Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 539, 2024 г.

М. В. Бабушкин, М. А. Скопина

ФРЕЙМЫ ВСПЛЕСКОВ НА МНОЖЕСТВЕ M-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ

§1. Введение

Изучаются всплески на множестве M-положительных векторов, введенном в [1], которое ассоциировано с матрицей M и является многомерным аналогом полупрямой в анализе Уолша (ассоциированной с числом M). Следуя идеям анализа Уолша, пространство M-положительных векторов снабжено покоординатным сложением. Известно, что гармонический анализ на этом пространстве аналогичен гармоническому анализу Уолша, в частности, преобразование Фурье таково, что существует класс так называемых тест-функций (у которых компактностный носитель и самой функции, и ее преобразования Фурье). Фреймы всплесков, состоящие из тест-функций, представляют особый интерес, поскольку они могут быть полезны для цифровой обработки сигналов и изображений, что уже было подтверждено использованием некоторых примеров на полупрямой (см. [2]). В статье развит метод построения пар двойственных фреймов всплесков.

§2. Обозначения и предварительные сведения

Как обычно, обозначим через $\mathbb{Z}^d$ целочисленную решётку евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, скалярное произведение в гильбертовом пространстве обозначаем как $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Меру Лебега на $\mathbb{R}^d$ обозначим через μ; $\mathbf{1}_A$ – характеристическая функция множества A.

Пусть M – целочисленная матрица размера $d\times d$ такая, что $m = |\det M| \geqslant 2$. Говорят, что векторы $l, k \in \mathbb{Z}^d$ *сравнимы по модулю* M (обозначение: $l \equiv k \pmod M$), если $l-k = Ms$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}^d$. Множество $D = D(M)$ называется *множеством цифр* матрицы M, если $D = \{s_0, s_1, \dots, s_{m-1}\}$, где $s_0 = \mathbf{0}$ – нулевой вектор, $s_i \in \mathbb{Z}^d$ и $s_i \not\equiv s_j \pmod M$ при $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Пусть M^* – матрица, транспонированная к M, и пусть векторы $s_0^*, s_1^*, \dots, s_{m-1}^*$,

---

Ключевые слова: M-положительные векторы, тест-функция, масштабирующая функция, система всплесков, двойственные фреймы.

Исследования выполнены при поддержке РНФ, грант No. 23-11-00178.

где $s_0^* = \mathbf{0}$, образуют множество D^* цифр матрицы M^*, т.е. $D^* = D(M^*) = \{s_0^*, s_1^*, \dots, s_{m-1}^*\}$.

Далее мы будем рассматривать класс $\mathfrak{M}_d$ матриц растяжения порядка d. Целочисленную матрицу M размера $d \times d$ называют *матрицей растяжения*, если все собственные числа этой матрицы по модулю больше единицы. Для любой матрицы $M \in \mathfrak{M}_d$ справедливо соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|M^{-n}\|^{\delta} < \infty, \quad \forall \delta > 0,$$

(см., например, [3, Приложение A5]).

Пусть $M \in \mathfrak{M}_d$, $D -$ множество цифр матрицы M и пусть $X^+ = X^+(M, D) -$ множество векторов $x \in \mathbb{R}^d$, представимых в виде

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} M^{-j} x_j, \quad x_j \in D, \tag{1}$$

где только конечное число x_j с отрицательными индексами могут быть отличными от нулевого вектора. Обозначим через $X^0 = X^0(M, D)$ множество векторов $x \in X^+$, для которых существует *конечное представление*, т.е представление вида (1), в котором только конечное число x_j отлично от нулевого вектора.

Следуя [4], определим множество M-положительных вектров. Для любой матрицы $M \in \mathfrak{M}_d$ и произвольного множества цифр D этой матрицы положим

$$U^+ = U^+(M, D) := \{u \in \mathbb{R}^d \ : \ u = \sum_{j=1}^{\infty} M^{-j} u_j, \ u_j \in D\}.$$

Множество U^+ компактно, имеет непустую внутренность и удовлетворяет условию самоподобия

$$MU^+ = \bigcup_{s \in D} (U^+ + s) \tag{2}$$

(см., например, [3, §2.8], [5, §6.1], [6, 7]), кроме того, $\mu(U^+)$ всегда является целым числом (о способах вычисления этой меры см. [8]).

Все приводимые далее в этом разделе теоремы и предложения доказаны в работе [4].

Теорема 1. *Для почти всех* $x \in X^+(M, D)$ *представление вида* (1) *единственно. Для каждого* $x \in X^0$ *существует единственное конечное представление.*

Определение 2. M*-положительными векторами, ассоциированными с матрицей* $M \in \mathfrak{M}_d$ *и множеством цифр* D *этой матрицы, будем называть векторы, принадлежащие множеству*

$$X = X(M, D) := (X^+ \setminus \widetilde{X}) \cup X^0,$$

где $\widetilde{X}$ *– множество векторов, для которых бесконечное представление* (1) *не единственное. Для каждого вектора* $x \in X^0$ *мы будем использовать его конечное представление, единственность которого установлена в теореме* 1.

Положим

$$U = U(M, D) := \{u \in X(M, D) \, : \, u = \sum_{j=1}^{\infty} M^{-j} u_j, \; u_j \in D\}.$$

Множество

$$H = H(M, D) := \{u \in X(M, D) \, : \, u = \sum_{j=-\infty}^{0} M^{-j} u_j, \; u_j \in D\}$$

играет роль множества целых неотрицательных чисел.

Множества U^*, H^* и X^* определяются по матрице M^* аналогично множествам U, H и X соответственно. Произвольный вектор $\omega \in X^*$ единственным образом представим в виде

$$\omega = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (M^*)^{-j} \omega_j, \quad \omega_j \in D^*, \tag{3}$$

где $\omega_j = \mathbf{0}$ при всех достаточно больших по модулю отрицательных j.

Для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, имеющего m-ичное разложение

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j m^j, \quad \alpha_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\},$$

по множествам цифр $D = \{s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}\}$ и $D^* = \{s_0^*, s_1^*, \ldots, s_{m-1}^*\}$ определим векторы

$$\gamma_{[\alpha]} := \sum_{j=0}^{\infty} M^j s_{\alpha_j}, \quad \gamma_{[\alpha]}^* := \sum_{j=0}^{\infty} (M^*)^j s_{\alpha_j}^*.$$

Отметим, что $H=\{\gamma_{[\alpha]}\,:\,\alpha\in\mathbb{Z}_+\}$ и $H^*=\{\gamma^*_{[\alpha]}\,:\,\alpha\in\mathbb{Z}_+\}$, и для любых $n\in\mathbb{Z}$ и $k\in\mathbb{Z}_+$ положим

$$U_{n,k}:=M^{-n}(\gamma_{[k]}+U),\quad U^*_{n,k}:=(M^*)^{-n}(\gamma^*_{[k]}+U^*).$$

Определение 3. *Сумма $\oplus$ произвольных векторов $x,y\in X$ определяется равенством*

$$x\oplus y:=\sum_{j=-\infty}^{\infty}M^{-j}(x_j\oplus y_j),$$

где цифры x_j, y_j берутся из разложений вида (1) для x и y соответственно, а $x_j\oplus y_j$ – цифра, сравнимая с x_j+y_j по модулю M.

Предложение 4. *Если $x,y\in X$, то $x\oplus y\in X$.*

Определение 5. *Пусть $x,y,z\in X$. Вектор z является результатом операции $x\ominus y$, если $z\oplus y=x$.*

Определение 6. *Для любых $x\in X$, $\omega\in X^*$ положим*

$$\chi(x,\omega):=\exp\left(2\pi i\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle M^{-1}x_j,\,\omega_{1-j}\rangle\right),\tag{4}$$

где цифры x_j и ω_j берутся из разложений (1) и (3) соответственно.

Отметим, что введённые функции χ являются аналогами характеров для групп Виленкина и обладают следующими очевидными свойствами:

$$\chi(x\oplus y,\omega)=\chi(x,\omega)\cdot\chi(y,\omega),\quad \chi(Mx,\omega)=\chi(x,M^*\omega).\tag{5}$$

Предложение 7. *Если $\omega\in H^*$, $\omega\neq\mathbf{0}$, то*

$$\int\limits_U\chi(x,\omega)\,d\mu(x)=0.\tag{6}$$

Определение 8. *Систему Уолша $\{W_\alpha\}_{\alpha=0}^{\infty}$ на множестве X^* определим по формуле*

$$W_\alpha(x):=\chi(\gamma_{[\alpha]},x),\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+,\ x\in X^*.$$

Полиномом Уолша на X^* будем называть конечную линейную комбинацию функций Уолша. Будем говорить, что полином Уолша

$$w(x)=\sum_{k=0}^{m^n-1}a_kW_k(x),\quad x\in X^*,$$

имеет порядок n.

Теорема 9. *Функции Уолша W_α H^*-периодичны, при $0 \leqslant \alpha \leqslant m^n - 1$ постоянны на каждом из множеств $U_{n,k}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, а система $\{W_\alpha/\sqrt{\mu U^*}\}_{\alpha=0}^\infty$ является ортонормированным базисом в пространстве $L^2(U^*)$.*

Определение 10. *Преобразованием Фурье функции $f \in L^1(X)$ будем называть функцию*

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\mu(U)} \int\limits_X f(x)\overline{\chi(x,\omega)}d\mu(x), \quad \omega \in X^*. \tag{7}$$

Преобразование $f \to \widehat{f}$, заданное на $L^1(X) \cap L^2(X)$ по формуле (7), стандартным образом продолжается на пространство $L^2(X)$. А именно, если $f \in L^2(X)$ и

$$J_l f(\omega) := \frac{1}{\mu(U)} \int\limits_{M^l(U)} f(x)\overline{\chi(x,\omega)}\, d\mu(x), \quad l \in \mathbb{Z}_+,\ \omega \in X^*, \tag{8}$$

то $\widehat{f}$ совпадает с пределом $J_l f$ в $L^2(X^*)$ при $l \to +\infty$.

Имеет место следующий аналог теоремы Планшереля.

Теорема 11. *Если $f \in L^2(X)$, то $\widehat{f} \in L^2(X^*)$ и верно равенство*

$$\frac{1}{\mu(U)} \int\limits_X |f(x)|^2\, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(U^*)} \int\limits_{X^*} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\mu(\omega). \tag{9}$$

Более того, для любых $f, g \in L^2(X)$ имеем

$$\frac{1}{\mu(U)} \int\limits_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(U^*)} \int\limits_{X^*} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\mu(\omega). \tag{10}$$

Определение 12. *Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{S}_n(X)$ обозначим множество функций, заданных на X и постоянных на множествах $U_{n,k}$. Множества $\mathcal{S}_n^{(l)}(X)$ и $\mathcal{S}(X)$ определим равенствами*

$$\mathcal{S}_n^{(l)}(X) := \big\{f \in \mathcal{S}_n(X) \,:\, \operatorname{supp} f \subset M^l(U)\big\} \quad \text{и} \quad \mathcal{S}(X) := \bigcup_{n,l} \mathcal{S}_n^{(l)}(X).$$

Пространство $\mathcal{S}(X)$ является своего рода аналогом класса Шварца, его элементы мы будем называть тест-функциями.

Классы $\mathcal{S}_n(X^*)$, $\mathcal{S}_n^{(l)}(X^*)$ и $\mathcal{S}(X^*)$ определяются аналогично.

Предложение 13. *Множество $\mathcal{S}(X)$ плотно в $L^2(X)$.*

Предложение 14. *Для любой функции $f \in \mathcal{S}(X)$ справедлива формула*

$$f(x) = \frac{1}{\mu(U^*)} \int\limits_{X^*} \widehat{f}(\omega)\chi(x,\omega)\, d\mu(\omega), \quad x \in X.$$

Теорема 15. *Для любых $n, l \in \mathbb{Z}$ имеем*

$$f \in \mathcal{S}_n^{(l)}(X) \iff \widehat{f} \in \mathcal{S}_l^{(n)}(X^*).$$

Предложение 16. *Если $f \in L^2(X)$, $\gamma \in H$, то $\widehat{f(\cdot \oplus \gamma)}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\chi(\gamma,\omega)$.*

§3. Масштабирующие функции

Наша цель – построение систем всплесков, состоящих из тест-функций. Следуя стандартным методам теории всплесков, конструкция будет базироваться на масштабирующих тест-функциях, которые, в свою очередь, базируются на полиномах Уолша.

Определение 17. *Масштабирующей функцией будем называть функцию $\varphi \in L^2(X)$, преобразование Фурье которой удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(M^{*-1}\omega)\widehat{\varphi}(M^{*-1}\omega), \tag{11}$$

где m_0 – полином Уолша, который назовём маской масштабирующего уравнения (11) *(или маской масштабирующей функции φ).*

Далее нам будет удобно использовать следующую форму записи. Для произвольного вектора ω из X^* равенство

$$\omega = \omega_{-m}\omega_{-m+1}\dots\omega_0, \omega_1\omega_2\omega_2\dots$$

означает, что этот вектор представим в виде (3), где $\omega_j \in D^*$ и $\omega_j = \mathbf{0}$ для всех $j < -m$. В частности, каждый вектор $\omega \in U^*$ может быть записан в виде $\omega = \mathbf{0}, \omega_1\omega_2\dots$. В случае, когда $\omega_j = \mathbf{0}$ при всех $j > n$, пишем

$$\omega = \omega_{-m}\omega_{-m+1}\dots\omega_0, \omega_1\omega_2\dots\omega_n.$$

Обозначим через $\mathcal{M}_0^{(n)}$ множество полиномов Уолша порядка n, таких что $m_0(\mathbf{0}) = 1$.

Определение 18. *Для* $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$ *обозначим через* $\sigma_r = \sigma_r(m_0)$ *множество всех векторов*

$$(s_0, s_1, \dots, s_r), \quad s_0 \neq \mathbf{0}, \quad s_j \in D^*,$$

таких, что для каждого $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ *выполнены неравенства*

$$m_0(\mathbf{0}, s_{1-n+l} \dots s_l) \neq 0, \tag{12}$$

где $s_j = \mathbf{0}$ *при* $j < 0$.

Легко видеть, что если $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$ – маска масштабирующей функции φ, то

$$\widehat{\varphi}(\omega) = C \prod_{j=1}^{\infty} m_0(M^{*-j}\omega), \quad C > 0, \tag{13}$$

где, в силу теоремы 9, произведение конечно и $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_{n-1}(X^*)$.

Теорема 19 ([9]). *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$, *где* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $\sigma_r = \varnothing$, *то* m_0 *– маска масштабирующей функции* φ, *где* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_{n-1}^{(r-n+1)}(X^*)$.

Теорема 20 ([9]). *Пусть* $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$ *и* $r = m^{n-1} - 1$, *где* $n \in \mathbb{N}$. *Функция* m_0 *является маской ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем тогда и только тогда, когда* $\sigma_r(m_0) = \varnothing$.

§4. Построение двойственных систем всплесков

Определение 21. *Пусть* $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)} \in L^2(X)$. *Множество функций*

$$\{\psi_{j,k}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu} := \{\psi_{j,k}^{(\nu)} \;:\; 1 \leqslant \nu \leqslant r,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+\},$$

где

$$\psi_{j,k}^{(\nu)}(x) = m^{j/2}\psi^{(\nu)}(M^j x \oplus \gamma_{[k]}), \quad x \in X,$$

назовём системой всплесков, порождённой набором всплеск-функций $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$.

Определение 22. *Пусть* $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}(X)$ *– масштабирующие функции с масками* $m_0, \widetilde{m}_0$ *соответственно, и пусть при* $\nu = 1, \dots, r$, $\omega \in X^*$

$$\widehat{\psi^{(\nu)}}(\omega) = m_\nu(M^{*-1}\omega)\widehat{\varphi}(M^{*-1}\omega),$$

$$\widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}}(\omega) = \widetilde{m}_\nu(M^{*-1}\omega)\widehat{\widetilde{\varphi}}(M^{*-1}\omega),$$

где m_ν, $\widetilde{m}_\nu$ – полиномы Уолша, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\nu=0}^{r} m_\nu(M^{*-1}(\omega+q))\overline{\widetilde{m}_\nu(M^{*-1}(\omega+s))} = \delta_{q,s} \quad \forall\omega\in X^*, \forall q,s\in D(M^*).$$

Пару $\{\psi^{(\nu)}_{j,k}\}_{j,k,\nu}$, $\{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{j,k}\}_{j,k,\nu}$ будем называть двойственными системами всплесков, порождёнными масштабирующими функциями $\varphi, \widetilde{\varphi}$.

Предложение 23 ([9]). *Пусть $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu U}}\mathbf{1}_U$; $\{m_\nu\}_{\nu=1}^{m-1}$ полиномы Уолша, $m_\nu(\omega) = \mathbf{1}_{U^*_{1,\nu}}$ для $\omega\in U^*$, функции $\left\{\theta^{(\nu)}\right\}_{\nu=1}^{m-1}$ определены равенствами*

$$\widehat{\theta^{(\nu)}}(\omega) = m_\nu(M^{*-1}\omega)\widehat{\varphi}(M^{*-1}\omega), \quad \omega\in X^*,\ \nu=1,2,\dots,m-1.$$

Тогда система всплесков $\{\theta^{(\nu)}_{j,k}\}$, порождённая набором $\{\theta^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{m-1}$, образует ортонормированный базис в $L^2(X)$.

Определение 24. *Систему $\{\theta^{(\nu)}_{j,k}\}$ из предложения 23 будем называть базисом Хаара.*

Система функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется *фреймом*, если существуют постоянные $A, B > 0$, такие что

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2 \quad \forall f\in\mathcal{H}.$$

Если же для всех $f\in\mathcal{H}$ выполняется только второе неравенство, то система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой Бесселя. Важное свойство фрейма: любая функция $f\in\mathcal{H}$ может быть разложена в ряд вида

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \widetilde{f}_n\rangle f_n,$$

где $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – двойственный фрейм в $\mathcal{H}$ (см., например, [5, Sec. 1]).

Теорема 25. *Пусть $\{\psi^{(\nu)}_{j,k}\}_{j,k,\nu}$, $\{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{j,k}\}_{j,k,\nu}$ – пара двойственных систем всплесков, порождённых масштабирующими функциями $\varphi, \widetilde{\varphi}\in\mathcal{S}(X)$, $\overline{\widehat{\varphi}(\mathbf{0})}\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\mu(U)}$, системы $\{\psi^{(\nu)}_{j,k}\}_{j,k,\nu}$, $\{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{j,k}\}_{j,k,\nu}$ – бесселевы. Тогда эти системы – двойственные фреймы в $L^2(X)$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Положим для $\omega \in U^*$

$$[f,g](\omega) = \sum_{h\in H^*} f(\omega\oplus h)\overline{g(\omega\oplus h)}.$$

Лемма 26 ([9])**.** *Пусть $f \in L^2(X)$, $\psi \in \mathcal{S}(X)$. Тогда $[\widehat{f},\widehat{\psi}] \in L^2(U^*)$ и для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем*

$$\frac{1}{\mu(U)}\langle f,\psi_{0,k}\rangle = \frac{1}{\mu(U^*)}\int\limits_{U^*}[\widehat{f},\widehat{\psi}](\omega)\overline{W_k(\omega)}\,d\mu(\omega),$$

т.е. произведение $\sqrt{\mu(U^*)}[\mu(U)]^{-1}\langle f,\psi_{0,k}\rangle$ совпадает с k-м коэффициентом Фурье функции $[\widehat{f},\widehat{\psi}]$ по системе $\{W_k/\sqrt{\mu U^*}\}_{k=0}^{\infty}$.

Лемма 27. *Пусть $f \in L^2(X)$, $\psi,\widetilde{\psi} \in \mathcal{S}(X)$. Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\psi}_{j,k}\rangle} = \frac{\mu(U)^2}{\mu(U^*)}m^j\int\limits_{U^*}[\widehat{f}(M^{*j}\cdot),\widehat{\psi}](\omega)\overline{[\widehat{f}(M^{*j}\cdot),\widehat{\widetilde{\psi}}](\omega)}\,d\mu(\omega).$$

Эта лемма следует из равенства Парсеваля, леммы 26, теоремы 9 и тривиальных формул

$$\langle f,\psi_{j,k}\rangle = \langle f_{-j,0},\psi_{0,k}\rangle, \quad \langle f,\widetilde{\psi}_{j,k}\rangle = \langle f_{-j,0},\widetilde{\psi}_{0,k}\rangle.$$

Лемма 28. *Пусть $\nu = 1,\dots,r$, $\{\psi_{j,k}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}^{(\nu)}\}_{j,k,\nu}$ – пара двойственных систем всплесков, порождённых масштабирующими функциями $\varphi,\widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}(X)$. Тогда для любой $f \in L^2(X)$ и любых $j,j' \in \mathbb{Z}$, $j<j'$, имеет место равенство*

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\varphi_{j,k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle} + \sum_{i=j}^{j'-1}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\psi_{i,k}^{(\nu)}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\psi}_{i,k}^{(\nu)}\rangle}\\ = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\varphi_{j',k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\varphi}_{j',k}\rangle}.\end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. Требуется доказать, что для любой функции $f \in L^2(X)$ равенство (14) верно для всех $j,j' \in \mathbb{Z}$, $j<j'$. Легко видеть, что достаточно проверить (14) для $j' = j+1$.

Используя лемму 27 и масштабирующее уравнение для $\varphi,\widetilde{\varphi}$, принимая также во внимание H^*-периодичность функций $m_0,m_1,\dots,m_r$, получаем

$$\frac{\mu(U^*)}{m^j\mu(U)^2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\varphi_{j,k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle}+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\psi^{(\nu)}_{j,k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{j,k}\rangle}\right)$$

$$=\int_{U^*}[\widehat{f}(M^{*j}\cdot),\widehat{\varphi}](\omega)\overline{[\widehat{f}(M^{*j}\cdot),\widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)}\,d\mu(\omega)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\int_{U^*}[\widehat{f}(M^{*j}\cdot),\widehat{\psi^{(\nu)}}](\omega)\overline{[\widehat{f}(M^{*j}\cdot),\widehat{\widetilde{\psi}^{(\nu)}}](\omega)}\,d\mu(\omega)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r}\int_{U^*}\sum_{k\in H^*}\widehat{f}\left(M^{*j}(\omega+k)\right)\overline{m_\nu\left(M^{*-1}(\omega+k)\right)\widehat{\varphi}\left(M^{*-1}(\omega+k)\right)}$$

$$\times\overline{\sum_{l\in H^*}\widehat{f}\left(M^{*j}(\omega+l)\right)\overline{\widetilde{m}_\nu\left(M^{*-1}(\omega+l)\right)\widehat{\widetilde{\varphi}}\left(M^{*-1}(\omega+l)\right)}}\,d\mu(\omega)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{r}\int_{U^*}\left(\sum_{q\in D(M^*)}[\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot),\widehat{\varphi}](M^{*-1}(\omega+q))\overline{m_\nu\left(M^{*-1}(\omega+q)\right)}\right)$$

$$\times\overline{\left(\sum_{s\in D(M^*)}[\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot),\widehat{\widetilde{\varphi}}](M^{*-1}(\omega+s))\overline{\widetilde{m}_\nu\left(M^{*-1}(\omega+s)\right)}\right)}\,d\mu(\omega).$$

Поскольку

$$\sum_{\nu=0}^{r}m_\nu\left(M^{*-1}(\omega+q)\right)\overline{\widetilde{m}_\nu\left(M^{*-1}(\omega+s)\right)}=\delta_{q,s},\quad q,s\in D(M^*),$$

для всех $\omega\in X^*$, то полученное выражение сводится к следующему:

$$\int_{U^*}\sum_{q\in D(M^*)}[\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot),\widehat{\varphi}](M^{*-1}(\omega+q))\overline{[\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot),\widehat{\widetilde{\varphi}}](M^{*-1}(\omega+q))}\,d\mu(\omega).$$

Используя равенство $U^*=\cup_{q\in D(M^*)}M^{*-1}(U^*+q)$, находим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\varphi_{j,k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle}+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\langle f,\psi^{(\nu)}_{j,k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{j,k}\rangle}=\frac{\mu(U)^2}{\mu(U^*)}m^{j+1}$$

$$\times\sum_{q\in D(M^*)}\int_{M^{*-1}(U^*+q)}[\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot),\widehat{\varphi}](\omega)\overline{[\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot),\widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)}\,d\mu(\omega)$$

$$= \frac{\mu(U)^2}{\mu(U^*)} m^{j+1} \int\limits_{U^*} [\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot), \widehat{\varphi}](\omega) \overline{[\widehat{f}(M^{*(j+1)}\cdot), \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)}\, d\mu(\omega).$$

Для завершения доказательства формулы (14) при $j' = j+1$ остаётся воспользоваться леммой 27 ещё раз. □

Лемма 29. *Если $f \in L^2(X)$, $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{S}(X)$, то*

$$\lim_{j\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle} = \mu(U)\overline{\widehat{\varphi}(\mathbf{0})}\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0})\, \|f\|_2^2\,. \tag{15}$$

Доказательство. По лемме 27 имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle} = m^j \frac{\mu(U)^2}{\mu(U^*)} \int\limits_{U^*} [\widehat{f}(M^{*j}\cdot), \widehat{\varphi}](\omega) \overline{[\widehat{f}(M^{*j}\cdot), \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)}\, d\mu(\omega). \tag{16}$$

Если $\omega \in U^*$, $h', \widetilde{h} \in H^*$ и $h' \oplus \widetilde{h} = \mathbf{0}$, то

$$\begin{aligned}
[\widehat{f}(M^{*j}\cdot), \widehat{\varphi}](\omega) &= \sum_{h\in H^*} \widehat{f}(M^{*j}(\omega+h))\overline{\widehat{\varphi}(\omega+h)} \\
&= \sum_{h\in H^*} \widehat{f}(M^{*j}(\omega\oplus h'\oplus\widetilde{h}\oplus h)\overline{\widehat{\varphi}(\omega\oplus h'\oplus\widetilde{h}\oplus h)} \\
&= \sum_{h\in H^*} \widehat{f}(M^{*j}((\omega+h')\oplus h)\overline{\widehat{\varphi}((\omega+h')\oplus h)},
\end{aligned}$$

и такое же соотношение верно для второго множителя под интегралом. Значит,

$$\begin{aligned}
I &:= \int\limits_{U^*} [\widehat{f}(M^{*j}\cdot), \widehat{\varphi}](\omega) \overline{[\widehat{f}(M^{*j}\cdot), \widehat{\widetilde{\varphi}}](\omega)}\, d\mu(\omega) \\
&= \int\limits_{U^*} [\widehat{f}(M^{*j}\cdot), \widehat{\varphi}](\omega) \sum_{h'\in H^*} \overline{\widehat{f}(M^{*j}(\omega+h'))\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega+h')}}\, d\mu(\omega) \\
&= \sum_{h'\in H^*} \int\limits_{U^*} \overline{\widehat{f}(M^{*j}(\omega+h'))\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega+h')}} \\
&\times \sum_{h\in H^*} \widehat{f}(M^{*j}((\omega+h')\oplus h)\overline{\widehat{\varphi}((\omega+h')\oplus h)}\, d\mu(\omega)
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{X^*} \overline{\widehat{f}(M^{*j}\omega)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega)}} \sum_{h\in H^*} \widehat{f}(M^{*j}(\omega\oplus h))\overline{\widehat{\varphi}(\omega\oplus h)}\, d\mu(\omega)$$

$$= m^{-j} \int\limits_{X^*} \overline{\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(M^{*-j}\omega)}} \sum_{h\in H^*} \widehat{f}(\omega\oplus M^{*j}h)\overline{\widehat{\varphi}(M^{*-j}\omega\oplus h)}\, d\mu(\omega).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $f \in \mathcal{S}(X)$. Очевидно, найдётся такое число j_0, что если $j \geqslant j_0$, то при всех $h \in H^* \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\omega \in X^*$

$$\widehat{f}(\omega)\widehat{f}(\omega\oplus M^{*j}h) = 0.$$

Тогда для каждого $j \geqslant j_0$, имеем

$$I = m^{-j} \int\limits_{X^*} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}(\omega)}\overline{\widehat{\varphi}(M^{*-j}\omega)}\widehat{\widetilde{\varphi}}(M^{*-j}\omega)\, d\mu(\omega).$$

Сопоставляя с (16), получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f,\varphi_{j,k}\rangle\overline{\langle f,\widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle} = \frac{\mu^2(U)}{\mu(U^*)} \int\limits_{X^*} |\widehat{f}(\omega)|^2\overline{\widehat{\varphi}(M^{*-j}\omega)}\widehat{\widetilde{\varphi}}(M^{*-j}\omega)\, d\mu(\omega), \quad (17)$$

при всех $j \geqslant j_0$. Поскольку для каждого $\omega \in X^*$

$$\lim_{j\to+\infty} \overline{\widehat{\varphi}(M^{*-j}\omega)}\widehat{\widetilde{\varphi}}(M^{*-j}\omega) = \overline{\widehat{\varphi}(\mathbf{0})}\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0}),$$

то по теореме Лебега и теореме 11 равенство (15) следует из (17) в пределе при $j \to +\infty$.

Пусть теперь f – произвольная функция из $L^2(X)$. В силу предложения 13, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся функция $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(X)$, такая что $\|f - f_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. По лемме 24 из работы [9] для любой функции $F \in L^2(X)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle F,\varphi_{j,k}\rangle|^2 \leqslant C_\varphi \|F\|_2^2, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle F,\widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle|^2 \leqslant C_{\widetilde{\varphi}} \|F\|_2^2.$$

Так как (15) доказано для функции f_ε, то используя эти неравенства, неравенство Коши, а также неравенство треугольника, получаем (15) для $f \in L^2(X)$. □

Лемма 30 ([9])**.** *Если $f \in L^2(X)$ и $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, то*

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f,\varphi_{j,k}\rangle|^2 = 0. \quad (18)$$

Лемма 31. *Пусть $\theta, \psi \in \mathcal{S}(X)$ и $\widehat{\theta}(\mathbf{0}) = \widehat{\psi}(\mathbf{0}) = 0$. Тогда*

$$\langle \theta_{r,0}, \psi_{0,k} \rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad (r,k) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+) \setminus \Omega, \tag{19}$$

где Ω – некоторое конечное множество, $\Omega \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Выберем $\sigma \in \mathbb{N}$, такое что $\widehat{\psi}(\omega) = 0$ для всех $\omega \in M^{*-\sigma}U^*$. Применяя теорему 11, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(U)} \langle \theta_{r,0}, \psi_{0,k} \rangle &= \frac{1}{\mu(U^*)} \langle \widehat{\theta_{r,0}}, \widehat{\psi_{0,k}} \rangle = \frac{1}{\mu(U^*)} \langle \widehat{\theta_{r,0}}, \widehat{\psi} \chi(\gamma_{[k]}, \cdot) \rangle \\ &= \frac{m^{-r/2}}{\mu(U^*)} \int\limits_{\operatorname{supp} \widehat{\psi} \setminus M^{*-\sigma}U^*} \widehat{\theta}(M^{*-r}\omega) \overline{\widehat{\psi}(\omega) \chi(\gamma_{[k]}, \omega)}\, d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Так как функция $\widehat{\theta}$ имеет компактный носитель, то существует целое отрицательное число r_1, такое что при всех $\omega \notin M^{*-\sigma}U^*$ и всех $r < r_1$ будет $\widehat{\theta}(M^{*-r}\omega) = 0$. Так как $\widehat{\theta}$ – ступенчатая функция и $\widehat{\theta}(\mathbf{0}) = 0$, то существует $r_2 \in \mathbb{N}$, такое что при всех $\omega \in \operatorname{supp} \widehat{\psi}$ и всех $r > r_2$ будет $\widehat{\theta}(M^{*-r}\omega) = 0$. Таким образом, если $r \in \mathbb{Z} \setminus [r_1, r_2]$, то

$$\langle \theta_{r,0}, \psi_{0,k} \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Для каждого целого $r \in [r_1, r_2]$ мы имеем

$$\langle \theta_{r,0}, \psi_{0,k} \rangle = m^{r/2} \int\limits_{\operatorname{supp} \theta(M^r \cdot)} \theta(M^r x) \overline{\psi(x \oplus \gamma_{[k]})}\, d\mu(x).$$

Для фиксированного r найдётся такое число $k_r \in \mathbb{Z}_+$, что $x \oplus \gamma_{[k]} \notin \operatorname{supp} \psi$ для всех $x \in \operatorname{supp} \theta(M^r \cdot)$ и $k > k_r$. Отсюда видно, что условие (19) выполняется для множества

$$\Omega := \{(r,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ \colon r \in [r_1, r_2],\, k \leqslant k_r\}. \quad \square$$

Теорема 32. *Пусть $\psi \in \mathcal{S}(X)$ и $\widehat{\psi}(\mathbf{0}) = 0$. Тогда семейство $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+}$ является системой Бесселя в пространстве $L^2(X)$.*

Доказательство. При $\nu = 1, \dots, m-1$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in X$ положим

$$\theta^{(\nu)}_{j,k}(x) := m^{j/2} \theta^{(\nu)}(M^j x \oplus \gamma_{[k]}),$$

где $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(m-1)}$ – всплеск-функции Хаара в $L^2(X)$ (эти функции определяются по общей схеме из [10]). Для любой функции $f \in L^2(X)$

и любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $K_\varepsilon \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$\Big\| f - \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{(j,k)\in K_\varepsilon} \langle f, \theta_{j,k}^{(\nu)} \rangle \theta_{j,k}^{(\nu)} \Big\|_2 \leqslant \varepsilon \|f\|_2. \tag{20}$$

По хорошо известному обобщению неравенства Гёльдера (см. [11, теорема 161]) имеем

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z},\\ l\in\mathbb{Z}_+}} |\langle f, \psi_{i,l}\rangle|^2 = \sup\Big\{ \Big| \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z},\\ l\in\mathbb{Z}_+}} \alpha_{i,l} \langle f, \psi_{i,l}\rangle \Big|^2 : \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z},\\ l\in\mathbb{Z}_+}} |\alpha_{i,l}|^2 \leqslant 1 \Big\}. \tag{21}$$

Возьмём последовательность $\{\alpha_{i,l}\}$ такую, что $\sum\limits_{(i,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}|^2 \leqslant 1$. Согласно (20), для каждой пары $(i,l) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ можно подобрать конечное множество $K_{i,l}$ такое, что

$$|\Delta(f, K_{i,l})| \leqslant |a_{i,l}| \, \|f\|_2 \,,$$

где

$$\Delta(f, K_{i,l}) := \Big\langle f - \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{(j,k)\in K_{i,l}} \langle f, \theta_{j,k}^{(\nu)} \rangle \theta_{j,k}^{(\nu)}, \psi_{i,l} \Big\rangle .$$

По неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{(i,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} \alpha_{i,l} \langle f, \psi_{i,l}\rangle \Big| \\ &\quad \leqslant \sum_{(i,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}| \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{(j,k)\in K_{i,l}} |\langle f, \theta_{j,k}^{(\nu)} \rangle \langle \theta_{j,k}^{(\nu)}, \psi_{i,l}\rangle| + |\Delta(f, K_{i,l})| \right) \\ &\quad \leqslant \sum_{(i,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}| \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{(j,k)\in K_{i,l}} |\langle f, \theta_{j,k}^{(\nu)} \rangle \langle \theta_{j,k}^{(\nu)}, \psi_{i,l}\rangle| \right) + \|f\|_2 \,. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что для доказательства теоремы достаточно получить оценку вида

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}| c_{i,l} \leqslant A \, \|f\|_2 \,, \tag{22}$$

где $A \in \mathbb{R}$, $c_{i,l} = c'_{i,l} + c''_{i,l}$,

$$c'_{i,l} := \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},\\ k\in\mathbb{Z}_+, j\leqslant i}} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{j,k}\rangle \langle \theta^{(\nu)}_{j,k}, \psi_{i,l}\rangle|,$$

$$c''_{i,l} := \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z},\\ k\in\mathbb{Z}_+, j> i}} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{j,k}\rangle \langle \theta^{(\nu)}_{j,k}, \psi_{i,l}\rangle|.$$

Пусть $u, v \in L^2(X)$, $j \leqslant i$. Тогда

$$\langle u_{j,k}, v_{i,l}\rangle = m^{(j+i)/2} \int\limits_X u(M^j x \oplus \gamma_{[k]})\overline{v(M^i x \oplus \gamma_{[l]})}\, d\mu(x)$$

$$= m^{(j-i)/2} \sum_{h\in H} \int\limits_U u(M^{j-i}(x+h) \oplus \gamma_{[k]})\overline{v((x+h) \oplus \gamma_{[l]})}\, d\mu(x)$$

$$= m^{(j-i)/2} \sum_{h\in H} \int\limits_U u(M^{j-i}(x \oplus h) \oplus \gamma_{[k]}))\overline{v(x \oplus h \oplus \gamma_{[l]})}\, d\mu(x)$$

$$= m^{(j-i)/2} \sum_{h\in H} \int\limits_U u\left(M^{j-i}(x \oplus h \oplus M^{i-j}\gamma_{[k]})\right)\overline{v(x \oplus h \oplus \gamma_{[l]})}\, d\mu(x).$$

Взяв выражение $x \oplus h \oplus M^{i-j}\gamma_{[k]}$ за новую переменную, получаем

$$\langle u_{j,k}, v_{i,l}\rangle = m^{(j-i)/2} \int\limits_X u(M^{j-i}x)\overline{v(x \oplus \gamma_{[l]} \ominus M^{i-j}\gamma_{[k]})}\, d\mu(x),$$

то есть

$$\langle u_{j,k}, v_{i,l}\rangle = \langle u_{r(j,i),0}, v_{0,s(l,r(j,i),k)}\rangle, \tag{23}$$

где $r(j,i) = j - i$, величина $s = s(l, r, k)$ определяется равенством $\gamma_{[s]} = \gamma_{[l]} \ominus M^{-r}\gamma_{[k]}$.

Положим в формуле (23) $u = \theta^{(\nu)}$, $v = \psi$. Тогда

$$\langle \theta^{(\nu)}_{j,k}, \psi_{i,l}\rangle = \langle \theta^{(\nu)}_{r(j,i),0}, \psi_{0,s(l,r(j,i),k)}\rangle.$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
c'_{i,l} &= \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}_+,j\leqslant i} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{j,k}\rangle\langle\theta^{(\nu)}_{r(j,i),0},\psi_{0,s(l,r(j,i),k)}\rangle| \\
&= \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r=-\infty}^{0} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k}\rangle\langle\theta^{(\nu)}_{r,0},\psi_{0,s(l,r,k)}\rangle|.
\end{aligned}
$$

По лемме 31 найдутся такие конечные множества $\rho\subset\mathbb{Z}$ и $\sigma\subset\mathbb{Z}_+$, что $\langle\theta^{(\nu)}_{r,0},\psi_{0,s}\rangle=0$ при $(r,s)\notin\rho\times\sigma$. Тогда

$$
\begin{aligned}
c'_{i,l} &= \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in\rho,r\leqslant 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+,s(l,r,k)\in\sigma} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k}\rangle\langle\theta^{(\nu)}_{r,0},\psi_{0,s(l,r,k)}\rangle| \\
&\leqslant L\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in\rho,r\leqslant 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+,s(l,r,k)\in\sigma} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k}\rangle|,
\end{aligned}
$$

где $L=\max\limits_{r\in\rho,s\in\sigma}|\langle\theta^{(\nu)}_{r,0},\psi_{0,s}\rangle|$.

Из формулы $\gamma_{[s]}=\gamma_{[l]}\ominus M^{-r}\gamma_{[k]}$ следует, что $\gamma_{[k]}=M^r(\gamma_{[l]}\ominus\gamma_{[s]})$. Последняя формула определяет функцию $k=k(r,l,s)$. Если $M^r(\gamma_{[l]}\ominus\gamma_{[s]})\notin H$ при каких-то значениях r,l,s, то полагаем $\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k(r,l,s)}\rangle=0$. Поскольку при фиксированных l и r отображение $k\mapsto s(l,r,k)$ инъективно, то для внутренней суммы справедлива оценка

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}_+,s(l,r,k)\in\sigma} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k}\rangle| \leqslant \sum_{s\in\sigma}|\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k(r,l,s)}\rangle|.
$$

Имеем

$$
c'_{i,l}\leqslant L\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{r\in\rho,s\in\sigma}|\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k(r,l,s)}\rangle|.
$$

Следовательно,

$$
\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+}|\alpha_{i,l}|c'_{i,l}\leqslant L\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{r\in\rho,s\in\sigma}\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+}|\alpha_{i,l}||\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k(r,l,s)}\rangle|.
$$

Применяя к внутренней сумме неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}||\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k(r,l,s)}\rangle| \leqslant \left(\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}|^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k(r,l,s)}\rangle|^2\right)^{1/2}.$$

Для фиксированных r и s отображение $l\mapsto k(r,l,s)$ инъективно. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k(r,l,s)}\rangle|^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i+r,k}\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2\,.$$

Кроме того, $\sum|\alpha_{i,l}|^2\leqslant 1$. Следовательно,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}|c'_{i,l} \leqslant L\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{r\in\rho,s\in\sigma}\|f\|_2 = A'\,\|f\|_2\,,\quad A'\in\mathbb{R}.$$

Пусть теперь $j>i$. Положим в формуле (23) $j=i$, $i=j$, $l=k$, $k=l$, $u=\psi$, $v=\theta^{(\nu)}$. Тогда

$$\langle\psi_{i,l},\theta^{(\nu)}_{j,k}\rangle = \langle\psi_{r(i,j),0},\theta^{(\nu)}_{0,s(k,r(i,j),l)}\rangle.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} c''_{i,l} &= \sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}_+,j>i} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{j,k}\rangle\overline{\langle\psi_{r(i,j),0},\theta^{(\nu)}_{0,s(k,r(i,j),l)}\rangle}| \\ &= \sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{r=-\infty}^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f,\theta^{(\nu)}_{i-r,k}\rangle\langle\psi_{r,0},\theta^{(\nu)}_{0,s(k,r,l)}\rangle| \end{aligned}$$

По лемме 31 найдутся такие конечные множества $\rho\subset\mathbb{Z}$ и $\sigma\subset\mathbb{Z}_+$, что $\langle\psi_{r,0},\theta^{(\nu)}_{0,s}\rangle=0$ при $(r,s)\notin\rho\times\sigma$. Тогда

$$
\begin{aligned}
c''_{i,l} &= \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in\rho, r<0} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+, s(k,r,l)\in\sigma} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k}\rangle \langle \psi_{r,0}, \theta^{(\nu)}_{0,s(k,r,l)}\rangle| \\
&\leqslant L \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in\rho, r<0} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+, s(k,r,l)\in\sigma} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k}\rangle|,
\end{aligned}
$$

где $L = \max\limits_{r\in\rho, s\in\sigma} |\langle \psi_{r,0}, \theta^{(\nu)}_{0,s}\rangle|$.

Из формулы $\gamma_{[s]} = \gamma_{[k]} \ominus M^{-r}\gamma_{[l]}$ следует, что $\gamma_{[k]} = (M^{-r}\gamma_{[l]}) \oplus \gamma_{[s]}$. Последняя формула определяет функцию $k = k(r,l,s)$. Поскольку при фиксированных l и r отображение $k \mapsto s(k,r,l)$ инъективно, то для внутренней суммы справедлива оценка

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}_+, s(k,r,l)\in\sigma} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k}\rangle| \leqslant \sum_{s\in\sigma} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k(r,l,s)}\rangle|.
$$

Имеем

$$
c''_{i,l} \leqslant L \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in\rho, r<0} \sum_{s\in\sigma} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k(r,l,s)}\rangle|.
$$

Следовательно,

$$
\sum_{i\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}| c''_{i,l} \leqslant L \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in\rho, r<0, s\in\sigma} \sum_{i\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}| |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k(r,l,s)}\rangle|.
$$

Применяя к внутренней сумме неравенство Коши–Буняковского, находим

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}| |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k(r,l,s)}\rangle| &\leqslant \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}_+} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k(r,l,s)}\rangle|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Для фиксированных r и s отображение $l \mapsto k(r,l,s)$ инъективно. Тогда справедлива оценка

$$
\sum_{i\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}_+} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k(r,l,s)}\rangle|^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f, \theta^{(\nu)}_{i-r,k}\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2 .
$$

Кроме того, $\sum |\alpha_{i,l}|^2 \leqslant 1$. Следовательно,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{Z}_+} |\alpha_{i,l}| c''_{i,l} \leqslant L \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in\rho,r<0,s\in\sigma} \|f\|_2 = A'' \|f\|_2 \,, \quad A'' \in \mathbb{R}.$$

Тем самым, неравенство (22) установлено при $A = A' + A''$. □

Доказательство теоремы 25. Пусть $f \in L^2(X)$. Из неравенства Коши–Буняковского и леммы 30 следует, что

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{j,k}\rangle} = 0.$$

Тогда, переходя к пределу при $j \to -\infty$ в равенстве (14), имеем

$$\sum_{i=-\infty}^{j'-1} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\psi}_{i,k}^{(\nu)}\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j',k}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\varphi}_{j',k}\rangle}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $j' \to +\infty$, принимая во внимание лемму 29 и условие $\overline{\widehat{\varphi}(\mathbf{0})}\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\mu(U)}$, получаем

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)}\rangle \overline{\langle f, \widetilde{\psi}_{i,k}^{(\nu)}\rangle} = \|f\|_2^2 \,.$$

Остаётся применить лемму 6.3.4 из [12]. □

§5. Примеры

Положим

$$Y_k(x) = \chi(x, \gamma_{[k]}^*).$$

Заметим, что по определению функции χ

$$Y_k(x) = \chi(x, \gamma_{[k]}^*) = \exp\left(2\pi i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle M^{-1}x_j, (\gamma_{[k]}^*)_{1-j}\rangle\right)$$

$$= \exp\left(2\pi i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle x_j, M^{*-1}(\gamma_{[k]}^*)_{1-j}\rangle\right) = \exp\left(2\pi i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle x_{1-j}, M^{*-1}(\gamma_{[k]}^*)_j\rangle\right)$$

$$= \exp\left(2\pi i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle M^{*-1}(\gamma_{[k]}^*)_j, x_{1-j}\rangle\right).$$

Из последней формулы и определения функций Уолша следует, что $\{Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ – система Уолша на множестве X.

Лемма 33. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in X$. Тогда*

$$(\mathbf{1}_{U^*_{n,k}})^{\vee}(x) = \frac{1}{m^n}\mathbf{1}_U(M^{-n}x)Y_k(M^{-n}x).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $n = k = 0$. По теореме 15 будет $(\mathbf{1}_{U^*})^{\vee} \in S_0^{(0)}(X)$. В силу предложения 14

$$(\mathbf{1}_{U^*})^{\vee}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\mu U^*}\int_{X^*}\mathbf{1}_{U^*}(\omega)\chi(\mathbf{0},\omega)\,d\mu(\omega) = 1,$$

поэтому

$$(\mathbf{1}_{U^*})^{\vee} = \mathbf{1}_U. \tag{24}$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_{U^*_{n,k}})^{\vee}(x) &= \frac{1}{\mu U^*}\int_{X^*}\mathbf{1}_{U^*_{n,k}}(\omega)\chi(x,\omega)\,d\mu(\omega)\\ &= \frac{1}{\mu U^*}\int_{M^{*-n}(U^*+\gamma^*_{[k]})}\chi(x,\omega)\,d\mu(\omega)\\ &= \frac{1}{m^n\mu U^*}\int_{U^*}\chi(x, M^{*-n}(\omega+\gamma^*_{[k]}))\,d\mu(\omega)\end{aligned}$$

Используя равенства (5), находим

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_{U^*_{n,k}})^{\vee}(x) &= \frac{1}{m^n\mu U^*}\int_{U^*}\chi(M^{-n}x,\omega)\,d\mu(\omega)\cdot\chi(M^{-n}x,\gamma^*_{[k]})\\ &= \frac{1}{m^n}(\mathbf{1}_{U^*})^{\vee}(M^{-n}x)Y_k(M^{-n}x).\end{aligned}$$

Остаётся воспользоваться формулой (24). □

Лемма 34. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n+1)}$, m_0 – маска масштабирующей функции φ, $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, $r = m^n - 1$. Тогда для $\omega \in X^*$*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(\mathbf{0})\sum_{k=0}^{m^r-1}\mathbf{1}_{U^*_{n,k}}(\omega)\prod_{j=1}^{r}m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[k]}).$$

Доказательство. В силу теорем 19 и 20 будет $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_n^{(r-n)}(X^*)$. Это значит, что функция $\widehat{\varphi}$ имеет вид

$$\widehat{\varphi} = \sum_{k=0}^{m^r-1}d_k\mathbf{1}_{U^*_{n,k}},$$

где $d_k \in \mathbb{C}$. Ясно, что $d_k = \widehat{\varphi}(M^{*-n}\gamma^*_{[k]})$. По формуле (13) имеем

$$d_k = \widehat{\varphi}(\mathbf{0}) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[k]}).$$

Так как вектор $\gamma^*_{[k]}$ имеет не более r знаков, а полином Уолша m_0 зависит только от $n+1$ знака после запятой, то при $j \geqslant r+1$ будет

$$m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[k]}) = m_0(\mathbf{0}) = 1.$$

Значит,

$$d_k = \widehat{\varphi}(\mathbf{0}) \prod_{j=1}^{r} m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[k]}),$$

что и требовалось. □

Теорема 35. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n+1)}$, m_0 – маска масштабирующей функции φ, $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, $r = m^n - 1$. Тогда*

$$\varphi(x) = \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{0})}{m^n} \mathbf{1}_U(M^{-n}x) \sum_{k=0}^{m^r-1} Y_k(M^{-n}x) \prod_{j=1}^{r} m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[k]}).$$

Доказательство. В силу леммы 34

$$\varphi(x) = \widehat{\varphi}^{\vee}(x) = \widehat{\varphi}(\mathbf{0}) \sum_{k=0}^{m^r-1} (\mathbf{1}_{U^*_{n,k}})^{\vee}(x) \prod_{j=1}^{r} m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[k]}).$$

Остаётся применить лемму 33. □

Теорема 36. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r = m^n - 1$, $m_\nu \in \mathcal{M}_0^{(n+1)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, r$; m_0 – маска масштабирующей функции φ, $\{m_\nu\}_{\nu=1}^{r}$ – маски всплеск-функций $\left\{\psi^{(\nu)}\right\}_{\nu=1}^{r}$; $\varphi, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)} \in \mathcal{S}(X)$. Тогда для $\nu = 1, 2, \ldots, r$*

$$\psi^{(\nu)}(x) = \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{0})}{m^n} \mathbf{1}_U(M^{-n}x) \sum_{k=0}^{m^{r+1}-1} Y_k(M^{-n}x) m_\nu(M^{*-(n+1)}\gamma^*_{[k]}) c_{\lfloor k/m \rfloor},$$

где

$$c_l = \prod_{j=1}^{r} m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[l]}).$$

Доказательство. По определению всплеск-функций

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\omega) = m_\nu(M^{*-1}\omega)\widehat{\varphi}(M^{*-1}\omega). \tag{25}$$

Так как $m_\nu \in \mathcal{S}_{n+1}(X^*)$, а в силу теорем 19 и 20 будет $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_n^{(r-n)}(X^*)$, то $\widehat{\psi}^{(\nu)} \in \mathcal{S}_n^{(r+1-n)}(X^*)$. То есть

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\omega) = \sum_{k=0}^{m^{r+1}-1} d_k \mathbf{1}_{U^*_{n,k}}(\omega).$$

Используя формулу (25), имеем

$$d_k = \widehat{\psi}^{(\nu)}(M^{*-n}\gamma^*_{[k]}) = m_\nu(M^{*-(n+1)}\gamma^*_{[k]})\widehat{\varphi}(M^{*-(n+1)}\gamma^*_{[k]}).$$

Так как $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_n(X^*)$, то

$$\widehat{\varphi}(M^{*-(n+1)}\gamma^*_{[k]}) = \widehat{\varphi}(M^{*-n}\gamma^*_{[l]}),$$

где $l = \lfloor k/m \rfloor$. Тогда по лемме 34

$$d_k = m_\nu(M^{*-(n+1)}\gamma^*_{[k]})\widehat{\varphi}(\mathbf{0})\prod_{j=1}^{r} m_0(M^{*-(j+n)}\gamma^*_{[l]}).$$

Остаётся применить лемму 33. □

Для данной матрицы M и множества D цифр двойственные системы всплесков $\{\psi^{(\nu)}_{j,k}\}$, $\{\widetilde{\psi}^{(\nu)}_{j,k}\}$ определяются наборами масок $\{m_\nu\}_{\nu=0}^r$, $\{\widetilde{m}_\nu\}_{\nu=0}^r$. Маски ищутся в виде полиномов Уолша порядка $n+1$, то есть в виде H^*-периодических и постоянных на множествах $U^*_{n+1,k}$ функций. Тогда для определения каждой из масок, достаточно задать m^{n+1} значений в точках

$$\mathbf{0}, \omega_1 \dots \omega_{n+1}, \quad \omega_k \in \{s_0^*, \dots, s_{m-1}^*\}, \quad k = 1 \dots n+1.$$

Алгоритм

Исходные данные: матрица M, $M \in \mathfrak{M}$, $m = |\det M|$; множества цифр D и D^*, $D^* = \{s_0^*, \dots, s_{m-1}^*\}$, $s_0^* = \mathbf{0}$; число n, $n \geqslant 1$, где $n+1$ – порядок масок.

(1) Полагаем $r = m^n - 1$. Ищем такие маски m_0 и $\widetilde{m}_0$, что $\sigma_r(m_0) = \sigma_r(\widetilde{m}_0) = \varnothing$ и $m_0(\mathbf{0}) = \widetilde{m}_0(\mathbf{0}) = 1$. Удобно условие $\sigma_r(m_0) = \varnothing$ переписать в виде

$$\forall \omega \in \{(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r) \mid \omega_0 \neq s_0^*, \omega_j \in D^*\}$$
$$\exists l \in [0:r] \quad m_0(0, \omega_{l-n} \dots \omega_l) = 0,$$

где $\omega_j = \mathbf{0}$ при $j < 0$. Маски m_0 и $\widetilde{m}_0$ определяются не единственным образом.

(2) Полагаем

$$m_\nu(\mathbf{0}) = \widetilde{m}_\nu(\mathbf{0}) = 0, \quad \nu \in [1:r].$$

(3) Зададим матрицы

$$A(\omega) = \{m_\nu(M^{*-1}(\omega + s_j^*))\}_{j,\nu}, \quad \widetilde{A}(\omega) = \{\widetilde{m}_\nu(M^{*-1}(\omega + s_j^*))\}_{j,\nu},$$

где $j \in [0:m-1], \nu \in [0:r]$.

Определяем маски $\{m_\nu\}$ и $\{\widetilde{m}_\nu\}$ так, чтобы выполнялось условие

$$A(\omega)\widetilde{A}(\omega)^* = I_m, \quad \forall \omega \in \{\omega_0, \omega_1 \ldots \omega_n \mid \omega_j \in D^*\},$$

где I_m – единичная матрица порядка m. Требуемые маски определяются не единственным образом.

(4) Выбираем значения $\widehat{\varphi}(\mathbf{0})$ и $\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0})$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{\widehat{\varphi}(\mathbf{0})}\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\mu(U)}.$$

(5) Пользуемся теоремами 35 и 36 для получения явных формул масштабирующей функции и всплеск-функций.

Шаг 1 по теореме 20 сделает соответствующие масштабирующие функции φ и $\widetilde{\varphi}$ тест-функциями. Шаг 2 по теореме 32 сделает системы $\{\psi_{j,k}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}^{(\nu)}\}$ бесселевыми. Шаги 3 и 4 по теореме 25 сделают системы $\{\psi_{j,k}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}^{(\nu)}\}$ двойственными фреймами в $L^2(X)$.

Пример 1. Пусть $|\det M| = 2$. По приведённому алгоритму можно получить, например, следующие маски порядка 2.

x	$s_0^*s_0^*$	$s_0^*s_1^*$	$s_1^*s_0^*$	$s_1^*s_1^*$
$m_0(\mathbf{0},x)$	1	2	0	0
$m_1(\mathbf{0},x)$	0	0	2	2
$\widetilde{m}_0(\mathbf{0},x)$	1	$\frac{1}{2}$	0	0
$\widetilde{m}_1(\mathbf{0},x)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Положим $\widehat{\varphi}(\mathbf{0}) = 1$, $\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0}) = 1/\mu U$. По теореме 35 (поскольку $n = 1$, $m = 2$, $r = 1$)

$$\varphi(x) = \mathbf{1}_U(M^{-1}x)\left(\frac{1}{2} + Y_1(M^{-1}x)\right),$$

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{1}{2\mu U}\mathbf{1}_U(M^{-1}x)\left(1 + \frac{1}{2}Y_1(M^{-1}x)\right).$$

По теореме 36

$$\psi^{(1)}(x) = 2 \cdot \mathbf{1}_U(M^{-1}x)(Y_2(M^{-1}x) + Y_3(M^{-1}x)),$$

$$\widetilde{\psi}^{(1)}(x) = \frac{1}{8\mu U}\mathbf{1}_U(M^{-1}x)(Y_2(M^{-1}x) + Y_3(M^{-1}x)).$$

Пример 2. Пусть $m = |\det M| = 2$. По приведённому алгоритму можно получить, например, следующие маски порядка 3.

x	$s_0^*s_0^*s_0^*$	$s_0^*s_0^*s_1^*$	$s_0^*s_1^*s_0^*$	$s_0^*s_1^*s_1^*$	$s_1^*s_0^*s_0^*$	$s_1^*s_0^*s_1^*$	$s_1^*s_1^*s_0^*$	$s_1^*s_1^*s_1^*$
$m_0(\mathbf{0}, x)$	1	2	2	2	0	0	0	0
$m_1(\mathbf{0}, x)$	0	1	1	1	1	1	1	1
$m_2(\mathbf{0}, x)$	0	$e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	1	1	1	1
$m_3(\mathbf{0}, x)$	0	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	1	1	1	1
$\widetilde{m}_0(\mathbf{0}, x)$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0
$\widetilde{m}_1(\mathbf{0}, x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\widetilde{m}_2(\mathbf{0}, x)$	0	$\frac{1}{4}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{4}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{4}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\widetilde{m}_3(\mathbf{0}, x)$	0	$\frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Положим $\widehat{\varphi}(\mathbf{0}) = 1$, $\widehat{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{0}) = 1/\mu U$. По теореме 35 (поскольку $n = 2$, $m = 2$, $r = 3$)

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{4}\mathbf{1}_U \cdot (1 + 2Y_1 + 4Y_2 + 4Y_3)\right)(M^{-2}x),$$

$$\widetilde{\varphi}(x) = \left(\frac{1}{4\mu U}\mathbf{1}_U \cdot \left(1 + \frac{1}{8}Y_1 + \frac{1}{64}Y_2 + \frac{1}{64}Y_3\right)\right)(M^{-2}x).$$

По теореме 36

$$\psi^{(1)}(x) = \left(\frac{1}{4}\mathbf{1}_U \cdot \left(Y_1 + 2(Y_2 + Y_3) + 4\sum_{k=4}^{7} Y_k\right)\right)(M^{-2}x),$$

$$\psi^{(2)}(x) = \left(\frac{1}{4}\mathbf{1}_U \cdot \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}Y_1 + 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}(Y_2 + Y_3) + 4\sum_{k=4}^{7} Y_k\right)\right)(M^{-2}x),$$

$$\psi^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{4}\mathbf{1}_U \cdot \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}Y_1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(Y_2+Y_3) + 4\sum_{k=4}^{7} Y_k\right)\right)(M^{-2}x),$$

$$\widetilde{\psi}^{(1)}(x) = \left(\frac{1}{16\mu U}\mathbf{1}_U \cdot \left(Y_1 + \frac{1}{8}(Y_2+Y_3) + \frac{1}{48}\sum_{k=4}^{7} Y_k\right)\right)(M^{-2}x),$$

$$\widetilde{\psi}^{(2)}(x)=\left(\frac{1}{16\mu U}\mathbf{1}_U \cdot \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}Y_1 + \frac{1}{8}e^{-i\frac{2\pi}{3}}(Y_2+Y_3) + \frac{1}{48}\sum_{k=4}^{7} Y_k\right)\right)(M^{-2}x),$$

$$\widetilde{\psi}^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{16\mu U}\mathbf{1}_U \cdot \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}Y_1 + \frac{1}{8}e^{i\frac{2\pi}{3}}(Y_2+Y_3) + \frac{1}{48}\sum_{k=4}^{7} Y_k\right)\right)(M^{-2}x).$$

Список литературы

1. M. A. Skopina, Yu. A. Farkov, *Walsh-type functions on M-positive sets in* $\mathbb{R}^d$. — Mathematical Notes, **111**, No. 4, (2022) 643—647.
2. Yu. A. Farkov, *Discrete wavelet transforms in Walsh analysis.* — J. Math. Sci., New York **257**, No. 1 (2021), 127–137.
3. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
4. Yu. Farkov, M. Skopina, *Harmonic analysis on the space of M-positive vectors.* — J. Math. Sci., **280** (2024), 5-–22.
5. A. Krivoshein, V. Protasov, M. Skopina, *Multivariate wavelet frames.* — Industrial and Applied Mathematics. Singapore: Springer, 2016.
6. C. Bandt, *Self-similar sets 5. Integer matrices and fractal tilings of* $\mathbb{R}^n$. — Proc. Amer. Math. Soc., **112** (1991), 549–562.
7. J. C. Lagarias, Y. Wang, *Self-affine tiles in* $\mathbb{R}^n$. — Adv. Math., **121**, No. 1 (1996), 21–49.
8. J.-P. Gabardo, Yu X. J., *Natural tiling, lattice tiling and Lebesgue measure of integral self-affine tiles.* — J. London Math. Soc. **74**, No. 01 (2006), 184—204.
9. M. Skopina, *Tight wavelet frames on the space of M-positive vectors.* — Anal. Applic., **22**, No. 05 (2024), 913–936. `10.1142/S0219530524500064`.
10. И. Я. Новиков, М. А. Скопина, *Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые?* — Матем. заметки, **91**, No. 6 (2012), 950-–953.
11. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities.* — Cambridge Mathematical Library. Cambridge (UK) etc.: Cambridge University Press, 1988.
12. O. Christensen, *An introduction to frames and riesz bases.* Birkhauser, 2016.

Babushkin M. V., Skopina M. A. Wavelet frames on the sets of M-positive vectors.

Wavelets on the spaces of M-positive vectors are studied. Such a space is a multidimensional analog of the half-line in Walsh analysis. Similarly to the half-line, there exists a class of so-called test functions (with a compact support of the function itself and of its Fourier transform) in such spaces. Wavelet frames consisting of the test functions are of special interest because they may be useful for applications to signal processing. A method for constructing such dual wavelet frames is developed in the paper.

Поступило 27 августа 2024 г.

С.-Петербургский государственный
университет 196504,
Санкт-Петербург, Университетский пр., 35,
Университет ИТМО 197101,
Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
E-mail: m.v.babushkin@yandex.ru

С.-Петербургский государственный университет
Университетский пр., 35, 196504 Санкт-Петербург;
Региональный научно-образовательный математический центр
Южного федерального университета
ул. Большая Садовая, 105/42, 344006 Ростов-на-Дону;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики",
Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук,
Кантемировская ул., д. 3, корп. 1, Санкт-Петербург
E-mail: skopinama@gmail.com