Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 539, 2024 г.

А. Н. Квитко, А. С. Еремин

РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Введение

Одним из важных направлений развития математической теории управления является исследование проблемы построения различных типов управляющих функций, обеспечивающих перевод систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние, и соответствующих им функций фазовых координат. Среди этих задач важное место занимают задачи построения указанных управляющих функций в случае, когда время перевода не является заданной величиной и подлежит нахождению. Данный класс задач называют задачами терминального управления.

Актуальность исследования задач терминального управления обусловлена тем, что, с одной стороны, при решении задачи терминального управления можно получить более широкую область достижимости, а с другой стороны, результаты ее решения могут служить опорными приближениями при решении задач оптимизации. В частности, при решении задачи оптимального быстродействия.

Проблеме терминального управления посвящено большое количество работ. Некоторые из них приведены в ссылках [1–16]. Основные научные результаты указанных публикаций связаны с нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих заданный перевод [1–9], построением и оценками множества достижимости [1, 3, 7, 10, 11], а также разработкой методов приближенного или точного построения искомых управлений и соответствующих функций фазовых координат [6, 12–16].

В настоящее время проблема терминальных задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных систем специального вида. Однако теория решения задач терминального управления

Ключевые слова: управляемость, граничные условия, стабилизация, нелинейные системы.

для нелинейных управляемых систем общего вида ввиду их сложности еще недостаточно разработана. Основные усилия авторов направлены на разработку достаточно простого для численной реализации и устойчивого к погрешностям вычислений алгоритма решения нелокальной задачи терминального управления для более широкого класса нелинейных стационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и нахождению конструктивного достаточного условия калмановского типа, гарантирующего его реализацию. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной нелокальной терминальной задачи к решению некоторого числа локальных граничных задач на фиксированном промежутке времени. В свою очередь каждая из граничных задач может быть решена с помощью алгоритма из работы [17] с небольшими изменениями.

§1. Постановка задачи

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^r$, $r \leqslant n$,

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^{\mathrm{T}} \in C^{2n}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{0}$ будет означать нулевой вектор подходящей размерности.

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Построим матрицу

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \big(\mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\big).$$

Предположим, что для всех $\mathbf{x}$ из области

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant C, \quad C > 0 \tag{3}$$

выполнено условие

$$\operatorname{rank} \mathbf{S}(\mathbf{x}) = n. \tag{4}$$

Введем обозначения

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{j=1}^{r} m_j.$$

Предположим дополнительно, что для $|k|+|m|=2n-1$ выполняется

$$\left|\frac{\partial^{|k|+|m|}f_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\ldots\partial u_r^{m_r}}\right|\leqslant D,\\ D>0,\quad\forall(\mathbf{x},\mathbf{u})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\quad i=1,\ldots,n. \tag{5}$$

Пусть $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{x}}\neq\mathbf{0}$ – фиксированное состояние.

Задача. Найти пару функций $\mathbf{x}(t)\in C^n([0,t_1];\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{u}(t)\in C^n([0,t_1];\mathbb{R}^r)$, удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$\mathbf{x}(0)=\bar{\mathbf{x}},\quad\mathbf{u}(0)=\mathbf{0},\quad\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{0}. \tag{6}$$

Момент времени t_1 заранее неизвестен и определяется в процессе решения задачи. При $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$ полагаем $\mathbf{u}\equiv\mathbf{0}$.

Теорема. *Пусть для правой части системы* (1) *выполнены условия* (2), (5), *и в области* (3) *выполнено условие* (4). *Тогда для всех* $\mathbf{x}$, *таких что* $\|\mathbf{x}\|\leqslant\frac{C}{2}$, *существует решение поставленной задачи, которое может быть получено после решения конечного числа вспомогательных локальных граничных задач на заданном промежутке времени.*

Доказательство теоремы представлено в трех параграфах. В §2 формулируется первая локальная граничная задача и осуществляется построение вспомогательной системы для её решения. В третьем параграфе на основе оценок правой части вспомогательной системы находится интервал, на котором требуется решить первую и все последующие граничные задачи. Также в нём предложен аналитический метод стабилизации линеаризованной вспомогательной системы. В §4 показано, каким образом после решения задачи Коши для вспомогательной системы, замкнутой стабилизирующим управлением, найденным в §3, можно получить решение Задачи 1. Кроме того, приведена формулировка Задачи 2 и указан метод её решения на основе решения Задачи 1. В конце параграфа отмечено, что решение последующих граничных задач находится по аналогии с решением Задач 1 и 2.

§2. Формулировка вспомогательной задачи и построение вспомогательных систем

Пусть $L = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leqslant C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})\|$, $t_0 \leqslant \frac{C}{2L}$. Рассмотрим функцию $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varphi}(t) \in C^{2n}[0, t_1]$, удовлетворяющую системе

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{0}), \quad t \in [0, t_1], \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\mathbf{x}\| \leqslant \frac{C}{2}, \\ \boldsymbol{\varphi}(t_1) = \bar{\mathbf{x}}_1 = (\bar{x}_1^1, \ldots, \bar{x}_1^n)^{\mathrm{T}}, \quad 0 < t_1 \leqslant t_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что из условий (2), (7) и определения момента $t_0 > 0$ следуют неравенства

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leqslant C, \quad \left\| \frac{d^k \boldsymbol{\varphi}}{dt^k}(t) \right\| \leqslant K, \quad k = 1, \ldots, 2n, \quad \forall t \in [0, t_1],$$

где константа K зависит от области (3).

Задача 1. Найти пару функций

$$\mathbf{x}(t) \in C^n([0, t_1]; \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{u}(t) \in C^n([0, t_1]; \mathbb{R}^r),$$

удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \leqslant \frac{C}{2}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(t_1) = (1 - \varepsilon(t_1))\, \bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_2, \\ 0 < \varepsilon(t_1) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\varepsilon(t_1)$ и t_1: $0 < t_1 \leqslant t_0$ подлежат определению.

Выполним в системе (1) замену

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{y}(t), \quad t \in [0, t_1], \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

Тогда в новой переменной система (1) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(0), \mathbf{0}), \quad t \in [0, t_1]. \tag{10}$$

Рассмотрим задачу: найти пару функций $\mathbf{y}(t) \in C^n[0, t_1]$, $\mathbf{u}(t) \in C^n[0, t_1]$, удовлетворяющую системе (10) и условиям

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t_1) = -\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Указанную пару функций будем называть решением задачи (10), (11).

Выполним в системе (10) замену

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1. \tag{12}$$

В новой переменной $\mathbf{a}(t)$ система (10) примет вид

$$\dot{\mathbf{a}}=\mathbf{f}(\mathbf{a}+\boldsymbol{\varphi}(t)-\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1,\mathbf{u})-\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{0})=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a},\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1,\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}(t)),\ \ t\in[0,t_1],$$
$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{\varphi}(t))=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\dots,\psi_n)^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

Рассмотрим условия

$$\mathbf{a}(0)=\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1,\quad \mathbf{u}(0)=\mathbf{0},\quad \mathbf{a}(t)\to\mathbf{0},\ \mathbf{u}(t)\to\mathbf{0} \text{ при } t\to t_1. \tag{14}$$

Будем искать пару $\mathbf{a}(t)\in C^n([0,t_1];\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{u}(t)\in C^n([0,t_1];\mathbb{R}^r)$ удовлетворяющую системе (13) и условиям (14). Указанную пару функций $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ будем называть решением задачи (13), (14).

Выполним в системе (13) преобразование независимой переменной по формуле

$$t=t_1-t_1e^{-\alpha\tau},\quad \tau\in[0,+\infty), \tag{15}$$

где $\alpha>0$ – некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной τ система (13) и условия (14) примут вид

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau}=\alpha t_1e^{-\alpha\tau}\boldsymbol{\psi}\left(\mathbf{c},\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1,\mathbf{d},\boldsymbol{\varphi}(t(\tau))\right), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(\tau)&=(c_1,\dots,c_n)^{\mathrm{T}}=\mathbf{a}(t(\tau)),\\ \mathbf{d}(\tau)&=(d_1,\dots,d_r)^{\mathrm{T}}=\mathbf{u}(t(\tau)),\quad \tau\in[0,+\infty),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathbf{c}(0)=\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1,\quad \mathbf{d}(0)=\mathbf{0},\quad \mathbf{c}(\tau)\to\mathbf{0},\ \mathbf{d}(\tau)\to\mathbf{0} \text{ при } \tau\to\infty. \tag{18}$$

Пару функций $\mathbf{c}(\tau)\in C^n([0,+\infty);\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{d}(\tau)\in C^n([0,+\infty);\mathbb{R}^r)$, удовлетворяющую системе (16) и условиям (18), будем называть решением задачи (16), (18).

Замечание 2. Имея решение задачи (16), (18) с помощью формул (15), (17) получим решение задачи (13), (14). В свою очередь подстановка решения задачи (13), (14) в формулы (12), (9) и предельный переход при $t\to t_1$ даст решение Задачи 1.

Введем обозначения

$$\tilde{t}_i=t_1+\theta_0^i(t-t_1),\quad \tilde{\mathbf{c}}_i=(\theta_1^ic_1,\dots,\theta_n^ic_n)^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{\mathbf{d}}_i=(\theta_{n+1}^id_1,\dots,\theta_{n+r}^id_r)^{\mathrm{T}},\quad \theta_j^i\in[0,1],$$
$$i=1,\dots,n,\quad j=0,\dots,n+r,$$
$$k!=k_1!\cdot\dots\cdot k_n!,\quad m!=m_1!\cdot\dots\cdot m_r!$$

Используем свойство (2), разложение правой части системы (13) в ряд Тейлора в окрестности точки ($\mathbf{a}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0}, t=t_1$) и замену (15), (17). Тогда, введя для краткости обозначение $\boldsymbol{\varrho}=(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)$, систему (16) можно записать в виде:

$$
\begin{gathered}
\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\psi_i(\boldsymbol{\varrho}) + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varrho})c_j + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(\boldsymbol{\varrho})d_j \\
+ \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\frac{\partial\psi_i}{\partial t}(\boldsymbol{\varrho}) + \frac{1}{2}\alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\Biggl[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial x_k}(\boldsymbol{\varrho})c_j c_k \\
+ 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial u_k}(\boldsymbol{\varrho})c_j d_k + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial u_j\partial u_k}(\boldsymbol{\varrho})d_j d_k \\
+2t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial t}(\boldsymbol{\varrho})c_j + 2t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial u_j\partial t}(\boldsymbol{\varrho})d_j + t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}(\boldsymbol{\varrho})\Biggr] + \cdots \\
+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=2n-1}\frac{1}{k!m!l!}\frac{\partial^{|k|+|m|+l}\psi_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\ldots\partial u_r^{m_r}\partial t^l}(\boldsymbol{\varrho})c_1^{k_1} \\
\ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r}(-1)^l t_1^l e^{-l\alpha\tau} \\
+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=2n}\frac{1}{k!m!l!}\frac{\partial^{|k|+|m|+l}\psi_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\ldots\partial u_r^{m_r}\partial t^l} \\
\times(\tilde{\mathbf{c}}_i, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_i, \tilde{t}_i)c_1^{k_1}\ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r}(-1)^l t_1^l e^{-l\alpha\tau}. \qquad (19)
\end{gathered}
$$

Ограничим область изменения $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau)$ неравенствами

$$
\|\mathbf{c}(\tau)\| \leqslant C, \quad \|\mathbf{d}(\tau)\| \leqslant U, \quad \tau\in[0,\infty). \qquad (20)
$$

Сделаем $2n-1$ преобразований сдвигов функций $c_i(\tau)$, переведя их в итоге в функции $c_i^{(2n-1)}(\tau)$, $i=1,\ldots,n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент $\mathbf{c}^{(2n-1)}$ и $\mathbf{d}$, в области (20) удовлетворяли оценке $O(e^{-2n\alpha\tau}t_1^{2n})$ при $\tau\to\infty$, $t_1\to 0$. На первом этапе выполним замену $\mathbf{c}(\tau)\to\mathbf{c}^{(1)}(\tau)$ по формуле

$$
c_i(\tau) = c_i^{(1)} - t_1 e^{-\alpha\tau}\psi_i(\boldsymbol{\varrho}), \quad i=1,\ldots,n. \qquad (21)
$$

После подстановки (21) в левую и правую части системы (19) получим систему

$$
\begin{aligned}
\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} &= -\alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varrho})\psi_j(\boldsymbol{\varrho}) + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\frac{\partial\psi_i}{\partial t}(\boldsymbol{\varrho})\\
&- \alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial t}(\boldsymbol{\varrho})\psi_j(\boldsymbol{\varrho}) + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varrho})c_j^{(1)}\\
&- \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial x_k}(\boldsymbol{\varrho})c_j^{(1)}\psi_k(\boldsymbol{\varrho})\\
&+ \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial t}(\boldsymbol{\varrho})c_j^{(1)} + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}(\boldsymbol{\varrho})d_j\\
&- \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial u_k}(\boldsymbol{\varrho})\psi_j(\boldsymbol{\varrho})d_k + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial u_j\partial t}(\boldsymbol{\varrho})d_j\\
&+ \frac{1}{2}\alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial x_k}(\boldsymbol{\varrho})c_j^{(1)}c_k^{(1)} + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j\partial u_k}(\boldsymbol{\varrho})c_j^{(1)}d_k\\
&+ \frac{1}{2}\alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial u_j\partial u_k}(\boldsymbol{\varrho})d_j d_k + \frac{1}{2}\alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}(\boldsymbol{\varrho}) + \cdots\\
&+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=2n-2}\frac{1}{k!m!l!}\frac{\partial^{|k|+|m|+l}\psi_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\ldots\partial u_r^{m_r}\partial t^l}(\boldsymbol{\varrho})\\
&\times\big(c_1^{(1)} - t_1 e^{-\alpha\tau}\psi_i(\boldsymbol{\varrho})\big)^{k_1}\times\ldots\times\big(c_n^{(1)} - t_1 e^{-\alpha\tau}\psi_i(\boldsymbol{\varrho})\big)^{k_n} d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r}(-1)^l t_1^l e^{-l\alpha\tau}\\
&+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=2n-1}\frac{1}{k!m!l!}\frac{\partial^{|k|+|m|+l}\psi_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\ldots\partial u_r^{m_r}\partial t^l}\\
&\times(\tilde{\mathbf{c}}_i, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_i, \tilde{t}_i)\big(c_1^{(1)} - t_1 e^{-\alpha\tau}\psi_i(\boldsymbol{\varrho})\big)^{k_1}\\
&\ldots\big(c_n^{(1)} - t_1 e^{-\alpha\tau}\psi_i(\boldsymbol{\varrho})\big)^{k_n} d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r}(-1)^l t_1^l e^{-l\alpha\tau}. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Из (21), (18) следует

$$\mathbf{c}^{(1)}(0) = \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1 + t_1\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varrho}). \qquad (23)$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (22) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{(1)}$ и $\mathbf{d}$, в области (20) удовлетворяют условию $O(e^{-2\alpha\tau}t_1^2)$ при $\tau\to\infty$, $t_1\to 0$.

На втором этапе сделаем замену

$$\begin{aligned} c_i^{(1)} &= c_i^{(2)} + \frac{1}{2}t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varrho})\psi_j(\boldsymbol{\varrho}) - \frac{\partial\psi_i}{\partial t}(\boldsymbol{\varrho})\right) \\ &= c_i^{(2)} + t_1^2 e^{-2\alpha\tau}\xi_i^{(2)}(\varepsilon(t_1)), \\ \xi_i^{(2)}(\varepsilon(t_1)) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\varrho})\psi_j(\boldsymbol{\varrho}) - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi_i}{\partial t}(\boldsymbol{\varrho}), \\ \xi_i^{(2)}(0) &= 0, \quad i=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{24}$$

Последнее равенство в (24) следует из (13). В результате получим систему в новых переменных $c_i^{(2)}$. Несложный анализ показывает, что в ее правой части слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{(2)}$ и $\mathbf{d}$, в области (20) удовлетворяют условию $O(e^{-3\alpha\tau}t_1^3)$ при $\tau\to\infty$, $t_1\to 0$. Начальное условие согласно (23), (24) примет вид

$$c_i^{(2)}(0) = \varepsilon(t_1)\bar{x}_1^i + t_1\psi_i(\boldsymbol{\varrho}) - t_1^2\xi_i^{(2)}(\varepsilon(t_1)), \quad i=1,\dots,n. \tag{25}$$

Используя (21), (24) и индуктивный переход на k-м шаге получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)} = c_i^{(k)} + t_1^k e^{-k\alpha\tau}\xi_i^{(k)}(\varepsilon(t_1)), \quad \xi_i^{(k)}(0)=0, \quad i=1,\dots,n. \tag{26}$$

Если применить преобразования (26) $2n-1$ раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора $\mathbf{c}^{(2n-1)}$ и содержащие коэффициенты $t_1^i e^{-i\alpha\tau}$, $i=1,\dots,n-1$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора $\mathbf{d}$ и содержащие коэффициенты $t_1^i e^{-i\alpha\tau}$ $i=1,\dots,n-1$, то согласно (22), (23) и (25) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}^{(2n-1)}}{d\tau} &= \mathbf{P}\mathbf{c}^{(2n-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{4}\mathbf{R}_i(\mathbf{c}^{(2n-1)},\mathbf{d},\tau), \\ \mathbf{R}_i &= (R_i^1,\dots,R_i^n)^{\mathrm{T}}, \quad i=1,\dots,4. \end{aligned} \tag{27}$$

Функции R_1^j, $j = 1, \ldots, n$, содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $\mathbf{c}^{(2n-1)}$ с коэффициентами $t_1^i e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant n$, не содержащие степеней компонент вектора $\mathbf{d}$. Функции R_2^j, $j = 1, \ldots, n$, содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $\mathbf{d}$ с коэффициентами $t_1^i e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant n$, не содержащие степеней компонент вектора $\mathbf{c}^{(2n-1)}$. В $\mathbf{R}_3$ содержатся все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов $\mathbf{c}^{(2n-1)}$ и $\mathbf{d}$. Функция $\mathbf{R}_4$ состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{(2n-1)}$ и $\mathbf{d}$. Матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= t_1\alpha e^{-\alpha\tau}\Big(\mathbf{P}_1(t_1) + t_1 e^{-\alpha\tau}\mathbf{P}_2(t_1) + \ldots + t_1^{n-2} e^{-(n-2)\alpha\tau}\mathbf{P}_{n-1}(t_1)\Big),\\
\mathbf{Q} &= t_1\alpha e^{-\alpha\tau}\Big(\mathbf{Q}_1(t_1) + t_1 e^{-\alpha\tau}\mathbf{Q}_2(t_1) + \ldots + t_1^{n-2} e^{-(n-2)\alpha\tau}\mathbf{Q}_{n-1}(t_1)\Big),
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c}^{(2n-1)}(0) = \varepsilon(t_1)\bar{x}_1 + t_1\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varrho}) - t_1^2\boldsymbol{\xi}^{(2)} - t_1^3\boldsymbol{\xi}^{(3)} - \ldots - t_1^{2n-1}\boldsymbol{\xi}^{(2n-1)},\\
&\boldsymbol{\xi}^{(i)} = (\xi_1^{(i)}(\varepsilon(t_1)), \ldots, \xi_n^{(i)}(\varepsilon(t_1)))^{\mathrm{T}}, \ \ \boldsymbol{\xi}^{(i)}(0) = \mathbf{0}, \ \ i = 2, \ldots, 2n-1.
\end{aligned} \tag{29}$$

Введем новую управляющую функцию $\mathbf{w}(\tau)$, связанную с $\mathbf{d}(\tau)$ уравнениями

$$\frac{d\mathbf{d}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{v}_i(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}_{i+1}, \ i = 1, \ldots, 2n–2, \quad \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}(\tau)}{d\tau} = \alpha\bar{t}e^{-\alpha\tau}\mathbf{w}, \tag{30}$$

где $\mathbf{v}_i = (v_1^i, \ldots, v_r^i)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^r$. Положим

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}, \ i = 1, \ldots, 2n-1. \tag{31}$$

Систему (27),(30) и начальные данные (29), (31) теперь можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}}{d\tau} = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)} + \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{w} + \sum_{i=1}^{4}\bar{\mathbf{R}}_i(\mathbf{c}^{(2n-1)}, \mathbf{d}, \tau),\\
\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)} = (\mathbf{c}^{(2n-1)}, \mathbf{d}, \bar{\mathbf{v}})^{\mathrm{T}}_{(n+2nr)\times 1}, \quad \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{v}_{2n-1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\\
\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}_{(n+2nr)\times 1}, \ i = 1, \ldots, 4.
\end{gathered} \tag{32}$$

$$\bar{\mathbf{P}}=\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbb{O}_{n\times r} & \mathbb{O}_{n\times r} & \cdots & \mathbb{O}_{n\times r}\\ \mathbb{O}_{r\times n} & \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbf{E}_{r\times r} & \mathbb{O}_{r\times r} & \cdots & \mathbb{O}_{r\times r}\\ \mathbb{O}_{r\times n} & \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbf{E}_{r\times r} & \cdots & \mathbb{O}_{r\times r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbb{O}_{r\times n} & \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{r\times r} & \cdots & \mathbf{E}_{r\times r}\\ \mathbb{O}_{r\times n} & \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{r\times r} & \cdots & \mathbb{O}_{r\times r} \end{pmatrix},\quad \bar{\mathbf{Q}}=\begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n\times r}\\ \mathbb{O}_{r\times r}\\ \mathbb{O}_{r\times r}\\ \vdots\\ \mathbb{O}_{r\times r}\\ \alpha\bar{t}e^{-\alpha\tau}\mathbf{E}_{r\times r} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}(0)=\bar{\mathbf{c}}_0^{(2n-1)}=\left((\mathbf{c}^{(2n-1)}(0))^{\mathrm{T}},0,\ldots,0\right)^{\mathrm{T}}_{(n+2nr)\times 1} \tag{34}$$

где $\mathbb{O}_{n\times r}$, $\mathbb{O}_{r\times n}$, $\mathbb{O}_{r\times r}$ – матрицы с нулевыми элементами, $\mathbf{E}_{r\times r}$ – единичная матрица.

Рассмотрим задачу: найти пару функций $\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}(\tau)\in C^1[0,\infty)$, $\mathbf{w}(\tau)\in C^1[0,\infty)$ удовлетворяющую системе (32) и условиям

$$\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}(0)=\bar{\mathbf{c}}_0^{(2n-1)},\quad \bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}(\tau)\to\mathbf{0} \text{ при } \tau\to\infty. \tag{35}$$

Указанную пару $\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}(\tau)$, $\mathbf{w}(\tau)$ будем называть решением задачи (32),(35).

Замечание 3. Легко видеть, что имея пару функций $\mathbf{c}^{(2n-1)}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau)$, входящую в решение задачи (32), (35) и используя формулы (26), (24) и (21), получаем решение задачи (16), (18).

Для удобства дальнейших рассуждений введем область изменения $\mathbf{c}^{(2n-1)}$, согласованную с областью (20). Учитывая (26), (24), (21), (13) и индуктивный переход, получим равенство $\mathbf{c}=\mathbf{c}^{(2n-1)}+\boldsymbol{\chi}(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1)$, $\boldsymbol{\chi}(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1)\to\mathbf{0}$ при $\varepsilon\to 0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(t_1)$.

Отсюда $\|\mathbf{c}\|\leqslant\left\|\mathbf{c}^{(2n-1)}\right\|+\|\boldsymbol{\chi}(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1)\|$. В силу сказанного, для любого $\bar{\mathbf{x}}_1$ из области (3) и t_1: $0<t_1\leqslant t_0$, следует существование констант C_1, ε_0: $0<C_1<C$, $0<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon(t_1)$ таких, что для всех $\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ и для всех $\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}$ принадлежащих области

$$\left\|\mathbf{c}^{(2n-1)}\right\|\leqslant C_1 \tag{36}$$

соответствующие функции $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau)$ будут принадлежать области (20).

§3. Оценка слагаемых правой части системы (27) и синтез управления, стабилизирующего её линейное приближение

Из построения правой части системы (27),условия (28) и Замечания 1 следует, что в области (36) $\forall\tau \in [0,\infty)$ имеют место оценки

$$t_1^{i-1}e^{-(i-1)\alpha\tau}\,\|\mathbf{P}_i(t_1)\| \to 0, \quad t_1^{i-1}e^{-(i-1)\alpha\tau}\,\|\mathbf{Q}_i(t_1)\| \to 0 \quad \text{при } t_1 \to 0,\ i = 2,\dots,n-1, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbf{R}_1(\mathbf{c}^{(2n-1)},\mathbf{d},\tau)\right\| \leqslant t_1^n e^{-n\alpha\tau} L_1 \left\|\mathbf{c}^{(2n-1)}\right\|,\\
&\left\|\mathbf{R}_2(\mathbf{c}^{(2n-1)},\mathbf{d},\tau)\right\| \leqslant t_1^n e^{-n\alpha\tau} L_2 \left\|\mathbf{d}\right\|,\\
&\left\|\mathbf{R}_3(\mathbf{c}^{(2n-1)},\mathbf{d},\tau)\right\| \leqslant t_1^n e^{-n\alpha\tau} L_3 \left(\left\|\mathbf{c}^{(2n-1)}\right\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2\right),\\
&\left\|\mathbf{R}_4(\mathbf{c}^{(2n-1)},\mathbf{d},\tau)\right\| \leqslant t_1^{2n} e^{-2n\alpha\tau} L_4(\varepsilon_0\bar{\mathbf{x}}_1).
\end{aligned} \tag{38}$$

Константы $L_i > 0$, $i = 1,\dots,4$ зависят от области (36).

С учетом (13),(21),(22),(24),(26) имеем

$$L_4(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{39}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}}{d\tau} = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)} + \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{w}. \tag{40}$$

Воспользуемся доказательством леммы, приведённой в работе [17]. Она остается справедливой при замене матриц P, Q, $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ (см. (2.16), (2.20) из [17]) соответственно на матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\bar{\mathbf{P}}$ и $\bar{\mathbf{Q}}$, определенные в (33) и (28), а также при замене $\|\mathbf{F}\|$ на t_1. Тогда с учетом условий (4), (28), (33), и (37) нетрудно показать, что для любого $\bar{\mathbf{x}}_1$ из области (3) существует $\bar{t}$: $0 < \bar{t} \leqslant t_0$ такое, что при $t_1 = \bar{t}$ можно построить вспомогательное управление $\mathbf{w}(\tau)$ вида

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}(\tau)\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}, \quad \|\mathbf{M}(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \to \infty, \tag{41}$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы $\mathbf{\Phi}(\tau)$ системы (40), (41) при $\bar{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(\bar{t})$. Для $\Phi(\tau)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{\Phi}(\tau)\| \leqslant K\bar{t}e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0,\\
&\left\|\mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\right\| \leqslant K\bar{t}^{-(n-1)}e^{-\lambda(\tau-t)\tau}e^{(n-1)\alpha\tau}, \ \tau > t, \ \tau \in [0,\infty).
\end{aligned} \tag{42}$$

В дальнейшем будем рассматривать Задачу 1 и последующие Задачи 2, …, N на фиксированном промежутке $[0,\bar{t}]$. То есть в (5), (7)–(16), (18), (19), (21)–(29) полагаем $t_1=\bar{t}$.

§4. Доказательство основного результата

Рассмотрим систему (32) с начальными данными (34), замкнутую вспомогательным управлением (41), полученного в ходе доказательства леммы в работе [17], на промежутке $[0,\bar{t}]$. В силу (40), (41) эта система примет вид

$$\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}}{d\tau}=\mathbf{C}\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}+\sum_{i=1}^{4}\bar{\mathbf{R}}_i(\mathbf{c}^{(2n-1)},\mathbf{d},\tau),\quad \mathbf{C}=\bar{\mathbf{P}}+\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{M}(\tau). \tag{43}$$

Если воспользоваться рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы в работе [17] с учетом (5), (37)–(39), (42), Замечания 1, а также замены $\|\bar{\mathbf{x}}\|$ и $\|\mathbf{F}\|$ на $\varepsilon\|\bar{\mathbf{x}}_1\|$ и формулы (57) в [17] на формулу $\mathbf{c}^{(2n-1)}=\bar{t}^nze^{-n\alpha\tau}$, то для любого $\bar{\mathbf{x}}_1$ из области (3) можно найти ε_1: $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0\leqslant 1$ такое, что решение системы (43) с начальными данными (34), (29), (с учетом замены $\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1$ на $\varepsilon_1\bar{\mathbf{x}}_1$), не покидает область (36) и удовлетворяет условиям (35).

В результате будем иметь пару функций $\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}(\tau)$ и $\mathbf{w}(\tau)$, удовлетворяющую системе (43), которая является решением задачи (32), (35). В свою очередь пара функций $\bar{\mathbf{c}}^{(2n-1)}(\tau)=(\mathbf{c}^{(2n-1)}(\tau),\mathbf{d}(\tau))$ после перехода к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (26), (21), (17), (15), (12), (9) и предельного перехода при $t\to\bar{t}$, согласно (2) и Замечаниям 3 и 2, дает пару функций

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t)&=\Big(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)}\Big)^{\mathrm{T}}\in C^{2n-1}([0,\bar{t}];\mathbb{R}^n),\\ \mathbf{u}^{(1)}(t)&=\Big(u_1^{(1)},\dots,u_r^{(1)}\Big)^{\mathrm{T}}\in C^{2n-1}([0,\bar{t}];\mathbb{R}^r),\end{aligned} \tag{44}$$

которая является решением Задачи 1 и принадлежит области (36). То есть функции (44) удовлетворяют системе

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t)=\mathbf{f}\Big(\mathbf{x}^{(1)}(t),\mathbf{u}^{(1)}(t)\Big),\quad t\in[0,\bar{t}] \tag{45}$$

и условиям

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^{(1)}(0)=\bar{\mathbf{x}},\quad \mathbf{u}^{(1)}(0)=\mathbf{0},\quad \mathbf{x}^{(1)}(\bar{t})=(1-\varepsilon_1)\bar{\mathbf{x}}_1=\bar{\mathbf{x}}_2,\\ &\mathbf{u}^{(1)}(\bar{t})=\mathbf{0},\quad \|\bar{\mathbf{x}}_2\|\leqslant\|\bar{\mathbf{x}}_1\|.\end{aligned} \tag{46}$$

Дополнительно отметим, что из условий (2), (33), (35) и (44) следует

$$\frac{d^k \mathbf{u}^{(1)}}{dt^k}(\bar{t}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \ldots, 2n-1. \tag{47}$$

Задача 2. Найти пару функций $\mathbf{x}^{(2)}(t) \in C^{2n-1}([0,\bar{t}];\mathbb{R}^n)$ и $\mathbf{u}^{(2)}(t) \in C^{2n-1}([0,\bar{t}];\mathbb{R}^r)$, удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$\mathbf{x}^{(2)}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \ \ \mathbf{u}^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{x}^{(2)}(\bar{t}) = (1-\varepsilon_2)\bar{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_3, \ \ \mathbf{u}^{(2)}(\bar{t}) = \mathbf{0}. \tag{48}$$

В (48) ε_2: $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_0 < 1$ подлежит определению. Выполним в системе (1) замену

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{y}^{(2)} + \mathbf{x}^{(1)}, \quad \mathbf{y}^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}, \\ &\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{u}^{(1)}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = \left(v_1^{(2)}, \ldots, v_r^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}, \quad t \in [0,\bar{t}]. \end{aligned} \tag{49}$$

В результате, с учетом (45), (46), (48), (49), в новых переменных система (1) и условия (48) примут вид

$$\dot{\mathbf{y}}^{(2)}(t) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{y}^{(2)} + \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{u}^{(1)}\Big) - \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}\Big), \quad t \in [0,\bar{t}], \tag{50}$$

$$\mathbf{y}^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(\bar{t}) = -\varepsilon_2\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{v}^{(2)}(\bar{t}) = \mathbf{0}. \tag{51}$$

После подстановки (12) (с заменой $\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1$ на $\varepsilon_2\bar{\mathbf{x}}_2$) в левую и правую часть (50) с учетом (51) получим аналог системы (13) и условий (14)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}^{(2)}(t) &= \mathbf{f}\Big(\mathbf{a}^{(2)} - \varepsilon_2\bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{u}^{(1)}\Big) - \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}\Big) \\ &= \boldsymbol{\psi}^{(2)}\Big(\mathbf{a}^{(2)}, \varepsilon_2\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}\Big), \quad t \in [0,\bar{t}], \\ &\boldsymbol{\psi}^{(2)}\Big(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{x}^{(1)}(t),\mathbf{u}^{(1)}(t)\Big) = \mathbf{0}, \ \ \boldsymbol{\psi}^{(2)} = \Big(\psi_1^{(2)}, \ldots, \psi_n^{(2)}\Big)^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{52}$$

$$\mathbf{a}^{(2)}(0) = \varepsilon_2\bar{\mathbf{x}}_2, \ \ \mathbf{v}^{(2)}(0) = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{a}^{(2)}(t) \to \mathbf{0}, \ \ \mathbf{v}^{(2)}(t) \to \mathbf{0} \text{ при } t \to \bar{t}. \tag{53}$$

В результате перехода к независимой переменной τ в (52), (53) по формуле (15) получаем аналог системы (16) и условий (18) (верхний индекс соответствия номеру Задачи у **c** и **d** опустим):

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha\bar{t}e^{-\alpha\tau}\boldsymbol{\psi}^{(2)}\left(\mathbf{c}, \varepsilon_2\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{d}, \mathbf{x}^{(1)}(t(\tau)), \mathbf{u}^{(1)}(t(\tau))\right), \\ &\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{a}^{(2)}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{v}^{(2)}(t(\tau)), \end{aligned} \tag{54}$$

$$\mathbf{c}(0) = \varepsilon_2\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\tau) \to \mathbf{0}, \ \mathbf{d}(\tau) \to \mathbf{0} \text{ при } \tau \to \infty. \tag{55}$$

После разложения правой части системы (52) в окрестности точки $\mathbf{a}^{(2)} = 0$, $\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{0}$, $t = \bar{t}$ преобразований (26) и присоединения системы (30) будем иметь аналог системы (32), (33) и начальных условий (34). Ее линейная часть является аналогом системы (40). Воспользовавшись рассуждениями, приведенными при решении Задачи 1, применительно к системе (54) и условиям (55) можно найти ε_2: $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_0$ и пару функций $\mathbf{x}^{(2)}(t) \in C^{2n-1}([0,\bar{t}])$ и $\mathbf{u}^{(2)}(t) \in C^{2n-1}([0,\bar{t}])$ удовлетворяющую системе

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}^{(2)}(t), \mathbf{u}^{(2)}(t)\Big), \quad t \in [0,\bar{t}] \tag{56}$$

и условиям (48). Согласно (35), (47)

$$\frac{d^k \mathbf{u}^{(2)}}{dt^k}(\bar{t}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, \ldots, 2n-1, \quad \|\bar{\mathbf{x}}_3\| \leqslant \|\bar{\mathbf{x}}_2\| \leqslant \|\bar{\mathbf{x}}_1\|.$$

Задача N**.** Используя рассуждения, приведенные при решении Задачи 2 и индуктивный переход, получим пару функций

$$\mathbf{x}^{(N)}(t) \in C^{2n-1}([0,\bar{t}]), \quad \mathbf{u}^{(N)}(t) \in C^{2n-1}([0,\bar{t}]), \tag{57}$$

которая удовлетворяет системе

$$\dot{\mathbf{x}}^{(N)}(t) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}^{(N)}(t), \mathbf{u}^{(N)}(t)\Big), \quad t \in [0,\bar{t}] \tag{58}$$

и условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(N)}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}^{(N)}(0) = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{x}^{(N)}(\bar{t}) = (1-\varepsilon_k)\bar{\mathbf{x}}_N = \bar{\mathbf{x}}_{N+1}, \quad \mathbf{u}^{(N)}(\bar{t}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{59}$$

Кроме того

$$\frac{d^k \mathbf{u}^{(N)}}{dt^k}(\bar{t}) = \mathbf{0}, \ k = 0, \ldots, 2n-1, \quad \|\bar{\mathbf{x}}_{N+1}\| \leqslant \|\bar{\mathbf{x}}_N\| \leqslant \ldots \leqslant \|\bar{\mathbf{x}}_1\|. \tag{60}$$

Продолжимость процедуры решения последовательности таких задач на весь отрезок $s\bar{\mathbf{x}}_1$, $s \in [0,1]$, следует из ограничения на частные производные (5), граничных условий (35) и построения вспомогательной системы (32).

Это завершает доказательство теоремы.

§5. Заключение

Предложенный в работе метод решения поставленной задачи может быть использован при решении задачи глобальной стабилизации нелинейных систем на конечном промежутке времени даже тогда, когда стабилизация на бесконечном промежутке невозможна.

Список литературы

1. В. И. Елкин, *Редукция нелинейных управляемых систем*, Наука, М. (1997).
2. M. I. Krastanov, *A necessary condition for small time local controllability.* — J. Dynamic and Control Systems **4** (1998), 425–456.
3. M. Krastanov, M. Quincampoix, *Local small time controllability and attainability of a set for nonlinear control system.* — ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **6** (2001), 499–516.
4. M. I. Krastanov, *A sufficient condition for small-time local controllability.* — SIAM J. Control and Optimization **48**, No. 4 (2009), 2296–2322.
5. C. O. Aguilar, A. D. Lewis, *Small-time local controllability for a class of homogeneous systems.* — SIAM J. Control and Optimization **50**, No. 3 (2012), 1502–1517.
6. А. П. Крищенко, Д. А. Фетисов, *Задача терминального управления для аффинных систем.* — Дифф. уравн. **49**, No. 11 (2013), 1410–1420.
7. S. Jafarpour, *On small-time local controllability.* — SIAM J. Control and Optimization **58**, No. 1 (2020), 425-446.
8. M. I. Krastanov, M. N. Nikolova, *A necessary condition for small-time local controllability.* — Automatica **124** (2021), Art. no. 109258.
9. M. I. Krastanov, M. N. Nikolova, *On the small-time local controllability.* — Systems and Control Letters **177** (2023), Art. no. 105535.
10. H. Hermes, *Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets.* — SIAM J. Control and Optimization **16**,No. 5 (1978), 715–727.
11. K. A. Grasse, *On the relation between small-time local controllability and normal self-reachability.* — Math. Control Signal Systems **5** (1992), 41–66.
12. А. П. Крищенко, Д. А. Фетисов, *Терминальная задача для многомерных аффинных систем.* — Докл. Акад. наук **452**, No. 2 (2013), 144–149.
13. А. П. Крищенко, Д. А. Фетисов, *Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления.* — Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки, No. 2 (2013), 3–16.
14. Д. А. Фетисов, *Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации.* — Дифф. уравнения **50**, No. 12 (2014), 1660–1668.
15. Д. А. Фетисов, *Решение терминальных задач для аффинных систем с векторным управлением на основе орбитальной линеаризации.* — Математика и математическое моделирование, No. 6 (2015), 17–31.
16. Д. А. Фетисов, *О построении решений терминальных задач для многомерных аффинных систем квазикононического вида.* — Диф. уравнения **52**, No. 12 (2016), 1709–1720.

17. А. Н. Квитко, *Об одном методе решения локальной граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы в классе дифференцируемых управлений.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **61**, No. 4 (2021), 555–570.

Kvitko A. N., Eremin A. S. Solution of a non-local problem of terminal control.

The paper presents an algorithm of constructing a differentiable control function, that provides transition of a system from a given initial state to the origin in some finite time. The algorithm is applicable to a wide class of non-linear systems, described with ordinary differential equations. A constructive sufficient Kalman-type condition that guarantees the transition is obtained.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7–9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.kvitko@spbu.ru
E-mail: a.eremin@spbu.ru

Поступило 16 сентября 2024 г.