Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 538, 2024 г.

В. Г. Журавлев

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРАВИЛА ДЛЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

0.1. Основные результаты. Рассматриваются d-мерные разбиения $\mathbf{Til}_{d'}^{d}$ произвольной коразмерности d'. Такие разбиения составлены из

$$\binom{d}{D} = \frac{D!}{d!d'!}$$

базисных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}} \subset E$, где $D = d+d'$ и E — пространство, в котором содержатся сами разбиения. Разбиение $\mathbf{Til}_{d'}^{d}$ получается как сечение

$$\mathbf{Til}_{d'}^{d} = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \cap E \tag{0.1}$$

D-мерного периодического *гипер-разбиения* $\mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \subset \mathbb{R}^D$ подпространством E, определенным образом вложенным $E \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$ в *гиперпространство* $\mathbb{R}^D$.

На рис. 1.1 изображена часть двумерного разбиения коразмерности два $\mathbf{Til}_2^2$ с параметрами $d = 2$, $d' = 2$ и $D = 4$.

Кроме *реального пространства* E, в конструкции разбиения (0.1) участвует *конфигурационное пространство* E', дополняющее

$$\mathbb{R}^D = E \overset{\perp}{\oplus} E' \tag{0.2}$$

пространство E до гиперпространства $\mathbb{R}^D$. Конфигурационное пространство E' содержит d'-мерный *зоноэдр*

$$Z' = \mathrm{pr}' \, \mathcal{C}^D \tag{0.3}$$

Ключевые слова: квазипериодические разбиения, локальные правила, ветвящиеся вершины.

— проекцию на E' единичного D-мерного куба $\mathcal{C}^D$. Зоноэдр (0.3) можно разбить на d'-мерные параллелепипеды $T'_{\mathbf{i}'} \subset E'$. Количество этих параллелепипедов равно $\binom{d'}{D}$ — столько же, сколько и базисных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}} \subset E$. Параллелепипеды $T'_{\mathbf{i}'}$ *двойственны* параллелепипедам $T_{\mathbf{i}}$. С помощью $T'_{\mathbf{i}'}$ в теореме 3.1 и предложении 4.1 устанавливаются *локальные правила* (*matching rules*), определяющие локальное строение разбиения $\mathbf{Til}^d_{d'}$ из (0.1).

На рис. 2.1 изображен двумерный зоноэдр Z', использующийся для построения двумерного разбиения $\mathbf{Til}^2_2$ (рис. 1.1).

Проекцию (0.3) можно факторизовать $T'Z' = \mathrm{pr}'\,\partial\,\mathcal{FC}^{D,d'}$ до множества всех d'-мерных граней $\mathcal{FC}^{D,d'}$ единичного куба $\mathcal{C}^D$. В результате получается разбиение

$$T'Z' = \bigcup_{\alpha} P'_\alpha \tag{0.4}$$

зоноэдра Z' на конечное число односвязных областей, представляющих собою замкнутые выпуклые d'-мерные многогранники P'_α. В теореме 5.1 доказано, что количество типов $\mathrm{type}\,\mathrm{St}_{\mathrm{reg}}$ внутренних регулярных многогранных звезд $\mathrm{St}(v)$ в разбиении Til равно

$$\mathrm{type}\,\mathrm{St}_{\mathrm{reg}} = \tau \tag{0.5}$$

— количеству многогранников P'_α в разбиении (0.4), куда попадают двойственные вершины v'. Здесь многогранная звезда $\mathrm{St}(v)$ — это множество всех параллелепипедов $T_{\mathbf{i}}$ разбиения $\mathbf{Til}^d_{d'}$, имеющих общую вершину $v \in \mathbf{Til}^d_{d'}$. По определению две звезды $\mathrm{St}(v_1)$ и $\mathrm{St}(v_2)$ в разбиении Til относятся к одному типу: $\mathrm{St}(v_1) \sim \mathrm{St}(v_2)$, если одна звезда переводится в другую параллельным сдвигом пространства E. Если вложение $E' \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$ конфигурационного пространства E' иррационально, то формула (0.5) принимает вид

$$\mathrm{type}\,\mathrm{St}_{\mathrm{reg}} = \sharp\{P'_\alpha \subset T'Z'\},$$

т. е. количество типов многогранных звезд $\mathrm{St}(v)$ равно количеству многогранников P'_α в разбиении (0.4).

В общем случае разбиения $\mathbf{Til}^d_{d'}$ (0.1) содержат ветвящиеся вершины $v_{\mathrm{ram}} \in \mathbf{Til}^d_{d'}$. В многогранной звезде $\mathrm{St}(v_{\mathrm{ram}})$ такой вершины параллелепипеды могут накладываться друг на друга. Ветвящаяся звезда $\mathrm{St}(v_{\mathrm{ram}})$ — это *пакет* наложенных друг на друга обычных многогранных звезд. В §7 обсудаются способы разрешения неопределенностей.

Приведен *алгоритма регуляризации* (7.9)–(7.10), позволяющий производить выбор одной из многогранных звезд пакета.

0.2. История вопроса. В [1–6] методом ступенчатых поверхностей исследованы d-мерные разбиения $\mathbf{Til}_1^d$ коразмерности $d' = 1$. Одномерные разбиения Фибоначчи [7] и двумерные разбиения Рози [8, 9] — ранние примеры подобных разбиений.

Способ построения квазипериодических разбиений, основанный на применении сечений (0.1), по-видимому, впервые появился в эргодической теории посредством разбиений Маркова двумерного тора (см., например, [10]). В данной работе используется универсальная конструкция, представленная в [11]. В частности, этой конструкцией охватываются разбиения Пенроуза [12], если в качестве реального пространства в (0.2) взять двумерное подпространство E из гиперпространства $\mathbb{R}^5$, натянутое на векторы

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, \cos 2\pi/5, -\cos \pi/5, -\cos \pi/5, \cos 2\pi/5),\\ v_2 &= (0, \sin 2\pi/5,\ \sin \pi/5,\ -\sin \pi/5,\ -\sin 2\pi/5). \end{aligned}$$

Уступая разве лишь симметриям, локальные правила для квазипериодических разбиений постоянно находятся в центре внимания многих исследователей [13–16]. В настоящей работе предлагает новая точка зрения на локальные правила. Здесь мы следуем методу параметризации двумерного квазипериодического разбиения Рози [17] и ядерных разбиений [18], заменяя координационный отрезок на конфигурационный зоноэдр Z', для двумерного случая представленный на рис. 2.1.

§1. Гипер-разбиение

1.1. Вложения и проекции. Обозначим через $\mathbb{R}^D$ вещественное евклидово D-мерное пространство со скалярным произведением $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_D y_D$ и с ортонормированным базисом

$$\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_D\}. \tag{1.1}$$

Пусть дано разложение

$$\mathbb{R}^D = E \overset{\perp}{\oplus} E' \tag{1.2}$$

в ортогональную сумму подпространств E, E' размерностей, соответственно, d и $d' = D - d$, где $1 \leqslant d \leqslant D - 1$. Определим *проекции*

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\mathrm{pr}} E: \quad \mathrm{pr}\,\mathrm{x} = x, \tag{1.3}$$

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\mathrm{pr}'} E': \quad \mathrm{pr}'\mathrm{x} = x',$$

с $\mathrm{x} = x + x'$ и $x \in E$, $x' \in E'$, а также множества

$$e = \{e_1, \ldots, e_D\} = \mathrm{pr}\,\varepsilon, \quad e' = \{e'_1, \ldots, e'_D\} = \mathrm{pr}'\,\varepsilon \tag{1.4}$$

— образы единичного базиса (1.1) в подпространствах E, E'. Пространства $\mathbb{R}^D$, E и E' будем назвать соответственно *гиперпространством*, *реальным пространством* и *конфигурационным пространством*.

В указанных подпространствах векторы (1.4) порождают *решетки*

$$L = \mathbb{Z}[e] = \mathbb{Z}e_1 + \ldots + \mathbb{Z}e_D, \quad L' = \mathbb{Z}[e'] = \mathbb{Z}e'_1 + \ldots + \mathbb{Z}e'_D, \tag{1.5}$$

являющиеся образами полной *кубической решетки*

$$\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}\varepsilon_1 + \ldots + \mathbb{Z}\varepsilon_D \tag{1.6}$$

в $\mathbb{R}^D$. Здесь $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел. Для размерностей имеем неравенства $d \leqslant \dim_{\mathbb{Z}} L \leqslant D$, $d' \leqslant \dim_{\mathbb{Z}} L' \leqslant D$ и, согласно (1.4), эти решетки есть не что иное, как проекции

$$L = \mathrm{pr}\,\mathbb{Z}^D, \quad L' = \mathrm{pr}'\,\mathbb{Z}^D \tag{1.7}$$

кубической решетки (1.6).

1.2. Типы вложений подпространств. Выделим в решетках L и L' *целочисленные подрешетки* $L_{\mathbb{Z}} = L \cap \mathbb{Z}^D$, $L'_{\mathbb{Z}} = L' \cap \mathbb{Z}^D$ размерностей $0 \leqslant \dim_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}} \leqslant d$, $0 \leqslant \dim_{\mathbb{Z}} L'_{\mathbb{Z}} \leqslant d'$. Скажем, что подпространство E *иррационально* или, соответственно, *рационально* вложено $E \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$ в пространство $\mathbb{R}^D$, если целочисленная подрешетка $L_{\mathbb{Z}}$ имеет размерность

$$\dim_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}} = 0 \quad \text{или} \quad \dim_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}} = d. \tag{1.8}$$

В остальных случаях имеем $0 < \dim_{\mathbb{Z}} L_{\mathbb{Z}} < d$ и будем говорить, что подпространство E имеет *смешанный тип* вложения. Для $E' \subset \mathbb{R}^D$ определения аналогичны с заменой d на d'.

1.3. Грани единичного куба. Пусть $\mathcal{D} = \{1, \ldots, D\}$ и $\mathcal{D}_d$ — совокупность всех *мультииндексов* $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_d\}$, состоящих из d различных номеров из $\mathcal{D}$. Обозначим через $\mathbf{i}' = \{i'_1, \ldots, i'_{d'}\} = \mathcal{D} \setminus \mathbf{i}$ *двойственные мультииндексы* к $\mathbf{i}$, состоящие из $d' = D - d$ дополнительных номеров и образующие совокупность мультииндексов $\mathcal{D}_{d'}$.

Единичный D-мерный *куб*

$$\mathcal{C}^D = \{\lambda_1\varepsilon_1 + ... + \lambda_D\varepsilon_D;\ \lambda_i \in [0,1]\} \tag{1.9}$$

имеет $\left(\begin{array}{c} d \\ D \end{array}\right) = \dfrac{D!}{d!d'!}$ различных d-мерных *граней*

$$\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}} = \{\lambda_1\varepsilon_{i_1} + ... + \lambda_d\varepsilon_{i_d};\ \lambda_i \in [0,1]\},$$

нумеруемых мультииндексами $\mathbf{i}$ из $\mathcal{D}_d$. Каждой грани $\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}}$ поставим во взаимно однозначное соответствие $\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}} \rightleftarrows \mathcal{C}^D_{\mathbf{i}'}$ d'-мерную *двойственную грань*

$$\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}'} = \{\lambda_1\varepsilon_{i'_1} + ... + \lambda_{d'}\varepsilon_{i'_{d'}};\ \lambda_{i'} \in [0,1]\}.$$

Далее будем полагать, что вложения

$$E \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D, \quad E' \overset{\mathrm{em}'}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D \tag{1.10}$$

невырождены, когда для всех мультииндексов $\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d$ системы векторов

$$e_{\mathbf{i}} = \{e_{i_1}, ..., e_{i_d}\}, \quad e'_{\mathbf{i}'} = \{e'_{i'_1}, ..., e'_{i'_{d'}}\}$$

имеют над полем $\mathbb{R}$ максимальные *ранги*

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}\, e_{\mathbf{i}} = d, \quad \mathrm{rang}_{\mathbb{R}}\, e'_{\mathbf{i}'} = d. \tag{1.11}$$

В невырожденном случае (1.11) проекции (1.3) переводят грани $\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}}$, $\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}'}$ в d-мерные *параллелепипеды*

$$T_{\mathbf{i}} = \mathrm{pr}\,\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}} = \{\lambda_1 e_{i_1} + ... + \lambda_d e_{i_d};\ \lambda_i \in [0,1]\} \tag{1.12}$$

из пространства E и соответственно — в d'-мерные

$$T'_{\mathbf{i}'} = \mathrm{pr}'\,\mathcal{C}^D_{\mathbf{i}'} = \{\lambda_1 e'_{i'_1} + ... + \lambda_{d'} e'_{i'_{d'}};\ \lambda_{i'} \in [0,1]\} \tag{1.13}$$

из пространства E'.

1.4. Фундаментальная область и гипер-разбиение. В [11] доказано, что D-мерные *параллелепипеды*

$$\mathcal{T}_{\mathbf{i}} = T_{\mathbf{i}} - T'_{\mathbf{i}'} = \{x - x';\ x \in T_{\mathbf{i}}, x' \in T'_{\mathbf{i}'}\} \subset \mathbb{R}^D, \tag{1.14}$$

где параллелепипеды $T_{\mathbf{i}}$ и $T'_{\mathbf{i}'}$ считаются вложенными (1.10) в пространство $\mathbb{R}^D$, не пересекаются по внутренним точкам и их объединение

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d} \mathcal{T}_{\mathbf{i}} \tag{1.15}$$

образует *фундаментальную область*

$$\mathcal{F} = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D \tag{1.16}$$

пространства $\mathbb{R}^D$ относительно параллельных сдвигов

$$\mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}[\mathrm{l}] = \mathrm{x} + \mathrm{l} \tag{1.17}$$

на векторы $\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D$ кубической решетки (1.6). Поэтому сдвиги (1.17) фундаментальной области $\mathcal{F}$ порождают *гипер-разбиение* (*hyper tiling*)

$$\mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] = \bigcup_{\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{F}[\mathrm{l}] \tag{1.18}$$

всего пространства $\mathbb{R}^D$. Здесь области $\mathcal{F}[\mathrm{l}], \mathcal{F}[\mathrm{l}']$ не пересекаются по внутренним точкам $\mathcal{F}^{\mathrm{int}}[\mathrm{l}] \cap \mathcal{F}^{\mathrm{int}}[\mathrm{l}'] = \varnothing$, если $\mathrm{l} \neq \mathrm{l}'$.

1.5. Сечение гипер-разбиения. Рассмотрим сечение

$$\mathrm{Til} = \mathrm{Til}^d = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \cap E \tag{1.19}$$

разбиения (1.18) d-мерным пространством E из (1.2). Из ортогонального разложения (1.2) пространства $\mathbb{R}^D$ и определений (1.14), (1.15), (1.18) следует, что сечение Til составлено из объединения *транслированных параллелепипедов* $T_{\mathbf{i}}[l] = T_{\mathbf{i}} + l$ с $l \in L$, $\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d$, получаемых из базисных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}} \subset E$ (1.12) сдвигами на векторы решетки $L = \mathrm{pr}\mathbb{Z}^D \subset E$ из (1.7). В сечение (1.19) входят только параллелепипеды $T_{\mathbf{i}}[l]$ с условием

$$\mathcal{T}_{\mathbf{i}}[\mathrm{l}] \cap E \neq \varnothing \tag{1.20}$$

для некоторого вектора $\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D$ с $\mathrm{pr}\,\mathrm{l} = l$.

Из (1.14)–(1.18) следует $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}^{\mathrm{int}}[\mathrm{l}] \cap \mathcal{T}_{\mathbf{j}}^{\mathrm{int}}[\mathrm{m}] = \varnothing$ для $(\mathbf{i}, \mathrm{l}) \neq (\mathbf{j}, \mathrm{m})$ и поэтому D-мерные параллелепипеды $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}[\mathrm{l}], \mathcal{T}_{\mathbf{j}}[\mathrm{m}]$ могут пересекаться только по своим *границам* — $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}[\mathrm{l}] \cap \mathcal{T}_{\mathbf{j}}[\mathrm{m}] = \partial\mathcal{T}_{\mathbf{i}}[\mathrm{l}] \cap \partial\mathcal{T}_{\mathbf{j}}[\mathrm{m}]$. Если при этом $(\partial\mathcal{T}_{\mathbf{i}}[\mathrm{l}] \cap \partial\mathcal{T}_{\mathbf{j}}[\mathrm{m}]) \cap E \neq \varnothing$, то различные d-мерные параллелепипеды $T_{\mathbf{i}}[l] = \mathcal{T}_{\mathbf{i}}[\mathrm{l}] \cap E$ и $T_{\mathbf{j}}[m] = \mathcal{T}_{\mathbf{j}}[\mathrm{m}]) \cap E$ накладываются друг на друга

$$T_{\mathbf{i}}[l] \cap T_{\mathbf{j}}[m] \neq \varnothing \quad \text{для} \quad (\mathbf{i}, \mathrm{l}) \neq (\mathbf{j}, \mathrm{m}) \tag{1.21}$$

в сечении Til; и тогда будем говорить, что имеет место случай *ветвления* (*ramification*).

Итак, мы получили представление сечения (1.19) в виде *разбиения*

$$\mathrm{Til} = \bigcup_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d \\ l \in L}} T_{\mathbf{i}}[l] \tag{1.22}$$

на d-мерные параллелепипеды $T_{\mathbf{i}}[l]$. Здесь объединение происходит по парам $(\mathbf{i}, l)$ с условием (1.20). Разбиение (1.22) допускает неопределенности вида (1.21). Поэтому, если быть точным, Til следовало бы назвать *предразбиением*. Далее будет показано, как можно избавиться от неопределенностей в Til и, тем самым, получить настоящее разбиение.

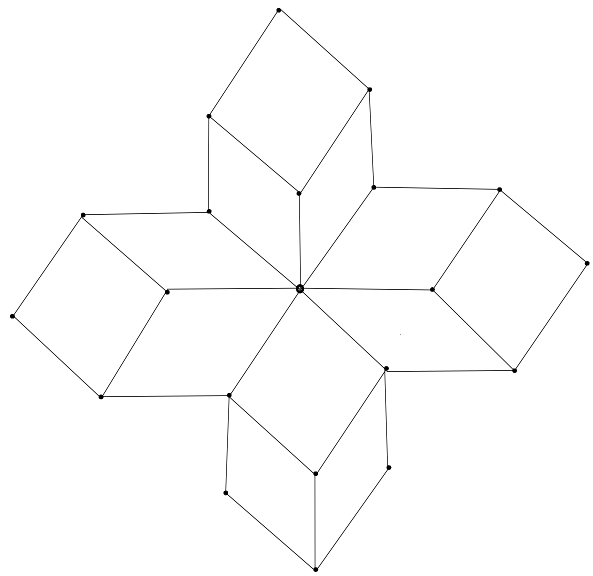

Рис. 1.1. Часть двумерного разбиения $\mathbf{Til}_2^2$.

На рис. 1.1 изображена часть двумерного разбиения коразмерности два $\mathbf{Til}_2^2$ с параметрами $d = 2$, $d' = 2$ и $D = 4$. Разбиение $\mathbf{Til}_2^2$ состоит из объединения

$$\binom{d}{D} = \binom{2}{4} = 6$$

базисных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}} \subset E$ (1.12) с мультииндексами $\mathbf{i} \in \mathcal{D}_2$ и их трансляций $T_{\mathbf{i}}[l]$ на векторы l решетки $L = \operatorname{pr} \mathbb{Z}^4$.

§2. Зоноэдр

2.1. Построение зоноэдра. Пусть векторы $e' = \{e'_1, \ldots, e'_D\} \subset E'$ — проекции $e'_i = \operatorname{pr}' \varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, D)$ векторов единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_D\}$ пространства $\mathbb{R}^D$.

По предположению, вложения $E \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$, $E' \overset{\text{em}'}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$ подпространств E, E' в $\mathbb{R}^D$ невырождены (1.11). При этом векторы $e'_1, \ldots, e'_{d'}$ порождают в пространстве E' невырожденный d'-мерный параллелепипед

$$Z'_1 = T'_{\mathbf{i}'_1} = \{\lambda_1 e'_1 + ... + \lambda_{d'} e'_{d'};\ \lambda_{i'} \in [0,1]\} \tag{2.1}$$

с мультииндексом $\mathbf{i}'_1 = \{1, \ldots, d'\} \in \mathcal{D}_{d'}$. На следующем шаге расширяем параллелепипед Z'_1 до многогранника

$$Z'_2 = Z'_1 + \{e'_{d'+1}\} \tag{2.2}$$

через операцию суммы по-минковскому Z'_1 и направленного отрезка $\{e'_{d'+1}\}$. Разность

$$Z'_2 \setminus Z'_1 = T'_{\mathbf{i}'_2} \cup \ldots \cup T'_{\mathbf{i}'_{d'+1}} \tag{2.3}$$

состоит из объединения d' параллелепипедов $T'_{\mathbf{i}'_2}, \ldots, T'_{\mathbf{i}'_{d'+1}}$ (1.13), мультииндексы $\mathbf{i}'_*$ которых составлены из номера $d'+1$ и $d'-1$ номеров из $\{1, \ldots, d'\}$. Продолжая этот процесс

$$Z'_n = Z'_{n-1} + \{e'_{d'+n-1}\} \quad \text{для} \quad n = 3, \ldots, D, \tag{2.4}$$

получаем последовательность вложенных многогранников

$$Z'_1 \subset Z'_2 \subset \ldots \subset Z'_D, \tag{2.5}$$

где максимальный многогранник

$$Z' = Z'_D = \{\lambda_1 e'_1 + ... + \lambda_D e'_D; \lambda_{i'} \in [0,1]\} \tag{2.6}$$

есть d'-мерный *зоноэдр*, порожденный всеми векторами из множества $e' = \{e'_1, \ldots, e'_D\}$ и представляющий собою проекцию

$$Z' = \mathrm{pr}'\, \mathcal{C}^D \tag{2.7}$$

единичного D-мерного куба (1.9). Таким образом, зоноэдр $Z' = Z'_D$ в (2.5) не зависит от порядка, в каком происходит выбор последовательности векторов $e'_i \in e'$. Однако, от порядка зависит каким образом зоноэдр разбит на параллелепипеды $T'_{\mathbf{i}'}$.

Из *алгоритма* (2.1)–(2.6) следует, что

$$Z' = \bigcup_{\mathbf{i}' \in \mathcal{D}_{d'}} T'_{\mathbf{i}'}[l'_{\mathbf{i}'}] \tag{2.8}$$

для некоторых векторов

$$l'_{\mathbf{i}'} = \mathrm{pr}' \epsilon_{\mathbf{i}'} \tag{2.9}$$

из решетки L' (1.5). Векторы $l'_{\mathbf{i}'}$ получаются последовательными сдвигами на базисные векторы $e'_i \in e'$ $(i = 1, \ldots, D)$. Из равенств $e'_i = \mathrm{pr}'\varepsilon_i$

по линейности векторы-прообразы $\epsilon_{\mathbf{i}'} \in \mathbb{Z}^D$ в (2.9) восстанавливаются единственным образом.

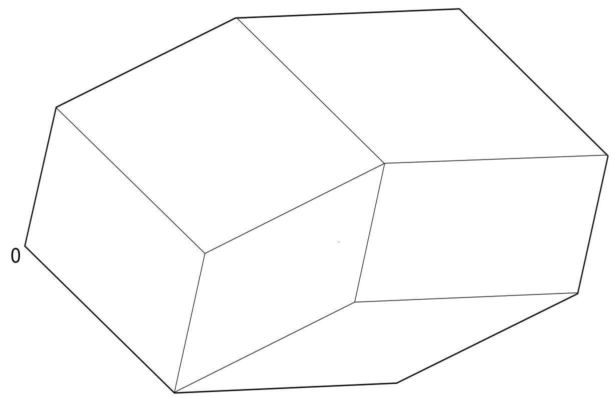

Рис. 2.1. Двумерный зоноэдр Z' для разбиения коразмерности два $\mathbf{Til}_2^2$.

На рис. 2.1 изображен двумерный ($d^{'} = 2$) зоноэдр Z' (2.8), составленный из трансляций

$$\binom{d'}{D} = \binom{2}{4} = 6$$

параллелепипедов $T'_{\mathbf{i}'} \subset E'$ (1.13). Зоноэдр Z' необходим для построения двумерного разбиения коразмерности два $\mathbf{Til}_2^2$, ранее представленного на рис. 1.1.

2.2. Фундаментальная область с зоноэдром. В фундаментальной области $\mathcal{F}$ (1.15) заменим образующие ее D-мерные параллелепипеды $\mathcal{T}_{\mathbf{i}} = T_{\mathbf{i}} - T'_{\mathbf{i}'}$ на другие параллелепипеды

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{i}} = \mathcal{T}_{\mathbf{i}}[-\epsilon_{\mathbf{i}'}] = \mathcal{T}_{\mathbf{i}} - \epsilon_{\mathbf{i}'} = T_{\mathbf{i}} - T'_{\mathbf{i}'} - (l_{\mathbf{i}} + l'_{\mathbf{i}'}) = T_{\mathbf{i}}[-l_{\mathbf{i}}] - T'_{\mathbf{i}'}[l'_{\mathbf{i}'}], \quad (2.10)$$

получаемые сдвигами на векторы $-\epsilon_{\mathbf{i}'}$ решетки $\mathbb{Z}^D$,

$$\epsilon_{\mathbf{i}'} = l_{\mathbf{i}} + l'_{\mathbf{i}'} \quad (2.11)$$

— разложение векторов $\epsilon_{\mathbf{i}'}$ из (2.9) в ортогональную сумму векторов $l_{\mathbf{i}} = \operatorname{pr}\epsilon_{\mathbf{i}'}$ и $l'_{\mathbf{i}'} = \operatorname{pr}'\epsilon_{\mathbf{i}'}$ из решеток L и L'. Составим из них новое множество

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{D}_d} \mathcal{Z}_{\mathbf{i}}$$

также являющееся *фундаментальной областью* $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ пространства $\mathbb{R}^D$ относительно сдвигов на векторы решетки $\mathbb{Z}^D$.

Поэтому область $\mathcal{Z}$ порождает *гипер-разбиение* (*hyper tiling*)

$$\mathcal{Z}[\mathbb{Z}^D] = \bigcup_{\mathrm{l}\in\mathbb{Z}^D} \mathcal{Z}[\mathrm{l}] \tag{2.12}$$

пространства $\mathbb{R}^D$. Здесь по-прежнему области $\mathcal{Z}[\mathrm{l}], \mathcal{Z}[\mathrm{l}']$ не пересекаются по внутренним точкам $\mathcal{Z}^{\mathrm{int}}[\mathrm{l}] \cap \mathcal{Z}^{\mathrm{int}}[\mathrm{l}'] = \varnothing$, если $\mathrm{l} \neq \mathrm{l}'$. Из (2.10) следует, что новое гипер-разбиение (2.12) совпадает $\mathcal{Z}[\mathbb{Z}^D] = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D]$ с прежним (1.18), поскольку оба состоят из из одних и тех же D-мерных параллелепипедов.

§3. Зоноэдр и сечение

3.1. Предразбиение с зоноэдром. Как и сечение (1.18), сечение

$$\mathrm{Til} = \mathrm{Til}^d = \mathcal{Z}[\mathbb{Z}^D] \cap E \tag{3.1}$$

разбиения (2.12) d-мерным пространством E составлено из объединения транслированных параллелепипедов

$$T_{\mathbf{i}}[l] = T_{\mathbf{i}} + l, \quad \text{где} \quad l \in L, \;\; \mathbf{i} \in \mathcal{D}_d,$$

получающихся из базисных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}} \subset E$ (1.12) сдвигами на векторы решетки $L = \operatorname{pr}\mathbb{Z}^D \subset E$ из (1.7).

Из определений (2.12) и (2.10) выводим

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}'\mathcal{Z} &= \operatorname{pr}' \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{D}_d} \mathcal{Z}_{\mathbf{i}} = \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{D}_d} \operatorname{pr}'\mathcal{Z}_{\mathbf{i}} \\ &= \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{D}_d} -T'_{\mathbf{i}'}[l'_{\mathbf{i}'}] = \bigcup_{\mathbf{i}'\in\mathcal{D}_d} -T'_{\mathbf{i}'}[l'_{\mathbf{i}'}], \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $l'_{\mathbf{i}'} = \operatorname{pr}'\epsilon_{\mathbf{i}'}$ из решетки L' согласно (2.9). Из (2.8) и (3.2) следует

$$\operatorname{pr}'\mathcal{Z} = -Z'. \tag{3.3}$$

Пусть $\mathrm{l} = l + l'$ — разложение вектора $\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D$ в ортогональную сумму векторов $l = \mathrm{pr}\,\mathrm{l}$ и $l' = \mathrm{pr}'\,\mathrm{l}$ из L и L'. Тогда из (3.3) получаем условие

$$\mathcal{Z}[\mathrm{l}] \cap E \neq \varnothing \quad \text{эквивалентно} \quad (-Z')[l'] \cap \{0\} \neq \varnothing \tag{3.4}$$

попадания сечения многогранника $\mathcal{Z}[\mathrm{l}]$ пространством E в гипер-разбиение Til из (3.1). Заметим, что в правой части (3.4)

$$(-Z')[l'] \neq -Z'[l'] = -Z' - l',$$

и, так как $(-Z')[l'] = -Z' + l'$, имеем

$$\mathcal{Z}[\mathrm{l}] \cap E \neq \varnothing \quad \text{эквивалентно} \quad Z' \ni 0[l'] \quad (= 0 + l'),$$

где Z' — определенный в (2.6) d'-мерный зоноэдр Z' из пространства E' и векторы l и l' связаны равенством (2.11).

3.2. Критерий. Приведем критерий вхождения *базисных* d-мерных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}}$ в сечение $\mathrm{Til} = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \cap E$, определенное в (1.19).

Теорема 3.1. *Пусть вложения* $E \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$, $E' \overset{\mathrm{em}'}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$ *невырождены* (1.11), *d-мерные параллелепипеды* $T_{\mathbf{i}}$, $T'_{\mathbf{i}}$ *определены в* (1.12), (1.13) *и пусть вектор* $\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D$ *разложен в сумму* $\mathrm{l} = l + l'$ *векторов* l, l', *принадлежащих решеткам* L, L' *из* (1.5). *Тогда*

$$T_{\mathbf{i}}[l] \subset \mathrm{Til} \quad \textit{эквивалентно} \quad T'_{\mathbf{i}}[l'] \subset Z', \tag{3.5}$$

где $\mathrm{Til} = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \cap E$ *— сечение* (1.19) *гипер-разбиения* $\mathcal{F}[\mathbb{Z}^D]$ (1.18) *и* Z' *— зоноэдр* (2.8) *из подпространства* E'.

Доказательство. Подставляя формулу (1.15) для фундаментальной области $\mathcal{F}$ в определение (1.19) сечения Til, имеем

$$\mathrm{Til} = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \cap E = \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d} \bigcup_{\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D} (\mathcal{F}_{\mathbf{i}}[\mathrm{l}] \cap E). \tag{3.6}$$

Воспользуемся определением (1.14) и сделаем в (3.6) подстановку $\mathcal{T}_{\mathbf{i}} = T_{\mathbf{i}} - T'_{\mathbf{i}'}$. Получаем для (3.6) представление

$$\mathrm{Til} = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \cap E = \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d} \bigcup_{\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D} (T_{\mathbf{i}}[l] + (-T'_{\mathbf{i}'} + l')) \cap E, \tag{3.7}$$

Заметим, что равенство $(T_{\mathbf{i}}[l] + (-T'_{\mathbf{i}'} + l')) \cap E = T_{\mathbf{i}}[l] \cap E = T_{\mathbf{i}}[l]$ равносильно условию $(-T'_{\mathbf{i}'} + l') \cap E \neq \varnothing$ и условию $T'_{\mathbf{i}}[l'] \subset Z'$. С этим замечанием, приводим сечение (3.7) к виду

$$\mathrm{Til} = \mathcal{F}[\mathbb{Z}^D] \cap E = \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d} \bigcup_{\substack{\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D \\ T'_{\mathbf{i}}[l'] \subset Z'}} T_{\mathbf{i}}[l].$$

Из этого равенства следует (3.5). □

§4. Локальное окружение

4.1. Многогранные звезды. Пусть $T_{\mathbf{i}}$ — d-мерные параллелепипеды (1.12) с мультииндексами $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_d\}$, состоящие из d различных номеров из $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}$. Обозначим через $T_{\mathbf{i}}^{\mathrm{ver}}$ множество вершин параллелепипеда $T_{\mathbf{i}}$. Вершины $\mathrm{ver}(\mathbf{j}) = e_{j_1} + ... + e_{j_k} \in T_{\mathbf{i}}^{\mathrm{ver}}$ нумеруются всеми мультииндексами

$$\mathbf{j} = \{j_1, \ldots, j_k\} \quad \subset \quad \mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_d\}, \tag{4.1}$$

состоящими из k номеров, $0 \leqslant k \leqslant d$, где $\mathrm{ver}(\mathbf{j}) = 0$ для $\mathbf{j} = \varnothing$, т. е. в случае $k = 0$. Таким образом, параллелепипед $T_{\mathbf{i}}$ содержит $\sharp T_{\mathbf{i}}^{\mathrm{ver}} = 2^d$ вершин. Введем обозначение $T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ для параллелепипеда $T_{\mathbf{i}}$ с выделенной в нем вершиной $\mathrm{ver}(\mathbf{j}) \in T_{\mathbf{i}}^{\mathrm{ver}}$. Аналогично определим d-мерные параллелепипеды $T'_{\mathbf{i}} = \{\lambda_1 e'_{i_1} + ... + \lambda_d e'_{i_d};\ \lambda_i \in [0,1]\}$ в пространстве E' и, для них, $T_{\mathbf{i}}^{\prime\,\mathrm{ver}}$ — множество вершин

$$\mathrm{ver}'(\mathbf{j}) = e'_{j_1} + ... + e'_{j_k} \ \in\ T_{\mathbf{i}}^{\prime\,\mathrm{ver}} \tag{4.2}$$

и $T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ — параллелепипед $T'_{\mathbf{i}}$ с выделенной в нем вершиной $\mathrm{ver}'(\mathbf{j})$.

Будем говорить, что *отмеченный* параллелепипед $T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ содержится

$$T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})\ \in_{0[l]}\ \mathrm{Til} \tag{4.3}$$

в сечении $\mathrm{Til} = \mathcal{Z}[\mathbb{Z}^D] \cap E$ (3.1) в его в вершине $0[l] \in \mathrm{Til}^{\mathrm{ver}}$, где $l \in L$, если, в обычном смысле,

$$T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})[-\mathrm{ver}(\mathbf{j})][l] = T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})[l - \mathrm{ver}(\mathbf{j})] \in \mathrm{Til}.$$

Также определим включение $T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \subset_{0[l']} Z'$, означающее

$$T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})[-\mathrm{ver}'(\mathbf{j})][l'] = T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})[l' - \mathrm{ver}'(\mathbf{j})]\ \subset\ Z'.$$

Многогранная звезда

$$\mathrm{St}(0[l]) = \{T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \in_{0[l]} \mathrm{Til};\ \mathbf{i} \in \mathcal{D}_d,\ \mathbf{j} \subset \mathbf{i}\} \tag{4.4}$$

в вершине $0[l] \in \mathrm{Til}^{\mathrm{ver}}$ состоит из всех отмеченных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$, содержащихся (4.3) в сечении Til. Аналогично определим *двойственную* звезду

$$\mathrm{St}'(0[l']) = \{T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \subset_{0[l']} Z'; \mathbf{i} \in \mathcal{D}_d, \mathbf{j} \subset \mathbf{i}\}. \tag{4.5}$$

Предложение 4.1. *Пусть векторы l, l', принадлежащие решеткам L, L' из* (1.5), *связаны условием* $\mathrm{l} = l + l'$ *и* $\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D$. *Тогда имеет место взаимно однозначное соответствие*

$$T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \longmapsto T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \tag{4.6}$$

между отмеченными параллелепипедами $T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ *и* $T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ *из многогранных звезд* $\mathrm{St}(0[l])$ *и* $\mathrm{St}'(0[l'])$, *соответственно.*

Доказательство. Это следует из определений (4.4), (4.5) и соответствия (3.5). □

Взаимно однозначные соответствия (4.6) есть ничто иное, как *локальные правила.* По этим правилам *локально*, переходя от одной многогранной звезды $\mathrm{St}(0[l])$ к соседней $\mathrm{St}'(0[l'])$, строятся определенные в (1.22) разбиения Til. В частности, по этим правилам было построено двумерное разбиение $\mathbf{Til}^2_2$, часть которого изображена на рис. 1.1. □

4.2. Суммы Минковского. Пусть $\mathrm{ver}\,\mathcal{C}^D$ — множество *вершин*

$$v = v(v_1, \ldots, v_D) = v_1\varepsilon_1 + \ldots + v_D\varepsilon_D \tag{4.7}$$

единичного D-мерного куба $\mathcal{C}^D$ из (1.9), определяемых координатами $v_1, ..., v_D$ со значениями 0 или 1; и пусть $T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ — отмеченный параллелепипед с выделенной вершиной $\mathrm{ver}'(\mathbf{j})$ (4.2) для мультииндекса $\mathbf{j} \subset \mathbf{i}$ из (4.1). Запишем вершины (4.7) в виде

$$v(v_{\mathbf{i}}, v_{\mathbf{i}'},) = v_{i_1}\varepsilon_{i_1} + ... + v_{i_d}\varepsilon_{i_d} \, + \, v_{i'_1}\varepsilon_{i'_1} + ... + v_{i'_{d'}}\varepsilon_{i'_{d'}},$$

где $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots, i_d\}$ и $\mathbf{i}' = \{i'_1, \ldots, i'_{d'}\}$ — дополнительный к $\mathbf{i}$ мультииндекс,

$$v_{\mathbf{i}} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}), \quad v_{\mathbf{i}'} = (v_{i'_1}, \ldots, v_{i'_{d'}}). \tag{4.8}$$

Пусть $v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'})$ — множество вершин с

$$v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})} = (0_{i_1}, \ldots, 1_{j_1}, \ldots, 1_{j_k}, \ldots, 0_{i_d})$$

и произвольным $v_{\mathbf{i}'}$; среди вершин $v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'})$ *выделим* вершину

$$v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'}) \quad \text{с} \quad 0_{\mathbf{i}'} = (0_{i'_1}, \ldots, 0_{i'_{d'}}). \tag{4.9}$$

Обозначим через $\mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'})$ d'-мерную *грань* куба $\mathcal{C}^D$ с вершинами

$$\operatorname{ver} \mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'}) = v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'}) \tag{4.10}$$

и через $\mathcal{F}^{d}(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'})$ — d-мерную *грань* куба $\mathcal{C}^D$ с вершинами

$$\operatorname{ver} \mathcal{F}^{d}(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'}) = v(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'}) \tag{4.11}$$

и с произвольным параметром $v_{\mathbf{i}}$ из (4.8). Грани $\mathcal{F}^{d}(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'})$ и $\mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'})$ находятся в отношении *дополнительности*

$$\mathcal{F}^{d}(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'})|_{\mathcal{C}^D}\, \mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'}) \subset \mathcal{C}^D$$

в кубе $\mathcal{C}^D$, т. е. они имеют единственную общую вершину $v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})$ (4.9). Поэтому их *сумма Минковского*

$$\mathcal{F}^{d}(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'}) \oplus_{v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})} \mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'}) = \mathcal{C}^D. \tag{4.12}$$

Здесь под символом $\oplus_{v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})}$ понимается обычная сумма Минковского в случае нулевой вершины $v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'}) = v(0_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'})$. Для произвольной вершины $v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})$ под суммой в (4.12) будет иметься ввиду множество, заметаемое гранью $\mathcal{F}^{d}(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'})$, когда параллельными сдвигами ее вершина $v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})$ заполняет всю дополнительную грань $\mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'})$.

Подействуем на обе части равенства (4.12) проекцией $\mathbb{R}^D \xrightarrow{\mathrm{pr}'} E'$ из (1.3) и воспользуемся сокращениями

$$\mathrm{pr}' \mathcal{F}^{d}(v_{\mathbf{i}}, 0_{\mathbf{i}'}) = T'_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, \quad \mathrm{pr}' \mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'}) = T'_{\mathbf{i}'(\mathbf{j})}, \quad \mathrm{pr}'\, \mathcal{C}^D = Z'.$$

Здесь Z' — d'-мерный зоноэдр из (2.7), $T'_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}$ и $T'_{\mathbf{i}'(\mathbf{j})}$ есть не что иное, как определенные в (1.12) и (1.13) отмеченные d- и d'-мерные параллелепипеды $T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ и $T'_{\mathbf{i}'}(\mathbf{j}')$, сдвинутые соответствующем образом (4.10), (4.11). Параллелепипеды $T'_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}$ и $T'_{\mathbf{i}'(\mathbf{j})}$ имеют общую выделенную вершину $v'(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'}) = \mathrm{pr}' v(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})$. Из равенства (4.12) вытекает

$$T'_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})} \oplus_{v'(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})} T'_{\mathbf{i}'(\mathbf{j})} = Z', \tag{4.13}$$

где смысл суммы в (4.13) тот же, что и в равенстве (4.12), но для общей вершины $v'(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, 0_{\mathbf{i}'})$ параллелепипедов $T'_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}$ и $T'_{\mathbf{i}'(\mathbf{j})}$ из зоноэдра Z'.

§5. Классификация многогранных звезд

5.1. Звезды. Обозначим через $\mathcal{FC}^{D,d'}$ множество всех d'-мерных граней единичного куба $\mathcal{C}^D$. Пусть $\partial\mathcal{FC}^{D,d'}$ — границы всех граней из

$\mathcal{F}\mathcal{C}^{D,d'}$. Тогда, вспоминая равенство $\mathrm{pr}'\,\mathcal{C}^D = Z'$, приходим к *разбиению*

$$T'Z' = \mathrm{pr}'\,\partial\mathcal{F}\mathcal{C}^{D,d'} = \bigcup_\alpha P'_\alpha \tag{5.1}$$

зоноэдра Z' на конечное число односвязных областей, представляющих собою замкнутые выпуклые d'-мерные *многогранники* P'_α. Разделим

$$T'Z' = \partial T'Z' \cup T'Z'^{\,\mathrm{int}} \tag{5.2}$$

разбиение $T'Z'$ на *внутренние области*

$$T'Z'^{\,\mathrm{int}} = \bigcup_\alpha P'^{\,\mathrm{int}}_\alpha \tag{5.3}$$

и их *границы*

$$\partial T'Z' = \bigcup_\alpha \partial P'_\alpha. \tag{5.4}$$

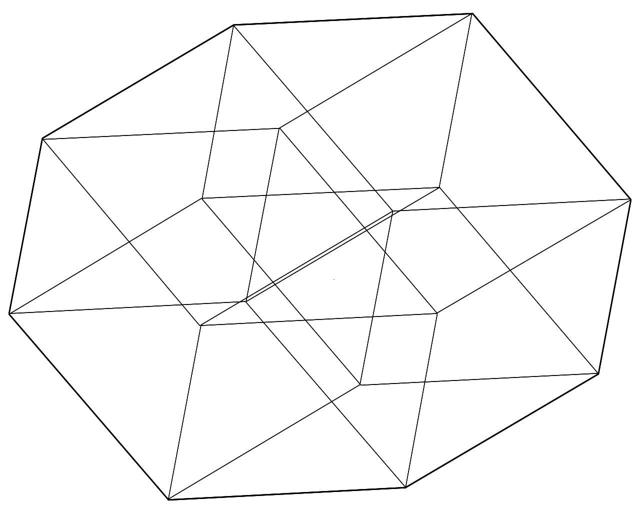

Рис. 5.1. Разбиение $T'Z'$ зоноэдра Z' на многогранники P'_α.

На рис. 5.1 изображено разбиение $T'Z'$ (5.1) зоноэдра Z' на многогранники P'_α. Сам зоноэдр Z' был показан на рис. 2.1. Разбиение $T'Z'$

центрально-симметрично. Оно состоит из 41 односвязной области, т. е. из многогранников P'_α.

Введем обозначение $\operatorname{ver}\mathrm{Til} = \{0[l]; 0[l'] \in Z', \mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D\}$ для множества *вершин* разбиения Til из (3.1), где $0[l] = \operatorname{pr} 0[\mathrm{l}]$, $0[l'] = \operatorname{pr}' 0[\mathrm{l}]$ и $\mathrm{l} = l + l'$. Назовем вершину $0[l] \in \operatorname{ver}\mathrm{Til}$ *внутренней регулярной*, если $0[l'] \in T'Z'^{\,\mathrm{int}}$. По определению (5.3), указанная вершина $0[l]$ принадлежит внутренности $P'^{\,\mathrm{int}}_\alpha \subset T'Z'^{\,\mathrm{int}}$ одного из многоранников P'_α. Аналогично назовем звезду $\mathrm{St}(0[l])$ с такой вершиной $0[l]$.

Возвращаемся к многогранным звездам (4.4), (4.5). Скажем, что две многогранные звезды $\mathrm{St}(0[l])$ и $\mathrm{St}(0[l_*])$ с внутренними регулярными вершинами $0[l]$ и $0[l_*]$ имеют один и тот же *тип*, обозначим это как

$$\mathrm{St}(0[l]) \sim \mathrm{St}(0[l_*]), \tag{5.5}$$

если одна звезда переводится в другую параллельным сдвигом пространства E.

Теорема 5.1. 1. *Пусть произвольная точка* $0[l']$, *где* $\mathrm{l} = l + l'$ *для* $\mathrm{l} \in \mathbb{Z}^D$, *принадлежит внутренней области* $P'^{\,\mathrm{int}}_\alpha$ *некоторого многогранника* P'_α *из разбиения* (5.1) *зоноэдра* Z'. *Тогда тип* (5.5) *многогранной звезды* $\mathrm{St}(0[l])$ *не зависит от выбора точки* $0[l'] \in P'^{\,\mathrm{int}}_\alpha$.

2. *Если точки* $0[l']$ *и* $0[l'_*]$ *принадлежит внутренним областям разных многогранников* P'_α *и* P'_{α_*} *из разбиения* (5.1), *то многогранные звезды* $\mathrm{St}(0[l])$ *и* $\mathrm{St}(0[l_*])$ *имеют различные типы.*

Доказательство. По предложению 4.1 имеем

$$T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \in_{0[l]} \mathrm{Til} \quad \text{эквивалентно} \quad T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \subset_{0[l']} Z'. \tag{5.6}$$

В силу (4.13), множество всех точек $0[l']$ зоноэдра Z', для которых выполняется включение $T'_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \subset_{0[l']} Z'$, — это в точности параллелепипед

$$T'_{\mathbf{i}'(\mathbf{j})} = \operatorname{pr}' \mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'}) \subset Z', \tag{5.7}$$

являющийся проекцией d'-мерной грани $\mathcal{F}^{d'}(v_{\mathbf{i}\,(\mathbf{j})}, v_{\mathbf{i}'})$ (4.11) единичного куба $\mathcal{C}^D$. Из (5.6) и (5.7) следует, что пересечение

$$P'_\alpha = \bigcap_{T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \in \mathrm{St}(0[l])} T'_{\mathbf{i}'(\mathbf{j})} \tag{5.8}$$

совпадает с одним из многогранников P'_α из разбиения (5.1). Здесь пересечение производится по всем отмеченным параллелепипедам $T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j})$ звезды $\mathrm{St}(0[l])$. Используя (5.6)–(5.8), получаем

$$T_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \in_{0[l]} \mathrm{Til} \quad \text{эквивалентно} \quad 0[l'] \in P'_\alpha, \tag{5.9}$$

откуда следуют оба утверждения теоремы. □

Из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.1. *Пусть* L' *— решетка* (1.5) *и*

$$0[L'] = \{0[l'];\ l' \in L' \cap Z'\} \tag{5.10}$$

— орбита 0 *под действием* L'. *Тогда для количества* $\operatorname{type}\mathrm{St}_{\mathrm{reg}}$ *типов внутренних регулярных многогранных звезд* $\mathrm{St}(0[l])$ *в разбиении* Til *имеет место равенство*

$$\operatorname{type}\mathrm{St}_{\mathrm{reg}} = \sharp\{P'_\alpha \subset T'Z';\ P'^{\,\mathrm{int}}_\alpha \cap 0[L'] \neq \varnothing\}. \tag{5.11}$$

□

Применим следствие 5.1 к двумерному разбиению $\mathbf{Til}^2_2$, изображенному на рис. 1.1. Исключая вырожденные случаи можно считать, что точки орбиты $0[L']$ (5.10) попадают во все многогранники P'_α разбиения $T'Z'$ (5.1) зоноэдра Z', представленного на рис. 5.1. Тогда по формуле (5.11) разбиение $\mathbf{Til}^2_2$ содержит 41 тип внутренних регулярных многогранных звезд $\mathrm{St}(0[l])$.

Подобная ситуация всегда имеет место в случае иррационально вложенного пространства $E' \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^D$ (1.8), когда орбита $0[L']$ (5.10) всюду плотна в зоноэдре Z'. Формула (5.11) в иррациональном случае принимает вид

$$\operatorname{type}\mathrm{St}_{\mathrm{reg}} = \sharp\{P'_\alpha \subset T'Z'\}.$$

5.2. Полная классификация вершин. В теореме 5.1 и следствии 5.1 показано, что *классификация типов* внутренних регулярных многогранных звезд $\mathrm{St}(0[l])$ в разбиении Til (3.1) осуществляется через разбиение $T'Z'$ (5.1) зоноэдра Z' на d'-мерные многогранники P'_α.

Будем далее различать вершины $0[l]$ *внутренние* и *граничные*, для которых, соответственно, $0[l'] \in Z'^{\,\mathrm{int}}$ и $0[l'] \in \partial Z'$. Внутренние вершины являются *стабильными*: при достаточно малых сдвигах вершина сохраняется (не исчезает), хотя тип отвечающей ей звезды $\mathrm{St}(0[l])$ может и меняться. Наоборот, граничные вершины *нестабильны*: при сколь угодно малых сдвигах, выводящих вершины $0[l']$ за пределы зоноэдра Z', они исчезает.

Введем понятие *степени ветвления* вершины $0[l] \in \mathrm{verTil}$ —

$$\deg 0[l] = \sharp\{P'_\alpha \subset T'Z';\ 0[l'] \in P'_\alpha\}. \tag{5.12}$$

С помощью степени ветвления удобно подразделять внутренние и граничные вершины $0[l]$ на *регулярные* $0[l]_{\mathrm{reg}}$ и *особые* или *ветвящиеся* $0[l]_{\mathrm{ram}}$, для которых

$$\deg 0[l]_{\mathrm{reg}} = 1 \quad \text{и} \quad \deg 0[l]_{\mathrm{ram}} \geqslant 2. \tag{5.13}$$

Из определения (5.12) следует, что у регулярных вершин $0[l]_{\mathrm{reg}}$ степень ветвления минимальная. Наибольшую же степень ветвления имеют $0[l]_{\mathrm{ram}} \in \operatorname{ver} \mathrm{Til}$ из множества вершин

$$\operatorname{ver} T'Z' = \bigcup_{\alpha} \operatorname{ver} P'_{\alpha} \tag{5.14}$$

разбиения (5.1) зоноэдра Z'. Так как $\operatorname{ver} T'Z' = \mathrm{pr}' \operatorname{ver} \mathcal{C}^D$, число вершин $\sharp \operatorname{ver} T'Z'$ в (5.14) равно 2^D — числу вершин единичного куба $\mathcal{C}^D$.

Ветвящиеся вершины $0[l]_{\mathrm{ram}}$ отличаются от регулярных $0[l]_{\mathrm{reg}}$ тем, что при сколь угодно малых сдвигах $0[l']_{\mathrm{ram}} \in Z'$ тип отвечающей им звезды $\mathrm{St}(0[l]_{\mathrm{ram}})$ меняться.

§6. Сдвиги сечения

6.1. Послойный рост разбиений и Z'-звезд. В разбиении Til (3.1) построим d-мерную многогранную звезду $\mathrm{St}(0) \subset \mathrm{Til}$ с *начальной вершиной* $p_0 = 0$. По предложению 4.1 звезда $\mathrm{St}(0)$ определяется по d'-мерной звезде $\mathrm{St}'(0) \subset Z'$ в зоноэдре Z'. Итак, имеем

$$Z'_1 = \mathrm{St}'(0), \quad \mathrm{Til}_1 = \mathrm{St}(0)$$

— Z'-звезду и разбиение *первого уровня*. Затем перебирая все вершины из $\operatorname{ver} Z'_0$ и $\operatorname{ver} \mathrm{Til}_0$, приходим к Z'-звезде Z'_2 и разбиению Til_2 *второго уровня.* Повторяя последовательно ту же самую процедуру, слой за слоем, получаем две расширяющиеся последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} Z'_1 & \subset & Z'_2 & \subset \ldots \subset & Z'_r & \subset & Z'_\infty \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & \ldots & \Updownarrow & & \\ \mathrm{Til}_1 & \subset & \mathrm{Til}_2 & \subset \ldots \subset & \mathrm{Til}_r & \subset & \mathrm{Til} \end{array} \tag{6.1}$$

соответственно d'-мерных Z'-звезд Z'_r и отвечающих им d-мерных разбиений Til_r. *Слои вершин* ver'_r, ver_r определяются по индукции:

$$\mathrm{ver}'_r = \operatorname{ver} Z'_r \setminus \operatorname{ver} Z'_{r-1}, \quad \mathrm{ver}_r = \operatorname{ver} \mathrm{Til}_r \setminus \operatorname{ver} \mathrm{Til}_{r-1}, \tag{6.2}$$

для $r \geqslant 1$, где $\mathrm{ver}'_0 = \operatorname{ver} Z'_0 = \{0\}$ и $\mathrm{ver}_0 = \operatorname{ver} \mathrm{Til}_0 = \{0\}$.

Если вместо 0 в зоноэдре Z' за начальную вершину выбрать любую другую вершину $p' \in Z'$, то по предложению 4.1 и (3.3) последовательности (6.1) заменятся на другие последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} Z'_1(p') & \subset & Z'_2(p') & \subset \ldots \subset & Z'_r(p') & \subset & Z'_\infty(p') \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & \ldots & \Updownarrow & & \\ \mathrm{Til}_1(-p') & \subset & \mathrm{Til}_2(-p') & \subset \ldots \subset & \mathrm{Til}_r(-p') & \subset & \mathrm{Til}(-p'), \end{array} \tag{6.3}$$

состоящие из d'-мерных Z'-звезд $Z'_r(p')$ и d-мерных разбиений $\mathrm{Til}_r(-p')$. Здесь для первого уровня выбраны $Z'(p')$-звезда и разбиение

$$Z'_1(p') = \mathrm{St}'(p'), \quad \mathrm{Til}_1(-p') = \mathrm{St}(-p'), \tag{6.4}$$

$$Z'_\infty(p') = \bigcup_{r=1}^{\infty} Z'_r(p'), \tag{6.5}$$

для всех уровней $r = 0, 1, 2, \ldots$ имеют место включения

$$\mathrm{Til}_r(-p') \subset \mathrm{Til}(-p'), \quad \text{где}$$

$$\mathrm{Til}(-p') = \mathrm{Til}^d(-p') = \mathcal{Z}[\mathbb{Z}^D] \cap E[-p'] \tag{6.6}$$

— *сечение* периодического разбиения $\mathcal{Z}[\mathbb{Z}^D]$ d-мерным подпространством $E[-p'] = E - p' \subset \mathbb{R}^D$, получающимся сдвигом E на вектор p' из зоноэдра $Z' \subset E'$. Новое разбиение $\mathrm{Til}(-p')$ также составлено из объединения транслированных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}}[l] = T_{\mathbf{i}} + l$, где $l \in L$, $\mathbf{i} \in \mathcal{D}_d$, получающихся из базисных параллелепипедов $T_{\mathbf{i}} \subset E$ (1.12) сдвигами на векторы решетки $L = \mathrm{pr}\,\mathbb{Z}^D \subset E$ из (1.7).

Отметим, что

$$\mathrm{Til} = \mathrm{Til}(0), \tag{6.7}$$

и в отличие от Til (6.7) разбиение $\mathrm{Til}(-p')$ из (6.6) строится по измененному *правилу* (6.3) с начальной вершиной $p' \in Z'$.

Замечание 6.1. Для упрощения обозначений, условимся, что разбиения $\mathrm{Til}(-p')$ и $\mathrm{Til}_r(-p')$ снова начинаются с нулевой вершины 0. Это не будет приводить к путанице, так как $\mathrm{pr}\,E[-p'] = E$ и $\mathrm{pr}\,E' = 0$ согласно (1.10).

С этим замечанием, по аналогичии с (6.2), *слои вершин* $\mathrm{ver}'_r(p')$ и $\mathrm{ver}_r(-p')$ для $r \geqslant 1$ будут определяться следующим образом:

$$\mathrm{ver}'_r(p') = \mathrm{ver}\,Z'_r(p') \setminus \mathrm{ver}\,Z'_{r-1}(p'),$$
$$\mathrm{ver}_r(-p') = \mathrm{ver}\,\mathrm{Til}_r(-p') \setminus \mathrm{ver}\,\mathrm{Til}_{r-1}(-p'),$$

где $\mathrm{ver}'_0(p') = \mathrm{ver}\,Z'_0(p') = \{p'\}$ и $\mathrm{ver}_0(-p') = \mathrm{ver}\,\mathrm{Til}_0(-p') = \{0\}$.

6.2. Свободные и жесткие разбиения. Согласно диаграмме (6.3) существуем *эпиморфизм*

$$\operatorname{ver}\mathrm{Til}(-p') \xrightarrow{\mathfrak{v}'} \operatorname{ver} Z'_\infty(p') : \quad v' = \mathfrak{v}'(v) \tag{6.8}$$

множества вершин разбиения $\mathrm{Til}(-p')$ на вершины Z'-звезды $Z'_\infty(p')$ из (6.5). Эпиморфизм (6.8) обладает свойством: многогранная звезда $\mathrm{St}(v) \subset \mathrm{Til}(-p')$ в вершине $v \in \operatorname{ver}\mathrm{Til}(-p')$ определяется звездой $\mathrm{St}'(v') \subset Z'(p')$ в вершине $v' = \mathfrak{v}'(v) \in \operatorname{ver} Z'(p')$ звезды $Z'(p')$.

Предложение 6.1. *Пусть v — вершина разбиения* $\mathrm{Til}(-p')$*, см.* (6.6), *и пусть $v' = \mathfrak{v}'(v)$ — соответствующая* (6.8) *ей вершина Z'-звезды $Z'(p')$. Тогда* $\mathrm{Til}(-v') = \mathrm{Til}(-p') - v$.

Доказательство. Согласно замечанию 6.1, оба разбиения $\mathrm{Til}(-v')$ и $\mathrm{Til}(-p')$ начинаются с вершины 0. Искомое равенство выполняется ввиду существования эпиморфизма (6.8). □

С помощью эпиморфизма $\mathfrak{v}'$ устанавливается связь

$$\operatorname{ver} Z'_\infty(p') = \bigcup_{r=1}^{\infty} \operatorname{ver} Z'_r(p') = \mathfrak{v}'(\operatorname{ver}\mathrm{Til}(-p'))$$

между вершинами Z'-звезды $Z'_\infty(p')$ и вершинами разбиения $\mathrm{Til}(-p')$). Назовем Z'-звезду $Z'_\infty(p')$ *свободной*, если найдется вектор $t' \in E'$, $t' \neq 0$, такой что

$$\operatorname{ver} Z'_\infty(p') + t' \subset Z'. \tag{6.9}$$

В противном случае будем говорить, что звезда $Z'_\infty(p')$ является *жесткой*. Эти эпитеты будем также применять к разбиению $\mathrm{Til}(-p')$, соответствующему звезде $Z'_\infty(p')$.

Предложение 6.2. *Пусть* $\mathrm{Til}(-p')$ *— свободное разбиение, $t' \in E'$, $t' \neq 0$, обладает свойством* (6.9) *и, кроме того, пусть*

$$\partial Z'_\infty(p') \oplus [0, t'] \cap \partial T'Z' = \varnothing, \tag{6.10}$$

где $\oplus$ обозначает сумму Минковского, $[0, t']$ — отрезок с началом и концом вектора t' и $\partial T'Z'$ — границы (5.4) *разбиения $T'Z'$. При этих условиях,* $\mathrm{Til}(-p' - \lambda t') = \mathrm{Til}(-p')$ *для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

Доказательство. Это следует из первой части теоремы 5.1, диаграммы (6.3) и замечания 6.1. □

Замечание 6.2. 1. Условие (6.10) означает, что разбиение $\mathrm{Til}(-p')$ не имеет ветвящихся вершин.

2. Если $\mathrm{Til}(-p')$ — разбиение с ветвящимися вершинами, то вектор t' в (6.9) нужно выбирать так, чтобы при сдвигах на $\lambda t'$ сохранялись типы всех многогранных звезд в разбиениях $\mathrm{Til}(-p' - \lambda t')$.

§7. Регуляризация: разрешение ветвлений многогранных звезд

7.1. Ветвление многогранных звезд. Если вершина $0[l] = 0[l]_{\mathrm{ram}}$ ветвящаяся $\deg 0[l]_{\mathrm{ram}} \geqslant 2$, то в многогранной звезде $\mathrm{St}(0[l])$, образующие ее параллелепипеды могут накладываться друг на друга. Тогда возникает ситуация *неопределенности* (ambiguity). В действительности, ветвящаяся звезда $\mathrm{St}(0[l])$ — это *пакет* наложенных друг на друга обычных многогранных звезд.

В этом разделе обсудим способы, как можно *разрешать неопределенности*, т. е. производить выбор одной из многогранных звезд пакета.

7.2. Пучок гиперплоскостей и α-направления. Пусть $\varepsilon' \subset e'$ — любой набор из $d'-1$ векторов множества $e' = \{e'_1, \dots, e'_D\} = \mathrm{pr}'\varepsilon$ (1.4), $\mathrm{hp}'(\varepsilon')$ — порождаемая ими гиперплоскость в пространстве E' и sh' — *пучок* (*sheaf of hyperplanes*) из всех гиперплоскостей $\mathrm{hp}'(\varepsilon')$. Зададим конечное разбиение

$$E' = \bigcup_{\alpha} \angle'_\alpha \tag{7.1}$$

пространства E' на многогранные *конусы* $\angle'_\alpha$ с условием

$$\angle'^{\,\mathrm{int}}_\alpha \cap \mathrm{hp}'(\varepsilon') = \varnothing, \quad \angle'^{\,\mathrm{int}}_\alpha \cap \angle'^{\,\mathrm{int}}_\beta = \varnothing$$

для всех $\varepsilon' \subset e'$ и $\alpha \neq \beta$. Для произвольного конуса $\angle'_\alpha$ из разбиения (7.1) *α-направлением* ϱ' назовем любой вектор

$$\varrho' = \varrho'_\alpha \subset \angle'^{\,\mathrm{int}}_\alpha \quad \text{с} \quad |\varrho'| = 1. \tag{7.2}$$

7.3. Разбиение вершин Z'-звезды. Пусть $\mathrm{Til}(-p')$ — разбиение с Z'-звездой $Z'_\infty(p')$ и пусть $\mathrm{Til}_r(-p') \subset \mathrm{Til}(-p')$ и $Z'_r(p') \subset Z'_\infty(p')$, соответственно, разбиение и Z'-звезда уровня $r = 0, 1, 2, \dots$. Определим

$$\begin{aligned} \mathrm{ver}_{\,\mathrm{int}}\, Z'_r(p') &= \mathrm{ver}\, Z'_r(p') \,\cap\, Z'^{\,\mathrm{int}}, \\ \mathrm{ver}^{\mathrm{int}}\, Z'_r(p') &= \mathrm{ver}\, Z'_r(p') \,\cap\, T'Z'^{\,\mathrm{int}} \end{aligned} \tag{7.3}$$

— множества вершин из $\operatorname{ver} Z'_r(p')$, попавших внутрь зоноэдра Z' и, соответственно, во внутренние области $T'Z'^{\,\mathrm{int}}$ (5.3) его разбиения $T'Z'$;

$$\operatorname{ver}_\partial Z'_r(p') = \operatorname{ver} Z'_r(p') \,\cap\, \partial Z', \tag{7.4}$$

$$\operatorname{ver}^\partial Z'_r(p') = \operatorname{ver} Z'_r(p') \,\cap\, (\partial T'Z' \setminus \partial Z') \tag{7.5}$$

— множества вершин, лежащих на границе зоноэдра Z' и, соответственно, на внутренних границах $\partial T'Z' \setminus \partial Z'$ (5.4) разбиения $T'Z'$.

Граничные вершины (7.4) разобъем на две части:

$$\operatorname{ver}_\partial Z'_r(p') = \operatorname{ver}^+_{\partial,\alpha} Z'_r(p') \,\cup\, \operatorname{ver}^-_{\partial,\alpha} Z'_r(p'). \tag{7.6}$$

Множество $\operatorname{ver}^+_{\partial,\alpha} Z'_r(p')$ состоит из вершин $v' \in \operatorname{ver}_\partial Z'_r(p')$, попадающих внутрь зоноэдра $v' + \lambda\varrho' \in Z'^{\,\mathrm{int}}$ при сдвиге на вектор $\lambda\varrho'$ с любым достаточно малым коэффициентом $\lambda > 0$. Второе множество $\operatorname{ver}^-_{\partial,\alpha} Z'_r(p')$ дополняет первое множество. Оно состоит из вершин v', покидающих зоноэдр $v' + \lambda\varrho' \notin Z'$ при сдвиге на любой вектор $\lambda\varrho'$ с коэффициентом $\lambda > 0$. Из определений (2.6) зоноэдра Z' и α-направления (7.2) следует независимость множеств $\operatorname{ver}^\pm_{\partial,\alpha} Z'_r(p')$ от выбора $\varrho' = \varrho'_\alpha$ из конуса $\angle'^{\,\mathrm{int}}_\alpha$.

Приведенные выше разбиения (7.3)–(7.6) позволяют провести систематическую классификацию вершин зоноэдра Z'.

Классификация вершин v' зоноэдра Z' (7.7)

(1) *стабильные регулярные*: $v' \in \operatorname{ver}^{\mathrm{int}} Z'_r(p')$;

(2) *стабильные ветвящиеся*: $v' \in \operatorname{ver}^\partial Z'_r(p')$;

(3) *нестабильные регулярные*: $v' \in \operatorname{ver}^-_{\partial,\alpha} Z'_r(p')$, $\deg v' = 1$;

(4) *нестабильные ветвящиеся*: $v' \in \operatorname{ver}^-_{\partial,\alpha} Z'_r(p')$, $\deg v' \geqslant 2$.

Напомним, степени ветвления вершин $\deg v'$ определены в (5.12).

В пункте 5.2 приведена развернутая классификация вершин разбиений $\operatorname{Til}(-p')$ с определениями и комментариями. Сейчас удобно, используя классификацию для зоноэдра (7.7), сопоставить ее с классификацией вершин самих разбиений $\operatorname{Til}(-p')$. Ниже под *малыми сдвигами* понимаются сдвиги разбиений $\operatorname{Til}(-p') \to \operatorname{Til}(-p'-t')$ на ненулевые векторы $t' \in E'$ достаточно малой длины.

Классификация вершин разбиения $\mathrm{Til}(-p')$ (7.8)

(1) *стабильные регулярные* : сохраняющиеся при малых сдвигах с постоянной многогранной звездой;

(2) *стабильные ветвящиеся* : сохраняющиеся при малых сдвигах с меняющейся многогранной звездой;

(3) *нестабильные регулярные* : исчезающие при некоторых малых сдвигах с постоянной многогранной звездой;

(4) *нестабильные ветвящиеся* : исчезающие при некоторых малых сдвигах с меняющейся многогранной звездой.

7.4. Разрешение ветвлений. Нам потребуется следующий *алгоритм регуляризации.*

Шаг 1. *Для произвольного α-направления $\varrho' = \varrho'_\alpha$ выберем достаточно малый коэффициент $\lambda_1 > 0$ так, чтобы выполнялось включение*

$$(\mathrm{ver}_{\,\mathrm{int}}\, Z'_r(p') + \lambda_1\varrho') \cup (\mathrm{ver}^{+}_{\partial,\alpha}\, Z'_r(p') + \lambda_1\varrho') \subset T'Z'^{\,\mathrm{int}} \tag{7.9}$$

для множеств вершин из (7.3) *и* (7.6). *Данное условие означает, что все вершины из левой части в* (7.9) *являются регулярными. Снова вспоминая определения зоноэдра Z'* (2.6) *и α-направления* (7.2), *убеждаемся в возможности указанного выше выбора коэффициент λ_1.*

Шаг 2. *Если потребуется, заменим коэффициент λ_1 на ме́ньший $\lambda = \lambda_2$, где $0 < \lambda_2 \leqslant \lambda_1$, и рассмотрим разбиение $\mathrm{Til}_r(-p' - \lambda\varrho')$ с Z'-звездой $Z'_r(p' + \lambda\varrho')$. Выбирать новый коэффициент λ будем так, чтобы*

$$\mathrm{ver}\, Z'_r(p' + \lambda\varrho') - \lambda\varrho' \subset \mathrm{ver}\, Z'_r(p'). \tag{7.10}$$

Лемма 7.1. 1. *Определенная равенством*

$$Z'_{r,\alpha}(p') \;=\; Z'_r(p' + \lambda\varrho') - \lambda\varrho' \subset Z' \tag{7.11}$$

Z'-звезда зависит только от конуса $\angle'^{\,\mathrm{int}}_{\alpha} \subset E'$ (7.1), *из которого взято α-направление $\varrho' = \varrho'_\alpha$.*

2. *Все вершины Z'-звезды* (7.11) *регулярны* (5.13) *и связаны с вершинами Z'-звезды $Z'_r(p')$ включением* (7.10). *Более точно,*

$$\mathrm{ver}\, Z'_{r,\alpha}(p') \;=\; \mathrm{ver}\, Z'_r(p') \setminus \mathrm{ver}^{-}_{\partial,\alpha}\, Z'_r(p'), \tag{7.12}$$

где $\operatorname{ver}^{-}_{\partial,\alpha} Z'_r(p')$ *— множество вершин из* (7.6).

Доказательство. Это следует из алгоритма (7.9)–(7.10) и определений (2.6) зоноэдра Z' и α-направлений (7.2), так как из (7.2) следует, что любое α-направление $\varrho' = \varrho'_\alpha$ *трансверсально* — непараллельно — всем границам Z' и его разбиения $T'Z'$ (5.1) $\square$

Как прямое следствие из леммы 7.1 получаем следующее утверждение относительно разбиений.

Теорема 7.1. *Пусть* $\operatorname{Til}_{r,\alpha}(-p') = \operatorname{Til}_r(-p' - \lambda\varrho') + \lambda\varrho'$ *— разбиение уровня* r *с* Z'*-звездой* $Z'_{r,\alpha}(p')$*, см.* (7.11). *Тогда все вершины разбиения* $\operatorname{Til}_{r,\alpha}(-p')$ *регулярны* (5.13) *и связаны с вершинами первоначального разбиения* $\operatorname{Til}_r(-p')$ *включением* $\operatorname{ver}\operatorname{Til}_{r,\alpha}(-p') \subset \operatorname{ver}\operatorname{Til}_r(-p')$. $\square$

Согласно равенству (7.12) вершины v' из множества $\operatorname{ver}^{-}_{\partial,\alpha} Z'_r(p')$ — это нестабильные вершины, поскольку они *исчезают* (7.12) при применении алгоритма регуляризации (7.9)–(7.10). Чтобы указать связь вершин v' с α-направлением, назовем такие вершины *α–нестабильными.* При выборе другого конуса $\angle'_\beta$ из разбиения пространства E' (7.1) и соответствующего вектора ϱ'_β из внутренней области $\angle'^{\,\mathrm{int}}_\beta$ вершина v' может оказаться *β–стабильной.*

Таким образом, стабильность граничных вершин $v' \in \operatorname{ver}_\partial Z'_r(p')$ (7.4) — вершин, лежащих на границе зоноэдра Z' — зависит от выбора α-направления. Те же самые рассуждения касаются вершин $v \in \operatorname{ver}\operatorname{Til}_r(-p')$ разбиения $\operatorname{Til}_r(-p')$.

Теперь рассмотрим два разбиения $\operatorname{Til}_{r_1}(-p')$ и $\operatorname{Til}_{r_2}(-p')$ разных уровней $r_1 < r_2$. Эти разбиения связаны включением

$$\operatorname{Til}_{r_1}(-p') \subset \operatorname{Til}_{r_2}(-p'), \tag{7.13}$$

означающим, что первое разбиение является частью второго, т.е. при переходе с одного уровня к другому *сохраняется наследственность* разбиений. Алгоритм регуляризации (7.9)–(7.10) сохраняет наследственность (7.13), т.е. $\operatorname{Til}_{r_1,\alpha}(-p') \subset \operatorname{Til}_{r_2,\alpha}(-p')$. Данное свойство позволяет перейти к пределу и определить бесконечное разбиение

$$\operatorname{Til}_\alpha(-p') = \operatorname{Til}_{\infty,\alpha}(-p') = \bigcup_{r=0}^{\infty} \operatorname{Til}_{r,\alpha}(-p'). \tag{7.14}$$

Из теоремы 7.1 и алгоритма регуляризации (7.9)–(7.10) вытекает

Следствие 7.1. 1. *Определенное в* (7.14) *разбиение* $\mathrm{Til}_\alpha(-p')$ *состоит из базисных параллелепипедов* $T_{\mathbf{i}} \subset E$ (1.12), *как и исходное разбиение* $\mathrm{Til}(-p')$ *из* (3.1).
2. *Все вершины разбиения* $\mathrm{Til}_\alpha(-p')$ *являются регулярными* (5.13) *и связаны с вершинами начального разбиения* $\mathrm{Til}(-p')$ *включением*

$$\mathrm{ver}\,\mathrm{Til}_\alpha(-p') \subset \mathrm{ver}\,\mathrm{Til}(-p').$$

3. *При регуляризации* $\mathrm{Til}(-p') \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Til}_\alpha(-p')$ *разбиения* $\mathrm{Til}(-p')$, *его вершины ведут себя согласно классификации* (7.8). $\square$

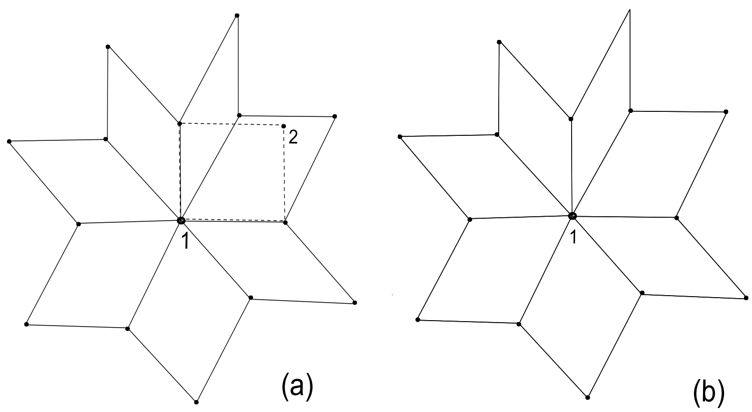

Рис. 7.1. Два типа вершин разбиения $\mathbf{Til}_2^2$.

На рис. 7.1(a) показана многогранная звезда $\mathrm{St}(v_1)$ разбиения $\mathbf{Til}_2^2$, представленного на рис. 1.1. Вершина звезды v_1 является стабильной ветвящейся (7.8) (2): при малых сдвигах сама вершина v_1 сохраняется, а окружающая ее звезда $\mathrm{St}(v_1)$ меняется, т. е. происходит выбор одной из возможных звезд пакета в вершине v_1. Другая выделенная вершина v_2, также входящая в звезду $\mathrm{St}(v_1)$, – нестабильная регулярная (7.8) (3): при малых сдвигах вершина v_2 исчезает. На рис. 7.1(b) показана регуляризация $\mathrm{St}_\alpha(v_1)$ звезды $\mathrm{St}(v_1)$.

Список литературы

1. P. Arnoux, V. Berthé, S. Ito, *Discrete planes, $\mathbb{Z}^2$-actions, Jacobi–Perron algorithm and substitutions.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, No. 2 (2002), 305–349.

2. V. Berthé, L. Vuillon, *Tilings and rotations on the torus: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences.* — Discrete Math. **223** (2000), 27–53.
3. V. Berthé, A. Siegel, J. Thuswaldner, *Substitutions, Rauzy fractals and tilings.* — Combinatorics, Automata and Number Theory. Encyclopedia Math. Appl., vol. **135**, Cambridge Univ. Press, 2010, 248–323.
4. S. Ito, M. Ohtsuki, *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms.* — Tokyo J. Math. **16**, No. 2 (1993), 441–472.
5. S. Ito, M. Ohtsuki, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm.* — Tokyo J. Math. **17**, No. 1 (1994), 33–58.
6. В. Г. Журавлев, *Универсальные ядерные разбиения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **490** (2020), 49–93.
7. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН, сер. матем. **71** (2007), No. 2, 89–122.
8. G. Rauzy, *Nombres algeébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
9. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе.* — Записки научных семинаров ПОМИ **322** (2005), 83–106.
10. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, Москва, 1980; англ. пер.: I. P. Kornfel'd, Ya. G. Sinai, S. V. Fomin, *Ergodic theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 245, Springer-Verlag, New York (1982).
11. Ch. Oguey, M. Duneau, A. Katz, *A geometrical approach of quasiperiodic tilings.* — Commun. Math. Phys. **118** (1988), 99–118.
12. R. Penrose *Role of aesthetics in pure and applied mathematical research.* — Bull. Inst. Maths. Appl. **10** (1974), 266–271.
13. N. G. deBruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane.* — Nederl. Akad. Wtensh. Proc. **A84** (1981), 39–66.
14. A. Katz, *Theory of matching rules for the* 3*-dimensional Penrose tilings.* — Commun. Math. Phys. **118** (1988), 263–288.
15. Thang T. Q. Le, *Local Rules for Quasiperiodic Tilings.* — The mathematics of long-range aperiodic order (Waterloo, ON, 1995), 331–366, Kluwer, Dordrecht (1997).
16. P. J. Steinhardt, *New perspectives on forbidden symmetries, quasicrystals, and Penrose tilings.* — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93** (1996), 14267–14270.
17. В. Г. Журавлев, *Параметризация двумерного квазипериодического разбиения Рози.* — Алгебра и анализ **22** (2010), 21–56.
18. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.

Zhuravlev V. G. Local rules for quasi-periodic tilings.

The tilings of any dimension d and codimension d' are considered. Such tilings are obtained as sections of a periodic hyper-tiling $\subset \mathbb{R}^D$ by d-dimensional subspace E of the hyperspace $\mathbb{R}^D$ of dimension $D = d + d'$. By using the projection of the unit D-dimensional cube to the space E' orthogonal to E, local matching rules are established that determine the local structure of the tiling. In general, the tilings considered may contain ramificated vertices. In the multi-faceted stars of such vertices the polyhedra can overlap each other. A regularization algorithm is given that allows the selection of one of the polyhedral stars of the package.

Владимирский
государственный университет
пр. Строителей, 11,
600024, Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 5 апреля 2024 г.