.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ справедливы соотношения*

$$|q''_n z - p''_n| = |q'_n z - p'_n| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_n| \to \infty, \tag{70}$$

где $|x_n| := |x'_n| = |x''_n|$ — значения модулей квазизнаменателей x'_n, x''_n величин z'_n, z''_n в формулах (65).

Аналогичное утверждение справедливо для сходимости величин $z - r_n$, где $r_n := r'_n = r''_n$ последовательность подходящих дробей.

Теорема 2. *При $n \to \infty$ справедливы соотношения*

$$|z - r_n| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_n| \cdot |q_n| \to \infty, \tag{71}$$

где $|q_n| := |q'_n| = |q''_n|$ – значения модулей знаменателей q'_n, q''_n подходящих дробей r'_n, r''_n.

В общем случае имеется необходимое условие сильной сходимости подходящих дробей к аппроксимируемой величине, а именно из формул (68) с учетом (70) при $n \to \infty$ следует справедливость импликаций

$$\|q'_n z - p'_n\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |q'_n z - p'_n| \to 0 \quad \Rightarrow \quad |x''_n| \to \infty \\ \Rightarrow \quad \|x''_n\| \to \infty. \quad (72)$$

Для алгебр с частичным делением при изменении параметра n возможно приближение величин $\|x_n\|$ к критическому множеству вида $\{t \in \mathbb{T} | t \cdot t^\star = 0\}$. Это может приводить к потере обратимости элементов x_n, что может привести к отсутствию сильной сходимости к аппроксимируемой величине. Рассмотрим однако случай, когда для всех n квазизнаменатели x_n элемента z обратимы, т. е. существует значение $x_n^{-1} = x_n^\star |x_n|^{-2}$. Тогда справедлива следующая импликация при $n \to \infty$

$$\|x_n^\star\| = o(|x_n|^2),\ |x_n| \to \infty \quad \Rightarrow \quad \|x_n^{-1}\| \to 0. \quad (73)$$

Таким образом, с учетом формул (68) условие (73) можно рассматривать как достаточное условие сильной сходимости подходящих дробей x_n к аппроксимируемому элементу z.

Рассмотрим, как выглядит это условие для случая матричной алгебры. Пусть для некоторого матричного элемента z имеется последовательность матричных конвергентов x_n, $n \to \infty$. Для квадратной матрицы $x_n = \{x_n(i,j)\}$ размерности m квадратная матрица $x_n^\star = \{x_n^\star(i,j)\}$ размерности m является союзной, т. е. ее элементы являются алгебраическими дополнениями исходной матрицы, а именно компонента $x_n^\star(i,j) = \det[\overline{x}_n(i,j)]$, где квадратная субматрица $\overline{x}_n(i,j)$ размерности $m-1$ соответствует компоненте $x_n(i,j)$ матрицы x_n. Тогда условие (73) может быть записано в следующем виде

$$\max_{i,j} \det[\overline{x}_n(i,j)] = o(\det[x_n]),\ |x_n| \to \infty \quad \Rightarrow \quad \|x_n^{-1}\| \to 0. \quad (74)$$

Это условие может быть интерпретировано как отсутствие доминирования по величине одних элементов $x_n(i,j)$ матриц x_n над другими при росте параметра n.

§8. Некоторые оценки невязок для подходящих дробей

В этом разделе будут даны оценки в сильной норме для невязок через знаменатели подходящих дробей.

8.1. Соотношение знаменателей q_n и квази-знаменателей x_n. Коэффициент рассогласования этих величин. Предположим, что для величины z определена последовательность подходящих дробей r_n (знаменатели этих дробей обратимы). Из формул (61) имеем следующие соотношения, связывающие (левые q'_n и правые q''_n) знаменатели подходящих дробей и квази-знаменателей x_n разложенной в цепную дробь величины z :

$$x'_{n+1} = c_n q'_n, \quad x''_{n+1} = q''_n c_n. \tag{75}$$

Величина

$$c_n = \alpha_{n+1} + (t_n)^{-1} \tag{76}$$

является *коэффициентом рассогласования* (искажения) знаменателей и квазизнаменателей. Здесь величины $t_n := q'_n(q'_{n-1})^{-1} = (q''_{n-1})^{-1}q''_n$, характеризующие относительную скорость роста модулей знаменателей $|q_n|$, определены по формулам (42), (45), (46), величины α_{n+1}, характеризующие ошибку округления величины α_n, определены по формулам (53).

Формулы (75) можно записать также в виде

$$(x'_{n+1})^{-1} = (q'_n)^{-1}(c_n)^{-1}, \quad (x''_{n+1})^{-1} = (c_n)^{-1}(q''_n)^{-1}. \tag{77}$$

Заметим, что последовательности величин c_n, а также к ним обратных c_n^{-1}, могут быть, вообще говоря, не ограниченными.

Замечание. Коэффициент $\theta_n = c_n^{-1}$ введен в работе [12], где получены его оценки для вещественных цепных дробей. Условие (81) можно рассматривать как экстраполяцию условия для случая, рассмотренного в упомянутой работе.

8.2. Оценки снизу линейных форм. Предположим, что существует постоянная $\bar{c}$, такая что полнено условие

$$\|c_n\| \leqslant \bar{c}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{78}$$

Тогда с учетом соотношения (75) справедливы следующие соотношения

$$\|q'_n z - p'_n\| = \|(x''_{n+1})^{-1}\| \geqslant \frac{1}{\|x''_{n+1}\|} \geqslant \frac{1}{\|c_n\| \cdot \|q''_n\|} \geqslant \frac{1}{\bar{c}} \frac{1}{\|q''_n\|}. \tag{79}$$

Необходимое условие сильной сходимости подходящих дробей дается следующей теоремой.

Теорема 3. *При $n \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\|q'_n z - p'_n\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|q''_n\| \to \infty.$$

Эта теорема непосредственно следует из неравенств (79), которые дают оценку снизу скорости сходимости.

8.3. Оценки сверху линейных форм. Из формул (77) справедливы следующие соотношения

$$\|q'_n z - p'_n\| = \|(x''_n)^{-1}\| \leqslant \|(c_n)^{-1}\| \cdot \|(q''_n)^{-1}\|. \tag{80}$$

Достаточное условие сильной сходимости подходящих дробей дается следующей теоремой

Теорема 4. *Пусть при $n \to \infty$ справедливо соотношение*

$$\|(c_n)^{-1}\| = o\left(\frac{1}{\|(q''_n)^{-1}\|}\right). \tag{81}$$

Тогда $\|q'_n z - p'_n\| \to 0$.

Эта теорема непосредственно следует из неравенств (80).

8.3.1. *Оценки сверху линейных форм для случая кватернионов.* Для тела кватернионов значения слабых и сильных норм совпадают. Предположим, что существует постоянная $\overline{c}$, такая что выполнено условие

$$\underline{c} \leqslant \|c_n\|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{82}$$

В этом случае с учетом неравенства (82) соотношения (80) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \|q'_n z - p'_n\| &= \|(x''_n)^{-1}\| = \|(c_n)^{-1}\| \cdot \|(q''_n)^{-1}\| \\ &= \frac{1}{\|(c_n)\| \cdot \|(q''_n)\|} \leqslant \frac{1}{\underline{c}} \frac{1}{\|(q''_n)\|}. \end{aligned} \tag{83}$$

Достаточное условие сильной сходимости подходящих дробей дается следующей теоремой.

Теорема 5. *При $n \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\|q''_n\| \to \infty \quad \Rightarrow \quad \|q'_n z - p'_n\| \to 0.$$

Эта теорема непосредственно следует из неравенств (83), которые дают ограничение сверху на скорость сходимости.

8.3.2. *Оценки величины коэффициента рассогласования c_n через характеристики итерационной последовательности α_n и обратной итерационной последовательности t_n.* Выполнение неравенства (83) можно обеспечить при предположениях, сделанных в следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия отделимости от единицы следующих последовательностей α_n и t_n^{-1}, а именно справедливы неравенства*

$$\|\alpha_n\| \geqslant \underline{\alpha} > 1, \quad \|t_n^{-1}\| < 1 \tag{84}$$

или

$$\|\alpha_n\| > 1, \qquad \|t_n^{-1}\| \leqslant \widetilde{c}^{-1} < 1. \tag{85}$$

Тогда из (76) *следует, что*

$$\underline{c} \leqslant \big|\|\alpha_{n+1}\| - \|t_n^{-1}\|\big| \leqslant \|c_n\|, \tag{86}$$

где $\underline{c} = \max\{\underline{\alpha} - 1, 1 - \widetilde{c}^{-1}\}$.

Дадим комментарии к условиям леммы 3.

Поведение подходящих дробей полностью определяется свойствами итерационной последовательности α_n, определенной условием (53), где $|\alpha_n| \geqslant 1$.

В разделе 5.2 было дано определение невырожденной итерационной последовательности. Это определение может быть переформулировано следующим образом.

Итерационная последовательность α_n удовлетворяет условию *невырожденности*, если существует такая подпоследовательность α_{n_k}, что для любого натурального $k \geqslant 1$ верно $|\alpha_{n_k}| > 1$. Это условие может быть обеспечено соответствующим использованием функции выбора (способа округления), см. раздел 5.1.

Будем говорить, что итерационная последовательность удовлетворяет условию *сильной невырожденности*, если для любого натурального $n \geqslant 1$ верно $|\alpha_n| > 1$.

Будем говорить, что итерационная последовательность удовлетворяет условию *равномерной сильной невырожденности*, если существует $\underline{\alpha} > 1$, такое что для любого натурального $n \geqslant 1$ верно $|\alpha_n| \geqslant \underline{\alpha}$.

Некоторое промежуточное условие невырожденности будет рассмотрено в разделе 9.2, см. формулы (94).

Для обратной итерационной последовательности t_n, определенной формулой (48), второе условие (84) эквивалентно условию $|q_n| < |q_{n+1}|$ (*условие строгой монотонности знаменателей*). Достаточные условия (в терминах коэффициентов a_n) для выполнения условия строгой монотонности знаменателей были получены в [5] для случая комплексных цепных дробей, т. е. в коммутативном случае, но при выводе этих условий свойство коммутативности не использовалось. Поэтому справедлив аналог этого условия для случая кватернионов.

Условие (85) эквивалентно условию $|q_n| \geqslant \widetilde{c}|q_{n-1}|$ (*условие экспоненциального роста модулей знаменателей*) всегда выполнено (в типичных случаях) для вещественных цепных дробей, но не известно, когда оно справедливо для других пространств состояний. В следующем разделе будут даны некоторые условия выполнения этого условия для случая тела.

§9. Условия сходимости цепных дробях, выраженные через свойства итерационной последовательности

В разделе 8 были даны условия сходимости цепных дробях в терминых скорости роста их знаменателей. В этом разделае будут даны условия сходимости цепных дробях в терминых асимптотических свойств итерационной последовательности.

Ниже следующие оценки справедливы для случая, когда алгебра состояний является телом. В частности, телом кватернионов. В этом случае слабая норма совпадает с сильной нормой.

9.1. Формулы для невязок от итеративная последовательности. Пусть элемент z не является рациональным, т. е. $z \in \mathbb{T} \setminus \mathrm{P}^1(\mathbb{W}^2)$.

Соотношения (59) и (60) можно переписать в следующем виде

$$-(\alpha'_{n+1})^{-1} = (q'_n z - p'_n)(q'_{n-1} z - p'_{n-1})^{-1}, \tag{87}$$

$$-(\alpha''_{n+1})^{-1} = (z q''_{n-1} - p''_{n-1})^{-1}(z q''_n - p''_n). \tag{88}$$

Из этих формул следует, что справедливы соотношения.

$$q'_n z - p'_n = (-1)^n(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1})^{-1}, \tag{89}$$

$$z q''_n - p''_n = (-1)^n(\alpha_{n+1} \cdots \alpha_1)^{-1}. \tag{90}$$

9.2. Равномерные оценки скорости сходимости. Мы охарактеризуем сходимость подходящих дробей в терминах итерационной последовательности α_n для аппроксимируемого значения z, используя представление линейной формы в виде (89) или (90). Тогда

$$\|q'_n z - p'_n\| = \|\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1}\|^{-1} = \|\alpha_{n+1}\|^{-1} \cdots \|\alpha_1\|^{-1} = \|T_{n+1}\| \cdots \|T_1\|, \quad (91)$$

$$\|z q''_n - p''_n\| = \|\alpha_{n+1} \cdots \alpha_1\|^{-1} = \|\alpha_1\|^{-1} \cdots \|\alpha_{n+1}\|^{-1} = \|T_1\| \cdots \|T_{n+1}\|, \quad (92)$$

где $T_{n+1} = \langle \alpha_n \rangle$ – дробная часть величины α_n.

Обозначим

$$\|q''_n z - p''_n\| = \|q'_n z - p'_n\| =: \Delta_n(z).$$

Зависимость от z введенной величины будем при необходимости опускать для простоты записи.

Определим величину

$$\liminf_{n \to \infty} \|\alpha_n\| = \underline{\alpha} \geqslant 1. \quad (93)$$

Очевидно, если $\underline{\alpha} > 1$, то $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, см. формулы (83), (84).

Рассмотрим случай, когда $\underline{\alpha} = 1$. Пусть итерационная последовательность не вырождена. Будем считать, что модули членов итеративной последовательности изменяются с ростом параметра n в некоторой окрестности значения $\underline{\alpha} = 1$. Таким образом, предположим, что выполнены условия

$$1 \leqslant \|\alpha_n\| \leqslant 1 + \hat{\xi}_n, \quad \|\alpha_n^{-1}\| \geqslant 1 - \check{\xi}_n, \quad (94)$$

где $\hat{\xi}_n, \check{\xi}_n$ – вещественные числа, такие что $0 \leqslant \hat{\xi}_n$ и $0 \leqslant \check{\xi}_n \leqslant 1$. Очевидно, что $\ln(1 + \hat{\xi}_n) \leqslant \hat{\xi}_n$ и $\ln(1 - \check{\xi}_n) \leqslant -\check{\xi}_n$.

Приведем необходимые условия сходимости.

Утверждение 1. *Пусть последовательность подходящих дробей сходится, т.е. $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда следующий ряд расходится, т. е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\xi}_n = +\infty. \quad (95)$$

Доказательство. Из условий (89) или (90) следует, что

$$\Delta_n = \|(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1})^{-1}\| \geqslant \frac{1}{\|(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1})\|} \geqslant \frac{1}{\|\alpha_1\| \cdots \|\alpha_{n+1}\|}$$

$$\geqslant \frac{1}{(1+\hat{\xi}_1)\dots(1+\hat{\xi}_{n+1})} = e^{-(\ln(1+\hat{\xi}_1)+\dots+\ln(1+\hat{\xi}_{n+1})} \geqslant e^{-(\hat{\xi}_1+\dots+\hat{\xi}_{n+1})}.$$

Таким образом, если $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то условие (95) также удовлетворено. $\square$

Приведем достаточные условия сходимости.

Утверждение 2. *Пусть следующий ряд расходится, т. е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \check{\xi}_n = +\infty. \tag{96}$$

Тогда условие $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ удовлетворено.

Доказательство. Из условия (89) (или (90)) следует, что

$$\|q_n\alpha - p_n\| = \|(\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1})^{-1}\| \leqslant \|\alpha_{n+1}^{-1}\| \cdots \|\alpha_1^{-1}\| = e^{\ln\|\alpha_1^{-1}\| + \dots + \ln\|\alpha_{n+1}^{-1}\|}$$

$$\leqslant e^{\ln(1-\check{\xi}_1)+\dots+\ln\|1-\check{\xi}_{n+1}\|} \leqslant e^{-(\check{\xi}_1+\dots+\check{\xi}_{n+1})}. \tag{97}$$

Поэтому условие (96) влечет условие $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Утверждение 2 доказано. $\square$

Это утверждение можно интерпретировать так, что если элементы последовательности T_n попадают в окрестность единицы не слишком часто, то $\Delta_n \to 0$.

Определим величины

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\hat{\xi}_1 + \dots + \hat{\xi}_n) =: \overline{\xi}, \tag{98}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\check{\xi}_1 + \dots + \check{\xi}_n) =: \underline{\xi}. \tag{99}$$

Предположим, что $0 < \overline{\xi} < \infty$ и $0 < \underline{\xi} < \infty$.

Утверждение 1 можно дополнить следующим образом. Если выполнены условия (95), (98), то в случае $\Delta_n \to 0$ скорость сходимости не ниже экспоненциальной, т. е. для достаточно больших n выполнено неравенство $e^{-n\overline{\xi}} \leqslant \Delta_n$.

Утверждение 2 можно дополнить следующим образом. Если выполнены условия (96), (99), то $\Delta_n \to 0$ сходится со скоростью не ниже экспоненциальной, т. е. для достаточно больших n выполнено неравенство $\Delta_n \leqslant e^{-n\underline{\xi}}$.

Таким образом, величины $\overline{\xi}$ и $\underline{\xi}$ являются характеристиками скорости сходимости сверху и снизу.

§10. О приложении теории цепных дробей к некоторым задачам теории управления

Многокомпонентные цепные дроби применялись в работах автора [13–17] к следующей задаче теории управления. Пусть имеется некоторая динамическая полисистема, т. е. конечный набор динамических систем. На каждом временном промежутке функционирует некоторая динамическая система из этого набора. Одна динамическая система может быть заменена на другую в некоторый момент времени, который называется моментом переключения управлений.

Предполагается, что данная динамическая полисистема может быть переведена из некоторого начального состояния в заданное финальное состояние с помощью конечного числа переключений управлений в непрерывном времени, т. е. моменты переключений образуют конечный набор вещественных чисел. При выполнении некоторых предположений общего характера известно, что динамическая полисистема может быть переведена в сколь угодно малую окрестность финального состояния с помощью конечного числа переключений управлений в дискретном времени, т. е. моменты переключений образуют конечный набор рациональных чисел. Требуется определить множество моментов этих переключений.

Для этой цели нужно решить задачу совместной аппроксимации массива вещественных чисел массивом рациональных чисел с одинаковыми знаменателями. Более точно, произвольный элемент пространства $\mathbb{R}^m$ требуется аппроксимировать с любой степенью точности элементом пространства $\mathbb{Q}^m$. Для решения этой задачи применяются изложенные выше методы теории многокомпонентных цепных дробей.

§11. Заключение

В этой работе изучались свойства мультикомпонентных цепных дробей с элементами из некоторых специальных алгебр, в которых определены операция сопряжения, операция взятия обратного элемента и операции точного деления или деления с остатком. Наиболее полные результаты получены для тела кватернионов, что связано с обратимостью всех ненулевых элементов и совпадением слабой и сильных норм элементов.

Отметим некоторые особенности изучения свойств аппроксимации элементов цепными дробями при отсутствии коммутативности умножения. При исследовании было предложено рассматривать левые и правые представления подходящих дробей, а также рассматривать одновременно левые и правые уравнения Эйлера, которые являются своего рода сопряженными друг другу. В коммутативном случае эти уравнения фактически совпадают. Использование пары сопряженных уравнений позволяет получить важный факт об инвариантности билинейных симплектических форм вида (33), аргументы которых принадлежат фазовым пространствам сопряженных уравнений Эйлера, см. формулы (36), (37). Это свойство справедливо для всех видов рассмотренных в работе алгебр независимо от их размерностей.

Использование билинейных симплектических форм позволило обобщить понятие "лежать между", которое ранее использовалось в вещественном случае для описания факта, что аппроксимируемое значение лежит между двумя соседними подходящими дробями. В общем случае аппроксимируемое направление стягивает соседние подходящие дроби, лежащие в сопряженных левых и правых подпространствах расширенного пространства состояний, см. рис. 3. С ростом числа итераций угол между соседними подходящие дробями уменьшается, при этом абсолютная величина фазового объема постоянна и равна единице, см. рис. 1.

В работе для формулировок многих предложений используется понятие итерационной последовательности. Рассматриваются только невырожденные итерационные последовательности, которые порождают своего рода цепные дроби общего положения. С помощью итерационной последовательности введено понятие последовательности квазизнаменателей величины, которая аппроксимируется цепными дробями. Значения квазизнаменателей можно контролировать при вычислении последовательных приближений. В терминах этого понятия показано, что при $n \to \infty$ стремление к бесконечности модулей квазизнаменателей аппроксимируемой величины является необходимым и достаточным условием слабой сходимости подходящих дробей к этой величине.

Формулы для невязок между аппроксимируемыми элементами и подходящими дробями имеют одинаковый вид для всех рассмотренных размерностей мультикомпонентных дробей, см. формулы (79) и (83). Показано также, что модули величин невязок не зависят от левого или правого представлений подходящих дробей.

Что касается сильной сходимости подходящих дробей, то в общем случае даны только необходимые условия сходимости. Достаточные условия сходимости в данной работе приведены только для случая тела $\mathbb{H}$ и некоторых других алгебр, относящихся к семейству алгебр Клиффорда. Отметим, что эти результаты аналогичны результатам для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Для тела $\mathbb{H}$ показано, что при выполнении некоторых условий сильной невырожденности итерационной последовательности скорость сходимости подходящих дробей экспоненциальная.

Подводя итог отметим, что результаты теории многокомпонентные цепных дробей могут быть применены для развития теории приближений и, следовательно, могут быть полезны для решения многих прикладных задач технического характера.

Список литературы

1. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.
2. А. А. Бухштаб, *Теория чисел.* — М.: Изд-во Просвещение, 1966. с. 385.
3. С. Ленг, *Введение в теорию диофантовых приближений.* — М.: Мир, 1966.
4. S. G. Dani, Arnaldo Nogueira, *Continued fractions for complex numbers and values of binary quadratic forms.* — Transactions of the American Mathematical Society, **366**, No. 7 2014, 3553–3583.
5. S. G. Dani, *Continued fraction expansions for complex numbers.* — General Approach. Acta Arith., **171** (2015), 355–369.
6. S. G. Dani, Ojas Sahasrabudhe, *Generalized continued fraction expansions of complex numbers, and applications to quadratic and badly approximable numbers.* — Archiv: 2102.11769v1 [math. NT] 23 Feb 2021.
7. В. И. Арнольд, *Цепные дроби.* — М.: Изд-во МЦНМО, 2009.
8. A. D. Bruno, *On generalizations of the continued fraction.* — Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2004.
9. В. И. Парусников, *Четырехмерное обобщение цепных дробей.* — Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.
10. А. Н. Коробов, *Многомерные цепные дроби и оценки линейных форм.* — ACTA ARITHMETICA LXXI.4 (1995).
11. А. А. Лодкин, *Парус Клейна и диофантовы приближения вектора.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **481** (2019), 63-–73.
12. Yusuf Hartono, *Ergodic Properties of Continued Fraction Algorithms.* — DUP Science is an imprint of Delft University Press P.O. Box 98 2600 MG Delft The Netherlands, 2003.

13. S. M. Khryashchev, *On Finding Switching Instants for Control of Discrete-time Dynamical Polysystems by Using Continued Fractions.* — Proceedings of 15th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference), STAB 2020, (2020), 9140678. DOI: 10.1109/STAB49150.2020.9140678.
14. S. M. Khryashchev, *A Method of Determining of Switching Instants for Discrete-time Control Systems.* — Stability and Control Processes. SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. https: // doi.org/10.1007/978 - 3 - 030 - 87966 - $2_1$8.
15. S. M. Khryashchev, *A Method of Finding Discrete Controls for Switched Dynamical Systems by Applying Continued Fractions.* — Nonlinear Phenomena in Complex Systems., **24**, No. 2 (2021), 175–183.
16. S. M. Khryashchev, *On the Application of Multicomponent Continued Fractions to Control Problems for Dynamical Systems.* — Proceedings of 16th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference), STAB 2022, 2022, 9140678. DOI: 10.1109/STAB54858.2022.98.
17. S. M. Khryashchev, *On Multicomponent Continued Fraction Expansions of Hypernumbers of Certain Classes.* — Proceedings of International Conference on Polynomial Computer Algebra St.Petersburg, (2024), 71–75.
18. *Ленг С. Алгебра.* –— М.: Мир, 1968.
19. Б. Л. ван дер Варден, *Алгебра.* –— СПб.: Лань, 2004. ISBN 5-8114-0552-9.
20. Н. Г. Марчук, *Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда.* –— М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.

Khryaschev S. M. On representation by continued fractions of elements of some special algebras.

In this paper we consider continued fractions with elements from some special algebras. In absence of commutativity under multiplication, the study of properties of continued fractions is significantly complicated. For such fractions, some concepts related to classical continued fractions need to be modified. However, on the other hand, many properties of classical continued fractions are fulfilled for the generalized continued fractions under consideration. In particular, the values of the residuals are calculated using similar formulas. The most complete results can be obtained for continued fractions on the set of quaternions.

Санкт-Петербургский
государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ”
E-mail: khryashchev.sm@yandex.ru

Поступило 21 октября 2024 г.