Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 539, 2024 г.

О. Л. Виноградов, А. Ю. Улицкая

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ДЛЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ

§1. Введение

В работе рассматриваются точные неравенства вида

$$E(f,Y)_2 \leqslant K(r,Y)\|f^{(r)}\|_2. \tag{1.1}$$

Здесь $E(f,Y)_2$ – наилучшее приближение функции f некоторым подпространством Y в том или ином пространстве L_2 (на периоде, на оси, на отрезке или на полуоси). Если константа $K(r,Y)$ не может быть уменьшена за счет перехода к другому приближающему подпространству той же или меньшей размерности, то говорят, что неравенство (1.1) точно в смысле поперечников, а подпространство Y называют оптимальным или экстремальным для данного класса функций f. В случае приближений бесконечномерными подпространствами на оси или полуоси в этом определении используется понятие средней размерности (см. §5).

Хорошо известна экстремальность подпространств тригонометрических многочленов, целых функций экспоненциального типа и некоторых сплайнов в соответствующих задачах на периоде и на оси; см., например, [1]. Однако множества экстремальных подпространств гораздо шире. В [2] авторы полностью описали экстремальные подпространства, порожденные равноотстоящими сдвигами одной функции (короче, пространства сдвигов) на периоде и указали серию других более общих экстремальных подпространств. В [3] Улицкая получила результаты того же типа на оси.

Ключевые слова: пространства сдвигов, средняя размерность, средние поперечники.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 23-11-00178.

В случае отрезка первый результат на эту тему принадлежит Колмогорову [4]. Флоатер и Санде [5] вычислили поперечники трех семейств соболевских классов на отрезке с некоторыми граничными условиями, и указали несколько оптимальных подпространств тригонометрических многочленов и сплайнов. В [6] авторы указали широкое семейство экстремальных подпространств, в том числе сплайновых, как новых, так и имеющихся в [5].

В настоящей работе изучается аналогичная задача на полуоси. В этой ситуации предшественники нам неизвестны.

Рассматриваются два семейства соболевских пространств с граничными условиями, соответствующими четному или нечетному продолжению функции. В §2 для широкого класса подпространств устанавливаются неравенства вида (1.1). Для этого задача о приближении на полуоси с помощью продолжения сводится к задаче о приближении на оси, после чего применяются результаты из [3]. Для фиксированного подпространства доказательство точности неравенства относительно просто. Основная трудность состоит в доказательстве точности в смысле поперечников. С этой целью в §§5 и 6 вычисляются средние размерности приближающих подпространств и средние поперечники приближаемых классов. Результаты о средней размерности верны в пространствах L_p при всех $p \in [1, +\infty]$, а не только в L_2. В конечномерном случае утверждение о размерности было тривиально, а поперечники известны; здесь же оба факта неочевидны.

§2. Обозначения

В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества комплексных, вещественных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел соответственно; χ_A и $|A|$ – характеристическая функция и лебегова мера множества A. Если из контекста не следует противное, все рассматриваемые пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Если $p \in [1, +\infty)$, $A \subset \mathbb{R}$ – невырожденный промежуток, то $L_p(A)$ – пространство измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_A |f|^p\right)^{1/p} < +\infty;$$

$L_\infty(A)$ – пространство измеримых существенно ограниченных на A функций с $\operatorname{ess\,sup}$-нормой; $W_p^{(r)}(A)$ при $r \in \mathbb{N}$ – пространство функций f из $L_p(A)$, у которых $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_p(A)$. Если множество A не указано, то считаем, что $A = \mathbb{R}$, т.е. $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $W_p^{(r)} = W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. При $p \in [1, +\infty)$ через ℓ_p обозначается пространство двусторонних последовательностей $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, для которых

$$\|a\|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p\right)^{1/p} < +\infty;$$

ℓ_∞ – пространство ограниченных последовательностей с sup-нормой;

$$E(f, Y)_p = \inf_{g\in Y} \|f - g\|_p$$

есть наилучшее приближение функции $f \in L_p(A)$ элементами подпространства Y.

Во всей работе параметр $\sigma > 0$ фиксирован; $x_j = \frac{j\pi}{\sigma}$, в том числе и при нецелых j. Пространство $\mathcal{L}_p$ состоит из всех измеримых на $\mathbb{R}$ функций B, таких что функция $B_0 = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |B(\cdot - x_j)|$ принадлежит $L_p\big[0, \frac{\pi}{\sigma}\big]$; норма в $\mathcal{L}_p$ равна $\|B\|_{\mathcal{L}_p} = \|B_0\|_{L_p[0,\frac{\pi}{\sigma}]}$.

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy}\, dx.$$

Для функций из $L_2(\mathbb{R})$ определение преобразования Фурье стандартным образом переносится с $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Символами f^e и f^o обозначаются соответственно четная и нечетная части функции f, т.е.

$$f^e = \frac{f + f(-\cdot)}{2}, \qquad f^o = \frac{f - f(-\cdot)}{2}.$$

Если S – пространство функций, заданных на $\mathbb{R}$, то через S^e и S^o будем обозначать соответственно подпространства четных и нечетных функций из S.

При $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{\sigma,\mu}$ обозначается пространство сплайнов порядка μ минимального дефекта с узлами $\dfrac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$, а через $L_{p,\sigma}$ – пространство целых функций степени не выше σ, входящих в $L_p(\mathbb{R})$.

§3. Пространства сдвигов

Пусть $p\in[1,+\infty]$, $B\in L_p$, $\sigma>0$. *Оператор синтеза*

$$T^p_{B,\sigma}\colon \ell^0_p\to L_p,$$

порожденный функцией B, задается на пространстве ℓ^0_p всех финитных последовательностей с ℓ_p-нормой равенством

$$T^p_{B,\sigma}\beta(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j B(x-x_j),\qquad \beta\in\ell^0_p.$$

Система сдвигов $\{B(\cdot-x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *системой Бесселя* с показателем p или *p-бесселевой,* если оператор $T^p_{B,\sigma}$ ограничен.

Если $B\in\mathcal{L}_p$, то система $\{B(\cdot-x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ p-бесселева, причем $\|T^p_{B,\sigma}\|\leqslant\|B\|_{\mathcal{L}_p}$. При $p=1,+\infty$ верно и обратное, а неравенство обращается в равенство. Это легко проверяется прямым вычислением; см. [7, теорема 2.1] и [8, предложение 5.3.1].

Если система $\{B(\cdot-x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ p-бесселева, то оператор $T^p_{B,\sigma}$ продолжается с сохранением нормы на все пространство ℓ_p формулой

$$s(x)=T^p_{B,\sigma}\beta(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j B(x-x_j),\qquad \beta\in\ell_p. \tag{3.1}$$

Ряд в (3.1) сходится по норме в L_p, если $p\in[1,+\infty)$, и абсолютно сходится почти везде, если $p=+\infty$. При $p\in[1,+\infty)$ это очевидно из плотности ℓ^0_p в ℓ_p, а при $p=+\infty$ – из включения $B\in\mathcal{L}_\infty$.

Пусть система $\{B(\cdot-x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ p-бесселева. Обозначим через $\mathbb{S}^p_{B,\sigma}$ пространство функций s, представимых в виде (3.1). Пространства $\mathbb{S}^p_{B,\sigma}$ называются *пространствами сдвигов,* порожденными функцией B. Другими словами, $\mathbb{S}^p_{B,\sigma}=T^p_{B,\sigma}(\ell_p)$.

Например, пространства сплайнов по равноостоящим узлам порождаются сдвигами B-сплайнов; буква B как раз напоминает об этом примере.

В [9, теорема 2.14] установлено, что при $p=2$ пространства сдвигов допускают описание в терминах преобразования Фурье; см. также [8, теорема 5.2.10]. Именно, соотношение (3.1) равносильно представимости $\widehat{s}$ в виде

$$\widehat{s}(y)=\zeta(y)\widehat{B}(y), \tag{3.2}$$

где функция ζ имеет период 2σ и принадлежит $L_2[-\sigma,\sigma]$. При этом

$$\beta_j = \frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \zeta(y)e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}\,dy. \tag{3.3}$$

Пусть $0<\rho<\sigma$. Обозначим через $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ пространство всех тех функций $s\in\mathbb{S}^2_{B,\sigma}$, у которых в представлении (3.3) будет $\zeta(y)=0$ при $\rho<|y|<\sigma$. Положим еще $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\sigma}=\mathbb{S}^2_{B,\sigma}$.

По теореме Пэли – Винера определение пространств $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ равносильно следующему: это множество функций s вида (3.1), таких что $\beta_j=g(x_j)$, где $g\in L_{2,\rho}$. В самом деле, если верно равенство (3.3) и $\zeta(y)=0$ при $\rho<|y|<\sigma$, то

$$g(z)=\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\rho}^{\rho}\zeta(y)e^{izy}\,dy.$$

В такой форме определение переносится на показатели $p\neq 2$, для которых использовать преобразование Фурье затруднительно.

Пусть $p\in[1,+\infty]$, $\sigma,\rho>0$, $B\in L_p$, система $\{B(\cdot-x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ p-бесселева. По определению пространство $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}$ состоит из всех функций s вида (3.1), таких что $\beta_j=g(x_j)$, где $g\in L_{p,\rho}$.

Если $p\in(1,+\infty)$ и $\beta\in\ell_p$, то существует единственная функция $g\in L_{p,\sigma}$, такая что $\beta_j=g(x_j)$ при всех $j\in\mathbb{Z}$. Обратно, если $p\in[1,+\infty]$, $g\in L_{p,\gamma}$ при каком-нибудь $\gamma>0$, а $\beta_j=g(x_j)$, то $\beta\in\ell_p$. Поэтому при $p\in(1,+\infty)$ будет $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\sigma}=\mathbb{S}^p_{B,\sigma}$. При $p=1,+\infty$ интерполяционная задача не всегда имеет решение и потому включение $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\sigma}\subset\mathbb{S}^p_{B,\sigma}$ может быть строгим. При $\rho>\sigma$ определение не дает ничего нового: $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}=\mathbb{S}^p_{B,\sigma}$. Упомянутые сведения об интерполяции целыми функциями можно найти, например, в [10, лекции 20 и 21].

Пространства $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}$ при $p=2$ введены Улицкой в [11], а при произвольных p – Виноградовым в [12]. Там же было получено еще одно представление функций из этих пространств с помощью интерполяционной формулы Картрайт, которое понадобится нам далее.

Зафиксируем $\tau,r>0$ и не будем указывать эти параметры в обозначениях. Положим

$$z_l=\frac{l\pi}{\sigma(\tau+r)},\qquad \psi(z)=\frac{\sin\sigma rz}{\sigma rz}\,\frac{\sin\sigma(\tau+r)z}{\sigma(\tau+r)z}.$$

Пусть функция s задается формулой (3.1), $\beta_j = g(x_j)$, где $g \in L_{p,\rho}$. Положим $\tau = \rho/\sigma$. Тогда верна интерполяционная формула Картрайт (см., например, [10, лекция 21] и [13, Дополнение, п.55])

$$g(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(z_l)\psi(z - z_l). \tag{3.4}$$

Нам понадобится чуть более общий вариант формулы Картрайт со сдвигом

$$g(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(u + z_l)\psi(z - u - z_l), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) получается, если применить формулу (3.4) к функции $g_u = g(u + \cdot)$ в точке $z - u$. Отсюда следует, что всякая функция $s \in \mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}$ представляется в виде

$$s(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(u + z_l) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - u - z_l)B(x - x_j). \tag{3.6}$$

Перемена порядка суммирования обоснована в [12] в случае $u = 0$, а в общем случае доказательство ничем не отличается.

Если $g \in L_{p,\rho}$, $u \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < \sigma$, $\beta_j = g(u + x_j)$, то

$$\|\beta\|_p \leqslant C\|g\|_p \leqslant C\|\beta\|_p. \tag{3.7}$$

Левое неравенство верно и без ограничения $\rho < \sigma$.

По формуле Картрайт $L_{p,\rho} = \mathbb{S}^p_{\psi,\sigma(\tau+r),\rho}$ при $\tau = \rho/\sigma$, поэтому эти пространства включаются в общую схему как частный случай.

§4. Оценки приближений

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующие классы функций:

$$\begin{aligned} H_0^r =& \{u \in W_2^{(r)}[0,+\infty)\colon u^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ нечетно}\},\\ H_1^r =& \{v \in W_2^{(r)}[0,+\infty)\colon v^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ четно}\}. \end{aligned}$$

Замечание 1. Очевидно, каждая функция из $W_2^{(r),e}$ или $W_2^{(r),o}$ принадлежит H_0^r или H_1^r соответственно. Обратно, в силу граничных условий из определения классов H_i^r четное (нечетное) продолжение функции $u \in H_0^r$ ($v \in H_1^r$) на $(-\infty, 0]$ принадлежит $W_2^{(r),e}$ (соответственно $W_2^{(r),o}$).

Таким образом, вопрос о приближении классов H_0^r и H_1^r сводится к рассмотрению соответствующих классов функций на оси. В дальнейшем мы будем формулировать все результаты для $W_2^{(r),e}$ и $W_2^{(r),o}$.

Следующее замечание общеизвестно.

Замечание 2. Пусть Y – подпространство L_p (не обязательно замкнутое), которое вместе с каждой функцией s содержит $s(-\cdot)$. Тогда для любых функций $u \in L_p^e$ и $v \in L_p^o$ будет

$$E(u, Y)_p = E(u, Y^e)_p, \qquad E(v, Y)_p = E(v, Y^o)_p.$$

Действительно, для любой функции $s \in Y$

$$\|v - s^o\|_p = \|v^o - s^o\|_p = \left\| \frac{v-s}{2} - \frac{v(-\cdot) - s(-\cdot)}{2} \right\|_p$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\big(\|v - s\|_p + \|v(-\cdot) - s(-\cdot)\|_p\big) = \|v - s\|_p,$$

и аналогично $\|u - s^e\|_p \leqslant \|u - s\|_p$, откуда и следует требуемое.

Напомним, что набор $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *системой Рисса* в $\mathcal{H}$ с постоянными $A_1, A_2 > 0$, если для любого $\beta \in \ell_2$ ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j f_j$ сходится в $\mathcal{H}$ и

$$A_1\|\beta\|_2^2 \leqslant \left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j f_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant A_2\|\beta\|_2^2.$$

Замечание 3. Если система сдвигов $\{B(\cdot - x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ есть система Рисса в L_2, то для всякой функции s вида (3.1) включения $s \in L_2$ и $\beta \in \ell_2$ равносильны и для всех $\rho \in (0, \sigma]$ пространства $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ замкнуты в L_2. Следовательно, в них существуют элементы наилучшего приближения любой функции. Эти свойства очевидны. Система $\{B(\cdot - x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ есть система Рисса в L_2 в том и только том случае, когда

$$a_1 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}(y + 2k\sigma)|^2 \leqslant a_2 \tag{4.1}$$

при почти всех y; см., например, [14, теорема 1.1.6]. Здесь границы a_i пропорциональны A_i.

Следующая лемма дает описание симметрии пространства сдвигов в терминах преобразований Фурье.

Лемма 1. *Пусть* $B \in L_2(\mathbb{R})$ *и система сдвигов* $\{B(\cdot - x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *есть система Рисса в* $L_2(\mathbb{R})$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. $B(-\cdot) \in \mathbb{S}^2_{B,\sigma}$.

2. *Существует такая* 2σ*-периодическая функция* $\gamma \in L_2[-\sigma,\sigma]$, *что для почти всех* $y \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\widehat{B}(-y) = \gamma(y)\widehat{B}(y)$.

3. *Существует такая* 2σ*-периодическая функция* $\gamma \in L_\infty[-\sigma,\sigma]$, *что* $\inf|\gamma| > 0$ *и для почти всех* $y \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство* $\widehat{B}(-y) = \gamma(y)\widehat{B}(y)$.

Для любого $\rho \in (0,\sigma]$ *при выполнении одного из этих условий из включения* $s \in \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ *следует* $s(-\cdot) \in \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$.

Доказательство. 1. Импликация $3 \Longrightarrow 2$ тривиальна. Равносильность утверждений 1 и 2 напрямую следует из критерия (3.2). Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 3$. Суммируя, находим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}(-y-2k\sigma)|^2 = |\gamma(y)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2.$$

По критерию системы Рисса

$$\frac{a_1}{a_2} \leqslant |\gamma(y)|^2 \leqslant \frac{a_2}{a_1},$$

где a_1 и a_2 – границы Рисса из формулы (4.1).

2. Пусть $s \in \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ и выполнено условие 3. По формуле (3.2)

$$\widehat{s}(y) = \zeta(y)\widehat{B}(y),$$

где функция ζ имеет период 2σ, $\zeta \in L_2[-\sigma,\sigma]$ и $\zeta(y) = 0$ на $(\rho,\sigma]$. По условию 3

$$\widehat{s(-\cdot)}(y) = \widehat{s}(-y) = \zeta(-y)\widehat{B}(-y) = \zeta(-y)\gamma(y)\widehat{B}(y).$$

Функция $\zeta(-\cdot)\gamma$ обладает теми же свойствами, что и ζ, поскольку $\gamma \in L_\infty$. По критерию (3.2) будет $s(-\cdot) \in \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$. $\square$

Нам понадобится критерий экстремальности пространств сдвигов для приближения соболевских классов на оси.

Теорема A ([3, следствие 4]). *Пусть* $r \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$ *и система сдвигов* $\{B(\cdot - x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *есть система Рисса в* $L_2(\mathbb{R})$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любой функции* $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ *выполняется неравенство*

$$E\big(f, \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|f^{(r)}\|_2. \tag{4.2}$$

2. *Для почти всех* $y \in (-\rho, \rho)$ *будет* $\widehat{B}(y) \neq 0$ *и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{\frac{1}{(y+2k\sigma)^{2r}} - \frac{1}{\rho^{2r}}} \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Константа $\frac{1}{\rho^r}$ *в правой части неравенства* (4.2) *точная.*

Из теоремы A и леммы 1 вытекает признак экстремальности четной и нечетной частей подпространства $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ для классов $W_2^{(r),e}$ и $W_2^{(r),o}$ соответственно. В теореме A число r может быть и нецелым (с известным обобщением определения соболевских классов), но применим мы ее только для натуральных r.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$ *и система сдвигов* $\{B(\cdot - x_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *есть система Рисса в* $L_2(\mathbb{R})$. *Предположим также, что функция* B *удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Существует* $\gamma \in L_2[-\sigma, \sigma]$, *такая что для почти всех* $y \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство* $\widehat{B}(-y) = \gamma(y)\widehat{B}(y)$.

2. *Для почти всех* $y \in (-\rho, \rho)$ *будет* $\widehat{B}(y) \neq 0$ *и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{\frac{1}{(y+2k\sigma)^{2r}} - \frac{1}{\rho^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любых функций $u \in W_2^{(r),e}$ *и* $v \in W_2^{(r),o}$ *выполняются точные неравенства*

$$E\big(u, \mathbb{S}^{2,e}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|u^{(r)}\|_2, \tag{4.4}$$

$$E\big(v, \mathbb{S}^{2,o}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|v^{(r)}\|_2. \tag{4.5}$$

Доказательство. Поскольку функция B удовлетворяет условиям второго пункта теоремы A,

$$E\big(u, \mathbb{S}^{2}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|u^{(r)}\|_2.$$

По лемме 1 пространство $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ вместе с каждой функцией содержит ее четную и нечетную части. Поэтому $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$ в левой части можно заменить на $\mathbb{S}^{2,e}_{B,\sigma,\rho}$, то есть верно неравенство (4.4). Неравенство (4.5) доказывается аналогично.

Докажем точность полученных неравенств. Для этого нам понадобятся почти экстремальные функции конкретного вида в неравенстве (4.2). В [11, теорема 2] получена явная формула для наилучшего приближения пространством $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$:

$$E^2\big(f,\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}\big)_2 = 2\pi\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f^{(r)}}(y)|^2}{y^{2r}}dy - \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\,\widehat{f^{(r)}}(y+2\nu\sigma)}{(y+2\nu\sigma)^r}\right|^2 dy\right),$$

где

$$D_{B,\sigma}(y) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}(y+2\nu\sigma)|^2.$$

При $\rho<\sigma$ возьмем $\varepsilon\in(0,\sigma-\rho)$ и рассмотрим функцию $\widehat{f_\varepsilon^{(r)}} = \chi_{(\rho,\rho+\varepsilon)}$. Тогда вычитаемое обнуляется и

$$E^2\big(f_\varepsilon,\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}\big)_2 = 2\pi\int\limits_{\rho}^{\rho+\varepsilon}\frac{dy}{y^{2r}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\rho^{2r}} + o(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0+,$$

а $\|f_\varepsilon^{(r)}\|_2^2 = 2\pi\varepsilon$, откуда и следует точность (4.2).

При $\rho=\sigma$ рассмотрим два случая. Если функция $\widehat{B}$ отделена от нуля в правой окрестности точки $-\sigma$, то сумму по ν можно обнулить, положив

$$\widehat{f_\varepsilon^{(r)}}(y) = -\frac{\overline{\widehat{B}(y+2\sigma)}}{\overline{\widehat{B}(y)}}\cdot\frac{y^r}{(y+2\sigma)^r}\chi_{(-\sigma,-\sigma+\varepsilon)} + \chi_{(\sigma,\sigma+\varepsilon)}. \tag{4.6}$$

После этого точность доказывается, как в предыдущем случае.

Если же функция $\widehat{B}$ не отделена от нуля, то функция (4.6) может не принадлежать L_2, поэтому поступим по-другому. Для каждого $\varepsilon>0$ положим $\widehat{f_\varepsilon^{(r)}} = \chi_{A_\varepsilon}$, где

$$A_\varepsilon = \Big\{y\in(-\sigma,-\sigma+\varepsilon) : |\widehat{B}(y)|<\varepsilon\Big\}.$$

Мера множества A_ε положительна, так как в противном случае $|\widehat{B}(y)| \geqslant \varepsilon$ почти всюду на $(-\sigma,-\sigma+\varepsilon)$, то есть $\widehat{B}$ отделена от нуля (напомним, что эквивалентные функции отождествляются). Функция $D_{B,\sigma}$

отделена от нуля по критерию системы Рисса (4.1). Поэтому

$$E^2\big(f_\varepsilon, \mathbb{S}^2_{B,\sigma}\big)_2 = 2\pi \int\limits_{A_\varepsilon} \frac{dy}{y^{2r}} - \int\limits_{A_\varepsilon} o(1) = \frac{2\pi|A_\varepsilon|}{\sigma^{2r}} + o(|A_\varepsilon|), \quad \varepsilon \to 0+,$$

а $\|f_\varepsilon^{(r)}\|_2^2 = 2\pi|A_\varepsilon|$, что и доказывает точность (4.2).

Во всех разобранных случаях носители функций f_ε и $f_\varepsilon(-\cdot)$ пересекаются разве лишь по множеству нулевой меры. Поэтому

$$\|f_\varepsilon^e\|_2^2 = \|f_\varepsilon^o\|_2^2 = \frac{1}{2}\|f_\varepsilon\|_2^2.$$

Пусть неравенства (4.4) и (4.5) выполняются с константами a и b. Тогда

$$\begin{aligned} E^2\big(f_\varepsilon, \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}\big)_2 &= E^2\big(f_\varepsilon^e, \mathbb{S}^{2,e}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 + E^2\big(f_\varepsilon^o, \mathbb{S}^{2,o}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \\ &\leqslant a^2\big\|(f_\varepsilon^e)^{(r)}\big\|_2^2 + b^2\big\|(f_\varepsilon^o)^{(r)}\big\|_2^2 = \frac{a^2+b^2}{2}\big\|f_\varepsilon^{(r)}\big\|_2^2, \end{aligned}$$

что невозможно, если a или b меньше, чем ρ^{-r}. □

В §§5 и 6 будет доказано, что при одном дополнительном условии симметрии функции B неравенства теоремы 1 точны в смысле средних поперечников.

Оценки теоремы 1 можно усилить стандартным способом, заменив их правые части на наилучшие приближения. Обозначим

$$Z_r = \left\{s^{(r)} : s \in \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho} \cap W_2^{(r)}\right\}.$$

Замечание 4. Если $B \in W_2^{(r)}$ и обе системы сдвигов $\big\{B(\cdot - x_j)\big\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\big\{B^{(r)}(\cdot - x_j)\big\}_{j\in\mathbb{Z}}$ суть системы Бесселя в L_2, то $\mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho} \subset W_2^{(r)}$ и $Z_r = \mathbb{S}^2_{B^{(r)},\sigma,\rho}$.

Действительно, в этом случае ряд (3.1) можно дифференцировать почленно.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *для любых функций* $u \in W_2^{(r),e}$ *и* $v \in W_2^{(r),o}$ *выполняются неравенства*

$$E\big(u, \mathbb{S}^{2,e}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \begin{cases} \frac{1}{\rho^r} E\big(u^{(r)}, Z_r^e\big)_2, & r \text{ четно}, \\ \frac{1}{\rho^r} E\big(u^{(r)}, Z_r^o\big)_2, & r \text{ нечетно}. \end{cases}$$

$$E\big(v, \mathbb{S}^{2,o}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \begin{cases} \frac{1}{\rho^r} E\big(v^{(r)}, Z_r^o\big)_2, & r \text{ четно}, \\ \frac{1}{\rho^r} E\big(v^{(r)}, Z_r^e\big)_2, & r \text{ нечетно}, \end{cases}$$

Доказательство. Докажем первое неравенство, второе доказывается аналогично. Возьмем $A > 1$ и выберем элемент $g \in Z_r$ так, что

$$\|u^{(r)} - g\|_2 \leqslant AE\big(u^{(r)}, Z_r\big)_2.$$

При четном r его можно выбрать четным, а при нечетном r – нечетным. Тогда $g = s^{(r)}$, где $s \in \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}$. Применяя теорему A или теорему 1 к функции $u - s$, получаем

$$E\big(u, \mathbb{S}^{2,e}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 = E\big(u, \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}\big)_2 = E\big(u - s, \mathbb{S}^2_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|u^{(r)} - g\|_2$$

$$\leqslant \frac{A}{\rho^r}E\big(u^{(r)}, Z_r\big)_2 = \begin{cases} \frac{A}{\rho^r}E\big(u^{(r)}, Z_r^e\big)_2, & r \text{ четно},\\ \frac{A}{\rho^r}E\big(u^{(r)}, Z_r^o\big)_2, & r \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Остается устремить A к 1. $\square$

В [3, следствие 6] получено легко проверяемое условие выполнения неравенства (4.3), общего для теоремы A и теоремы 1, а именно,

$$|y + 2k\sigma|^r|\widehat{B}(y + 2k\sigma)| \leqslant |y|^r|\widehat{B}(y)|$$

при почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ и при всех $k \in \mathbb{Z}$. В частности, этому условию удовлетворяют функции с преобразованием Фурье вида

$$\widehat{B}(y) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}y} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}y}\right)^{\mu+1}\psi(y), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu + 1 \geqslant r,$$

где при почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ верно $\psi(y) \neq 0$ и $|\psi(y{+}2k\sigma)| \leqslant |\psi(y)|$ для всех $k{\in}\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Если ψ есть преобразование Фурье функции $K \in L_1(\mathbb{R})$, то такая функция B есть среднее Стеклова порядка $\mu + 1$ от K.

Для справедливости теоремы 1 необходимо еще наложить условия (4.1), при которых сдвиги функции B образуют систему Рисса, и условие симметрии. В частности, при $\mu \geqslant r - 1$ теорема 1 верна для B-сплайна $B_{\sigma,\mu}$ и сдвинутого на полшага B-сплайна, которые порождают пространства сплайнов с узлами x_j и $\frac{\pi}{2\sigma} + x_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

§5. Средняя размерность

Напомним определение средней размерности, а в следующем параграфе – среднего поперечника по Колмогорову, следуя обозначениям из [1].

Пусть D_p – замкнутый единичный шар пространства $L_p = L_p(\mathbb{R})$. Для $A > 0$ и заданной на $\mathbb{R}$ функции f обозначим

$$P_A f(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < A, \\ 0, & |t| > A. \end{cases}$$

Величина

$$d_n(W, X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in W} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

где первый инфимум берется по всем подпространствам X_n пространства X размерности не выше n, называется *n-поперечником по Колмогорову* множества W в нормированном пространстве X.

Пусть H – подпространство L_p, $p \in [1, +\infty]$. При $\varepsilon, A > 0$ положим

$$K(\varepsilon, A, H) = K(\varepsilon, A, H, L_p) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \colon d_n(P_A(H \cap D_p), L_p) < \varepsilon\}.$$

Мы принимаем соглашение $\min \varnothing = +\infty$. Легко видеть, что конечность величины $K(\varepsilon, A, H)$ при всех $\varepsilon > 0$ равносильна компактности оператора $P_A|_H$. В этом и последующих определениях иногда явно требовалось, чтобы пространство H обладало свойством: при любом $A > 0$ оператор $P_A|_H$ компактен. Соглашение $\min \varnothing = +\infty$ позволяет этого не делать.

Величина

$$\overline{\dim}\, H = \overline{\dim}\,(H, L_p) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varlimsup_{A \to +\infty} \frac{K(\varepsilon, A, H, L_p)}{2A}$$

называется *средней размерностью* подпространства H в L_p.

Известно (см. [1, лемма 2.1]), что средняя размерность пространства сплайнов $\mathbf{S}_{\sigma,\mu} \cap L_p$ и пространства $L_{p,\sigma}$ в L_p, $p \in [1, +\infty]$, равняется $\frac{\sigma}{\pi}$. В [15] Виноградовым были даны условия, при которых средняя размерность пространств $\mathbb{S}^p_{B,\sigma}$ также равняется $\frac{\sigma}{\pi}$. В [12] эти условия были ослаблены и результаты обобщены на пространства $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}$. Именно, в [12] доказано, что равенства $\overline{\dim}\, \mathbb{S}^p_{B,\sigma} = \frac{\sigma}{\pi}$ и $\overline{\dim}\, \mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho} = \frac{\rho}{\pi}$ верны при выполнении условий B1 и B2, сформулированных ниже. Этот результат включает в себя предыдущие.

Следующая теорема говорит, что при определенном условии симметрии функции B средние размерности четной и нечетной частей пространств $\mathbb{S}^p_{B,\sigma}$ и $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}$ ровно вдвое меньше, чем у всего пространства. При всей кажущейся очевидности этого утверждения мы не знаем его короткого доказательства и пользуемся техникой из [12].

Теорема 2. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, *а функция* $B \in L_p$ *удовлетворяет следующим условиям* $B1$ *и* $B2$.

$B1$. *Ряд*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |B(\cdot - x_j)|$$

сходится по норме в $L_p\bigl[0, \frac{\pi}{\sigma}\bigr]$.

$B2$. *Существует такое* $C > 0$, *что если* $\beta \in \ell_p$, *а функция* s *задается формулой* (3.1), *то*

$$\|\beta\|_p \leqslant C\|s\|_p. \tag{5.1}$$

Пусть еще $B(-\cdot) = \pm B(\cdot - x_\theta)$ *для некоторого* $\theta \in \mathbb{Z}$. *Тогда*

$$\overline{\dim}\, \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho} = \overline{\dim}\, \mathbb{S}^{p,o}_{B,\sigma,\rho} = \frac{\rho}{2\pi},$$
$$\overline{\dim}\, \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma} = \overline{\dim}\, \mathbb{S}^{p,o}_{B,\sigma} = \frac{\sigma}{2\pi}.$$

Замечание 5. Из условия B1 следует p-бесселевость системы сдвигов и тем самым корректность определения пространств сдвигов. Условие B2 означает ограниченную обратимость оператора синтеза. Поэтому в условиях теоремы 2 система сдвигов $\{B(\cdot - x_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ есть система Рисса в L_p.

Замечание 6. При $p = 2$ условие $B(-\cdot) = \pm B(\cdot - x_\theta)$ для некоторого $\theta \in \mathbb{Z}$ означает, что в условиях пункта 3 леммы 1 функция γ имеет вид

$$\gamma(y) = \theta_0 e^{-i\frac{\theta\pi}{\sigma}y}, \quad \theta_0 \in \{1, -1\},\ \theta \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 7. Множество функций B с указанным свойством симметрии включает четные и нечетные функции (при $\theta = 0$, $\theta_0 = 1$ и $\theta_0 = -1$ соответственно). По формуле Картрайт $L_{p,\rho} = \mathbb{S}^p_{\psi,\sigma(\tau+r),\rho}$ при $\tau = \rho/\sigma$, поэтому теорема 2 в силу четности функции ψ верна для пространств $L_{p,\rho}$. B-сплайн

$$B_{\sigma,\mu}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}y} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}y}\right)^{\mu+1} e^{ixy}\,dy, \quad \sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{Z}_+,$$

тоже обладает нужным свойством симметрии (при $\theta_0 = 1$, $\theta = \mu + 1$). Кроме того, ясно, что если функция B удовлетворяет этому условию, то и функции $B(x_{q/2} \pm \cdot)$ тоже ему удовлетворяют при любом $q \in \mathbb{Z}$ (вообще говоря, с другим значением θ). Поэтому теорема 2 верна для пространств сплайнов $\mathbf{S}_{\sigma,\mu} \cap L_p$ и сплайнов из $\mathbf{S}_{\sigma,\mu} \cap L_p$, сдвинутых на полшага сетки.

Доказательство теоремы 2. 1. Оценка сверху. Сначала разберем более трудный случай $\rho < \sigma$. Докажем, что

$$\overline{\dim}\, \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho} \leqslant \frac{\rho}{2\pi}.$$

Для пространства $\mathbb{S}^{p,o}_{B,\sigma,\rho}$ доказательство аналогично.

Получим удобное выражение четной части функции $s \in \mathbb{S}^{p}_{B,\sigma,\rho}$. Пусть функция s задается формулой (3.1), $\beta_j = g(x_j)$, где $g \in L_{p,\rho}$. Зафиксируем еще $r > 0$ и положим $\tau = \rho/\sigma$, тогда $\tau \in (0,1)$. Воспользуемся формулой Картрайт (3.5) со сдвигом на $u = x_{\theta/2}$. По равенству (3.6)

$$s(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(x_{\theta/2} + z_l) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - x_{\theta/2} - z_l) B(x - x_j). \tag{5.2}$$

Отсюда по условию симметрии и в силу четности функции ψ

$$\begin{aligned} s(-x) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(x_{\theta/2} + z_l) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - x_{\theta/2} - z_l) B(-x - x_j) \\ &= \pm \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(x_{\theta/2} + z_l) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - x_{\theta/2} - z_l) B(x + x_{j-\theta}) \\ &= \pm \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(x_{\theta/2} + z_l) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_{\theta-j} - x_{\theta/2} - z_l) B(x - x_j) \\ &= \pm \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(x_{\theta/2} + z_l) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - x_{\theta/2} + z_l) B(x - x_j) \\ &= \pm \sum_{l\in\mathbb{Z}} g(x_{\theta/2} - z_l) \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - x_{\theta/2} - z_l) B(x - x_j). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$s^e(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - x_{\theta/2} - z_l) B(x - x_j),$$

где

$$c_l = c_{l,\theta,g} = \frac{g(x_{\theta/2} + z_l) \pm g(x_{\theta/2} - z_l)}{2}.$$

Отсюда видно, что $c_{-l} = \pm c_l$.

При $N \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $Y_N = Y_{N,\theta}$ множество функций s_N вида

$$s_N(x) = \sum_{|l|\leqslant N} \alpha_l \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi(x_j - x_{\theta/2} - z_l) B(x - x_j), \tag{5.3}$$

где α_l – произвольные вещественные или комплексные числа.

Для оценки $K(\varepsilon, A, \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho})$ достаточно рассмотреть значения $A = x_M$, где $M \in \mathbb{N}$. Пусть $s \in \mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}$. Положим $\tau = \rho/\sigma$, тогда $\tau \in (0,1)$. Зафиксируем еще $r > 0$ и запишем s по формуле (5.2). Положим $\alpha_l = g(x_{\theta/2} + z_l)$, возьмем натуральное число $N > (\tau + r)M$ и определим функцию s_N формулой (5.3). Напомним, что $x_M = \frac{M\pi}{\sigma}$, $z_N = \frac{N\pi}{\sigma(\tau+r)}$, откуда

$$z_N - x_M = \frac{\pi(N - (\tau + r)M)}{\sigma(\tau + r)} > 0. \tag{5.4}$$

Воспользуемся оценкой

$$\|P_A s - P_A s_N\|_p \leqslant \|\alpha\|_p \eta(z_N - x_M), \tag{5.5}$$

где $\eta(y) \to 0$ при $y \to +\infty$. Она получена в [12, формула (4.1)] в случае $\theta = 0$, то есть при отсутствии сдвига в формуле Картрайт. Ее доказательство в общем случае ничем не отличается.

Из неравенств (5.5), (3.7) и (5.1) получаем

$$\|P_A s - P_A s_N\|_p \leqslant C\|s\|_p \eta(z_N - x_M).$$

Учитывая формулу (5.4), по $\varepsilon > 0$ подберем номер $N_1(\varepsilon)$ так, что $C\eta(z_N - x_M) < \varepsilon$ при всех $N \geqslant (\tau + r)M + N_1(\varepsilon)$. Возьмем $N = \lfloor(\tau+r)M + N_1(\varepsilon)\rfloor + 1$. По доказанному любую функцию из $P_A(\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho} \cap D_p)$ можно приблизить подпространством $P_A(Y_N)$ пространства L_p с точностью ε. Тем более любую функцию из $P_A(\mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho} \cap D_p)$ можно приблизить подпространством $P_A(Y^e_N)$ пространства L_p с точностью ε. Размерность пространства Y^e_N и тем более $P_A(Y^e_N)$ не выше $N+1$ ввиду равенства $c_{-l} = \pm c_l$. Поэтому

$$K(\varepsilon, x_M, \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho}) \leqslant N + 1 \leqslant (\tau + r)M + N_1(\varepsilon) + 2.$$

Отсюда

$$\varlimsup_{M\to+\infty} \frac{K(\varepsilon, x_M, \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho})}{2x_M} \leqslant \varlimsup_{M\to+\infty} \frac{(\tau + r)M + N_1(\varepsilon) + 2}{2x_M} = \frac{(\tau + r)\sigma}{2\pi} \tag{5.6}$$

и, следовательно,

$$\overline{\dim}\, \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho} \leqslant \frac{(\tau + r)\sigma}{2\pi} = \frac{\rho + r\sigma}{2\pi}.$$

Устремляя r к нулю, получаем требуемое.

Доказательство для пространств $\mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma}$ аналогично, но проще. В качестве приближений можно использовать частичные суммы разложения (3.1); подробности см. в [12]. Переход к четной части основан на формуле

$$s^e(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\beta_j \pm \beta_{\theta-j}}{2} B(x - x_j).$$

Наконец, утверждение при $\rho = \sigma$ следует из включения $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\sigma} \subset \mathbb{S}^p_{B,\sigma}$ и уже доказанной оценки.

2. Оценка снизу. Для определенности проведем рассуждение при $\rho < \sigma$, в остальных случаях доказательство аналогично. Обозначим для краткости $Y = \mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho}$, $Z = \mathbb{S}^{p,o}_{B,\sigma,\rho}$. Если $y \in Y$, $z \in Z$, то $\|y\|_p, \|z\|_p \leqslant \|y + z\|_p$. Поэтому

$$(Y + Z) \cap D_p \subset (Y \cap D_p) + (Z \cap D_p),$$

откуда

$$\begin{aligned} &d_{n+m}(P_A((Y + Z) \cap D_p), L_p) \\ &\qquad \leqslant d_n(P_A(Y \cap D_p), L_p) + d_m(P_A(Z \cap D_p), L_p), \\ &K(2\varepsilon, A, Y + Z) \leqslant K(\varepsilon, A, Y) + K(\varepsilon, A, Z). \end{aligned}$$

Разделим последнее неравенство на $2A$ и перейдем к нижнему пределу при $A \to +\infty$. В [12, теорема 1] доказано, что $\overline{\dim}\, \mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho} = \frac{\rho}{\pi}$, причем предел при $A \to +\infty$ не зависит от достаточно малого ε. По доказанному оценка сверху (5.6) верна не только для нижнего, но и для верхнего предела и тоже не зависит от ε. По свойствам нижнего предела

$$\frac{\rho}{\pi} = \varliminf_{A\to+\infty} \frac{K(2\varepsilon, A, Y + Z)}{2A} \leqslant \varliminf_{A\to+\infty} \frac{K(\varepsilon, A, Y)}{2A} + \varlimsup_{A\to+\infty} \frac{K(\varepsilon, A, Z)}{2A} \leqslant \frac{\rho}{\pi},$$

и аналогично, если поменять Y и Z ролями. Отсюда по определению средней размерности получаем требуемое равенство. □

§6. Средние поперечники

Пусть $p \in [1, +\infty]$, $\nu \geqslant 0$. *Средним ν-поперечником по Колмогорову* множества W в пространстве L_p называется величина

$$\overline{d_\nu}(W, L_p) = \inf_{X_\nu} \sup_{x \in W} \inf_{y \in X_\nu} \|x - y\|_p,$$

где первый инфимум берется по всем подпространствам X_ν пространства L_p средней размерности не выше ν.

Обозначим

$$D_p^{(r)} = \big\{ f \in W_p^{(r)} : \|f^{(r)}\|_p \leqslant 1 \big\}.$$

Для соболевских классов функций на прямой при натуральных r справедливо равенство

$$\overline{d_{\frac{\sigma}{\pi}}}(W_2^{(r)} \cap D_2, L_2) = \frac{1}{\sigma^r}$$

(см. [1, теорема 4.2]). Сформулируем еще одну теорему из того же источника [1, теорема 5.1], немного поменяв обозначения.

Теорема B. *Пусть $p \in [1, +\infty]$, Y – подпространство L_p, $\nu > 0$ и для каждого $A > 0$ существуют такие R_A – подпространство $P_A(Y)$ и Λ_A – линейный ограниченный оператор из R_A в Y, что $\dim R_A < +\infty$, $P_A \circ \Lambda_A$ – тождественный оператор и*

$$\varliminf_{A \to +\infty} \frac{\dim R_A}{2A} > \nu.$$

Тогда

$$\overline{d_\nu}(Y \cap D_p, L_p) \geqslant \varliminf_{A \to +\infty} \|\Lambda_A\|^{-1}.$$

Докажем, что в пространствах $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho}$, а также их четных и нечетных частях выполняется аналог теоремы Тихомирова о поперечнике шара. Доказательство получается применением теоремы B и одной вспомогательной оценки из [12].

Теорема 3. 1. *Пусть $p \in [1, +\infty]$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, $0 \leqslant \nu < \frac{\rho}{\pi}$, а функция $B \in L_p$ удовлетворяет условиям $B1$ и $B2$. Тогда*

$$\overline{d_\nu}\big(\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho} \cap D_p, L_p\big) = 1, \quad 0 \leqslant \nu < \frac{\rho}{\pi},$$

$$\overline{d_\nu}\big(\mathbb{S}^p_{B,\sigma} \cap D_p, L_p\big) = 1, \quad 0 \leqslant \nu < \frac{\sigma}{\pi}.$$

2. *Если, кроме того,* $B(-\cdot) = \pm B(\cdot - x_\theta)$ *для некоторого* $\theta \in \mathbb{Z}$, *то*

$$\overline{d_\nu}\big(\mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma,\rho} \cap D_p, L_p\big) = \overline{d_\nu}\big(\mathbb{S}^{p,o}_{B,\sigma,\rho} \cap D_p, L_p\big) = 1, \quad 0 \leqslant \nu < \frac{\rho}{2\pi},$$

$$\overline{d_\nu}\big(\mathbb{S}^{p,e}_{B,\sigma} \cap D_p, L_p\big) = \overline{d_\nu}\big(\mathbb{S}^{p,o}_{B,\sigma} \cap D_p, L_p\big) = 1, \quad 0 \leqslant \nu < \frac{\sigma}{2\pi}.$$

Доказательство. Оценки поперечников сверху тривиальны. Ввиду включения $\mathbb{S}^p_{B,\sigma,\rho} \subset \mathbb{S}^p_{B,\sigma,\sigma} \subset \mathbb{S}^p_{B,\sigma}$ оценки снизу достаточно установить при $\rho < \sigma$.

1. Выберем $\tau, r > 0$ так, что $\sigma(\tau + 2r) = \rho$. Пусть $M, N \in \mathbb{N}$, $A = x_M$, $N < (\tau + r)M$. Тогда

$$z_N - x_M = \frac{\pi(N - (\tau + r)M)}{\sigma(\tau + r)} < 0.$$

Выбор параметров r и N уточним позже.

Напомним, что пространства Y_N определены равенством (5.3). В теореме B положим $R_A = P_A(Y_N)$ (при каком-нибудь θ). В [12, § 5] доказано, что $\dim R_A = 2N + 1$, т.е. коэффициенты α_l определяются по значениям функции s_N на $[-A, A]$ однозначно. Поэтому можно в качестве Λ_A взять оператор продолжения по той же формуле (5.3). Также в [12, формула (5.1)] получена оценка

$$\|s_N - P_A s_N\|_p \leqslant \|\alpha\|_p \eta(x_M - z_N), \tag{6.1}$$

где $\eta(y) \to 0$ при $y \to +\infty$. Указанные факты в [12] доказаны при $\theta = 0$, но доказательство в общем случае ничем не отличается. По неравенствам (6.1), (3.7) и (5.1) получаем

$$\|s_N\|_p \leqslant \|P_A s_N\|_p + \|\alpha\|_p \eta(x_M - z_N) \leqslant \|P_A s_N\|_p + C\eta(x_M - z_N)\|s_N\|_p.$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$ и подберем такой номер $N_0(\varepsilon)$, что $C\eta(x_M - z_N) < \varepsilon$ при всех $N \leqslant (\tau + r)M - N_0(\varepsilon)$. Положим $N = \lfloor (\tau + r)M - N_0(\varepsilon) \rfloor$.

Тогда

$$\|s_N\|_p \leqslant \frac{\|P_A s_N\|_p}{1 - \varepsilon},$$

откуда

$$\|\Lambda_A\|^{-1} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{\dim R_A}{2A} = \lim_{M \to +\infty} \frac{2N + 1}{2x_M} = \frac{(\tau + r)\sigma}{\pi} = \frac{\rho - r\sigma}{\pi}.$$

Поскольку $\nu < \frac{\rho}{\pi}$, можно выбрать r столь малым, что последняя дробь больше ν. Тогда по теореме B

$$\overline{d_\nu}\big(\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho} \cap D_p, L_p\big) \geqslant 1 - \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε следует требуемое.

2. Для доказательства второго утверждения надо воспользоваться пространствами $P_A(Y_N^e)$ и $P_A(Y_N^o)$ вместо $P_A(Y_N)$ (с конкретным значением θ из условия симметрии). Размерность одного из этих пространств в точности равна N, а другого $N+1$. Это следует из соотношений

$$2N + 1 = \dim P_A(Y_N) \leqslant \dim P_A(Y_N^e) + \dim P_A(Y_N^c)$$

и оценок размерностей сверху. Само доказательство проводится аналогично. □

Для пространств целых функций экспоненциального типа $L_{p,\sigma}$ и сплайнов $\mathbf{S}_{\sigma,\mu} \cap L_p$ первое утверждение теоремы 3 доказал Магарил-Ильяев [1, теорема 5.4].

Пусть, как обычно, $D_p^{(r),e}$ и $D_p^{(r),o}$ – множества четных и нечетных функций из $D_p^{(r)}$.

Теорема 4. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$. *Тогда*

$$\overline{d_{\frac{\sigma}{2\pi}}}\big(D_2^{(r),e}, L_2\big) = \overline{d_{\frac{\sigma}{2\pi}}}\big(D_2^{(r),o}, L_2\big) = \frac{1}{\sigma^r}.$$

Доказательство. Докажем теорему для $D_2^{(r),e}$, утверждение для $D_2^{(r),o}$ получается аналогично.

Оценка сверху уже фактически доказана. Воспользуемся общеизвестным неравенством

$$E(f, L_{2,\sigma})_2 \leqslant \frac{1}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_2.$$

Если функция f четна, то пространство $L_{2,\sigma}$ в левой части можно заменить на $L_{2,\sigma}^e$ (это неравенство содержится как частный случай в теореме 1). По теореме 2 средняя размерность последнего равна $\frac{\sigma}{2\pi}$, откуда по определению среднего поперечника вытекает требуемое.

Оценка снизу стандартно следует из неравенства Бернштейна

$$\|f^{(r)}\|_2 \leqslant \tau^r\|f\|_2, \quad f \in L_{2,\tau}.$$

Отсюда множество $D_2^{(r),e}$ содержит шар радиуса τ^{-r} пространства $L_{2,\tau}^e$, если r четно, или пространства $L_{2,\tau}^o$, если r нечетно. По теореме 2 средняя размерность этих пространств равна $\frac{\tau}{2\pi}$. Возьмем $\tau > \sigma$. По теореме 3

$$\overline{d_{\frac{\sigma}{2\pi}}}\big(D_2^{(r),e}, L_2\big) \geqslant \frac{1}{\tau^r}.$$

Устремляя τ к σ, получаем требуемое. □

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теорем* 1 *и* 2 (*при* $p = 2$). *Тогда неравенства теоремы 1 точны в смысле поперечников.*

Действительно, средняя размерность приближающего пространства равна $\frac{\rho}{2\pi}$, поэтому шар $D_2^{(r),e}$ или $D_2^{(r),o}$ нельзя приблизить таким пространством с погрешностью, меньшей, чем ρ^{-r}.

Список литературы

1. Г. Г. Магарил-Ильяев, *Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой.* — Мат. сборник **182**, No. 11 (1991), 1635–1656.
2. О. Л. Виноградов, А. Ю. Улицкая, *Точные оценки среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых периодических функций пространствами сдвигов.* — Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия **5 (63)**, вып. 1 (2018), 22–31.
3. А. Ю. Улицкая, *Точные оценки среднеквадратичных приближений классов сверток пространствами сдвигов на оси.* — Сиб. мат. ж. **64**, No. 1 (2023), 184–203.
4. A. Kolmogorov, *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse.* — Ann. Math. **37** (1936), 107–110.
5. M. S. Floater, E. Sande, *Optimal spline spaces for L^2 n-width problems with boundary conditions.* — Const. Approx. (2018), 1–18.
6. О. Л. Виноградов, А. Ю. Улицкая, *Оптимальные подпространства для среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых функций на отрезке.* — Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия **7 (65)**, вып. 3 (2020), 404–417.
7. R.-Q. Jia, C. A. Micchelli, *Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: powers of two.* — In: Curves and Surfaces, P.-J. Laurent, A. Le Mehaute, L. L. Schumaker (eds.), New York, Academic Press, 1991, 209–246.
8. A. Ron, *Introduction to shift-invariant spaces. Linear independence.* — In: Multivariate approximation and applications. N. Dyn et.al (eds.), Cambridge, Cambridge University Press, 2001, 112–151.
9. C. de Boor, R. DeVore, A. Ron, *Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$.* — Trans. Amer. Math. Soc. **341**, No. 2 (1994), 787–806.
10. B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Providence, Rhode Island, AMS, 1996.
11. A. Yu. Ulitskaya, *Fourier analysis in spaces of shifts.* — J. Math. Sci. **266**, No. 4 (2022), 603–614.

12. О. Л. Виноградов, *Средняя размерность пространств сдвигов и их подпространств.* — Мат. заметки **116**, No. 5 (2024), 694–706.
13. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
14. M. Skopina, A. Krivoshein, V. Protasov, *Multivariate wavelet frames*, Springer, Singapore, 2016.
15. O. L. Vinogradov, *Average dimension of shift spaces.* — Lobachevskii J. Math. **39**, no. 5 (2018), 717–721.

Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu. Optimal subspaces for mean square approximation of classes of differentiable functions on the half-line.

We obtain sharp inequalities for the best mean square approximation of two classes of functions on the half-line, defined by boundary conditions corresponding to even and odd extension of a function. Optimal subspaces are provided by even and odd parts of the spaces generated by equidistant shifts of a single function. Under certain additional conditions on this function, the sharpness of the inequalities in the sense of average widths is proved.

Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7–9, 199034 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: olvin@math.spbu.ru

E-mail: baguadadao@gmail.com

Поступило 21 сентября 2024 г.