

В. Г. Журавлев

## МНОГОМЕРНЫЙ АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

### ВВЕДЕНИЕ

**0.1. Многомерное обобщение алгоритма Евклида.** Как известно [1], обычные или одномерные цепные дроби строятся на основе алгоритма Евклида деления с остатком. Имеется несколько многомерных обобщений алгоритма Евклида и их всевозможных применений к теории многомерных цепных дробей (см., например, [2–9]). Прекрасный обзор трехмерных алгоритмов с подробными их характеристиками содержится в работе Лаббе [10].

В настоящей статье для произвольной размерности  $d = 1, 2, 3, \dots$  предлагается обобщение алгоритма Евклида, близкое к рассмотренному Бруном [5]. По конструкции наш алгоритм (*М-алгоритм*) проще алгоритма Бруна. Так, в трехмерном случае *М-алгоритм* определяется четырьмя элементарными преобразованиями, а у Бруна – шестью.

**0.2. Многомерные приближения.** *М-алгоритм* работает двояким образом: 1) с его помощью можно находить  $d$ -мерные приближения; и 2) получать аппроксимацию линейных форм от  $d + 1$  переменной.

В основе этих применений лежит матричное разложение заданного вещественного вектора  $(\alpha, -1)$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  имеет произвольные неотрицательные координаты, в произведение  $2d$  элементарных матриц – аналога неполных частных для обычных цепных дробей, когда  $d = 1$ . Зная матричное разложение, можно вычислить рациональные вершины (подходящие дроби) некоторого  $d$ -мерного симплекса, внутри которого содержится аппроксимируемая точка  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  (см. теорему 2.1).

Ранее на иных идеях [11] (см. также [12]) был построен симплексыдерный алгоритм, но уже с другим аппроксимационным  $d$ -мерным симплексом.

---

*Ключевые слова:* алгоритм Евклида, многомерные приближения, многомерные цепные дроби.

**0.3. Аппроксимация линейных форм.** Произведение элементарных матриц из матричного разложения вектора  $(\alpha, -1)$  — это квадратная матрица размера  $d + 1$ . Каждая ее строка определяет свою линейную форму. Формы распределяются на два класса:  $d$  форм принимают положительные значения, а одна — отрицательное. Для последней формы  $\mathcal{M}$ -алгоритм позволяет находить приближения. Другие методы приближения содержатся в [13, 14] для тернарных линейных форм и в [15] — для произвольной размерности.

**0.4. Практическое применение.** В параграфе 3 на примере размерности  $d = 2$ , когда появляются три линейные формы от трех переменных, продемонстрированы характерные особенности и эффекты работы  $\mathcal{M}$ -алгоритма.

За начальную аппроксимируемую точку выбрана  $\alpha = (\pi, \pi^2)$ , где  $\pi = 3.14\dots$  — известная трансцендентная константа. Скорость приближения линейными формами оценивалась через диофантовы экспоненты. Если поставить задачу получения хороших приближений, при которых диофантовы экспоненты принимают большие значения, то необходимо учитывать поведение сразу всех (в нашем случае трех) линейных форм. Проведенные вычисления показали, что на пиках максимальная экспонента принимает значения, превышающие величину 1.3. Следовательно,  $\mathcal{M}$ -алгоритм, согласно неравенству (3.10), позволяет получать нетривиальные приближения линейными формами. Для линейных форм от трех переменных такие приближения считаются нетривиальными.

Доказано существование приближений (см., например, [16, 17]) с диофантовыми экспонентами, сколь угодно близкими к 2, но частоту появления и возможность нахождения таких максимальных экспонент удается получить только в особых случаях [13]–[15].

## §1. МАЖОРАНТНЫЙ АЛГОРИТМ

**1.1. Определение  $\mathcal{M}$ -алгоритма.** Пусть  $e_1, \dots, e_d, e_{d+1}$  — единичный базис  $(d + 1)$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^{d+1}$ ,

$$\mathbf{e}_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_d = e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{d+1} = -e_{d+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

и пусть

$$\mathbf{C} = \{(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1 \geq 0, \dots, x_d \geq 0, x_{d+1} \leq 0\} \quad (1.2)$$

– многогранный конус с ребрами, направленными вдоль векторов (1.1).

Записывая векторы  $v \in \mathbf{C}$  в виде столбцов

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \\ v_{d+1} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

определим отображение

$$\mathbf{C} \ni v \xrightarrow{\mathcal{A}} v' \in \mathbf{C}, \quad (1.4)$$

где

$$v' = \mathcal{A}v = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_d \\ v'_{d+1} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

следующим образом. Пусть координата  $v_k$  с минимальным номером  $k = 1, \dots, d$  обладает свойством  $v_k \geq v_{k'}$  для всех  $k' = 1, \dots, d, k' \neq k$ . Тогда в определении отображения  $\mathcal{A}$  полагаем

$$v' = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k + v_{d+1} \\ \vdots \\ v_d \\ v_{d+1} \end{pmatrix}, \quad \text{если } v_k + v_{d+1} \geq 0; \quad (1.6)$$

$$v' = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_d \\ v_k + v_{d+1} \end{pmatrix}, \quad \text{если } v_k + v_{d+1} < 0. \quad (1.7)$$

Определенное в (1.4)–(1.7) отображение  $\mathcal{A}$  назовем *мажорантным алгоритмом* или кратко – *М-алгоритмом*.

Пусть  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$  – произвольный конечно порожденный  $\mathbb{Z}$ -модуль из поля  $\mathbb{R}$ , т. е.

$$\mathcal{M} = \mathbb{Z}[\mu_1, \dots, \mu_s], \quad (1.8)$$

где  $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$  и  $\mathbb{Z}$  – кольцо целых рациональных чисел; и пусть

$$\mathcal{M}^{d+1} = \underbrace{\mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{M}}_{(d+1)\text{-раз}} \subset \mathbb{R}^{d+1}. \quad (1.9)$$

Обозначим через

$$\mathbf{C} |_{\mathcal{M}} = \mathbf{C} \cap \mathcal{M}^{d+1} \quad (1.10)$$

подмножество точек конуса (1.2) с координатами из модуля  $\mathcal{M}$ . Из определения (1.4)–(1.7) отображения  $\mathcal{A}$  следует, что его ограничение на подмножество  $\mathbf{C} |_{\mathcal{M}} \subset \mathbf{C}$  также задает на нем отображение

$$\mathbf{C} |_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathbf{C} |_{\mathcal{M}}. \quad (1.11)$$

**1.2. Алгоритм Евклида.** Если в качестве  $\mathbb{Z}$ -модуля (1.8) взять кольцо целых чисел  $\mathcal{M} = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[1]$ , в качестве  $v$  (1.3) – вектор с координатами

$$v_1 = a_1, \dots, v_d = a_d, v_{d+1} = -b, \quad (1.12)$$

где  $a_1 \geq 0, \dots, a_d \geq 0, b > 0$  – целые числа, и повторить отображение (1.4) достаточное количество раз

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \\ -b \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \dots \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

то через конечное число шагов получим вектор (справа в (1.13)) с последней координатой  $c$ , равной  $\text{g.c.d.}(a_1, \dots, a_d, b)$  – наибольшему общему делителю чисел (1.12).

Таким образом,  $\mathcal{M}$ -алгоритм (1.4)–(1.7), ограниченный на модуль  $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$ , представляет собою многомерное обобщение *алгоритма Евклида*. Для размерности  $d = 1$  – это обычный алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя  $\text{g.c.d.}(a, b)$  двух чисел  $a, b$ . Более точно, – это алгоритм Евклида, в котором вместо операции деления с остатком, используется более элементарная операция вычитания.

**1.3. Матричная запись  $\mathcal{M}$ -алгоритма.** Во многих случаях, вместо координатной записи (1.4)–(1.7)  $\mathcal{M}$ -алгоритма, оказывается более удобным использовать язык матриц. С этой целью определим следующие

элементарные матрицы вида

$$E_k^{k,d+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (k) \quad (1.14)$$

и – еще один дополнительный вид матриц

$$E_{d+1}^{k,d+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (k), \quad (1.15)$$

где  $k = 1, \dots, d$ . Отображение (1.5) можно представить в виде умножения матриц

$$A : v \mapsto v' = E_k^{k,d+1} \cdot v, \quad \text{если } v_k + v_{d+1} \geq 0; \quad (1.16)$$

$$A : v \mapsto v' = E_{d+1}^{k,d+1} \cdot v, \quad \text{если } v_k + v_{d+1} < 0. \quad (1.17)$$

## §2. МНОГОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

**2.1. Расширенная полугруппа преобразований.** Обозначим через  $\mathcal{E}$  полугруппу, порожденную элементарными матрицами  $E_k^{k,d+1}$  и  $E_{d+1}^{k,d+1}$  соответственно из (1.14) и (1.15). Отметим, что по определению полугруппа  $\mathcal{E}$  не содержит единичной матрицы. Расширим  $\mathcal{E}$  до полугруппы  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$ , добавляя к ней все перестановки  $s \in \mathcal{S}$  первых  $d$  координат:

$$s \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{s(1)} \\ \vdots \\ x_{s(d)} \\ x_{d+1} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Пусть  $\mathbf{C}$  – конус (1.2). Исключим из него верхнюю координатную гиперплоскость:

$$\mathbf{C}_- = \{x \in \mathbf{C} : x_{d+1} < 0\}. \quad (2.2)$$

**Лемма 2.1.** *Конус  $\mathbf{C}_-$  замкнут относительно действия полугруппы  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$ , т. е.*

$$M^{-1} \cdot \mathbf{C}_- \subseteq \mathbf{C}_- \quad \text{для каждой матрицы } M \in \langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle. \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Очевидно, из определения (2.1) следует включение (2.3) для матриц  $M$  из группы перестановок  $\mathcal{S}$ . Для матриц (1.14) и (1.15) обратные матрицы имеют вид

$$(E_k^{k,d+1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (k) \quad (2.4)$$

(k)

и

$$(E_{d+1}^{k,d+1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (k), \quad (2.5)$$

(k)

где  $k = 1, \dots, d$ . Используя формулы (2.4), (2.5) проверяем (2.3) для матриц  $M$  из  $\mathcal{E}$ .  $\square$

Выделим из  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$  подполугруппу  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle'$  матриц

$$M = * \cdots \cdots E_{k'}^{k',d+1} \cdots \cdots *, \quad (2.6)$$

в разложении которых содержится хотя бы по одному разу элементарные матрицы  $E_{k'}^{k',d+1}$  из (1.14) для всех  $k' = 1, \dots, d, d+1$ .

Как следствие из леммы 2.1 получается

**Предложение 2.1.** *Пусть  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}$  – векторы (1.1) и  $M$  – матрица из полугруппы  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle'$ . Тогда имеют место включения*

$$M^{-1} \cdot \mathbf{e}_k \in \mathbf{C}_- \quad (2.7)$$

для всех  $k = 1, \dots, d, d+1$ .

**2.2. Центральная проекция.** Определим *центральную проекцию*

$$\mathbf{C}_- \xrightarrow{\text{pr}_{-1}} \mathbf{H}_{-1} : \quad (2.8)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \mapsto x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \\ x'_{d+1} \end{pmatrix},$$

где  $x'_1 = x_1/(-x_{d+1}), \dots, x'_d = x_d/(-x_{d+1}), x'_{d+1} = -1$ , на *гиперплоскости*

$$\mathbf{H}_{-1} = \{x \in \mathbf{C}; x_{d+1} = -1\} \subset \mathbf{C}_-. \quad (2.9)$$

Так определить проекцию  $\text{pr}_{-1}$  возможно, поскольку согласно (2.2) точки  $x$  конуса  $\mathbf{C}_-$  имеют последнюю координату  $x_{d+1} < 0$ .

**2.3. Расширенный  $\mathcal{M}$ -алгоритм.** Расширим  $\mathcal{M}$ -алгоритм (1.4), (1.16), (1.17) с действия полугруппы  $\mathcal{E}$  на полугруппу  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$ , полагая

$$\mathcal{S}\mathcal{A} : v \mapsto v' = E_*^{*,*} \cdot v \quad (2.10)$$

для элементарных матриц  $E_*^{*,*} = E_k^{k,d+1}$  или  $E_{d+1}^{k,d+1}$  из (1.14), (1.15), и

$$\mathcal{S}\mathcal{A} : v \mapsto v' = s \cdot v \quad (2.11)$$

для *перестановочных матриц*  $s \in \mathcal{S}$  из (2.1). Так определенный алгоритм будем называть *расширенным  $\mathcal{M}$ -алгоритмом*.

**Замечание 2.1.** Добавление к  $\mathcal{M}$ -алгоритму перестановочных матриц  $s \in \mathcal{S}$  не является существенным фактором. Обычно матрицы  $s$  добавляется в конце  $\mathcal{M}$ -алгоритма лишь при исследовании векторов  $v$ , имеющих алгебраические координаты, с целью получить более короткие рекуррентные формулы аппроксимации.

Фиксируем некоторый вектор  $v$  в конусе  $\mathbf{C}_-$ . Не уменьшая общности, можем считать, что выбранный вектор имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

принадлежит  $d$ -мерному конусу  $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , состоящему из точек с неотрицательными координатами.

Подействуем на вектор (2.12)  $\mathcal{M}$ -алгоритмом несколько раз –

$$v \xrightarrow{M_1} M_1 v \xrightarrow{M_2} M_2 M_1 v \xrightarrow{M_3} \dots \xrightarrow{M_n} M_n \dots M_2 M_1 v. \quad (2.13)$$

Согласно определению (2.10), (2.11) каждая матрица  $M_i$  в последовательности (2.13) равна некоторой элементарной матрице или перестановочной матрице. Введем следующие обозначения

$$v' = Mv, \quad \text{где} \quad M = M_n \dots M_2 M_1 \quad (2.14)$$

– матрица из полугруппы  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle$ . Данная матрица

$$M = M \left( \mathcal{A}; \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, n \right) \quad (2.15)$$

однозначно определяется начальной точкой (2.12) и количеством шагов  $n$  в  $\mathcal{ME}$ -алгоритме (1.4). Из определений (1.14), (1.15) и (2.1) следует, что  $M$  – это *унимодулярная матрица* с неотрицательными целыми коэффициентами. Далее всегда будем предполагать, что матрица  $M$  принадлежит полугруппе  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle'$ , т. е. имеет вид (2.6).

**2.4. Прообразы единичных векторов.** Подействуем на единичные векторы (1.1) обратной матрицей  $M^{-1}$  для матрицы из (2.14):

$$M^{-1} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}'_k. \quad (2.16)$$

Из предложения 2.1 и формул (2.4), (2.5) для обратных элементарных матриц следует, что образы  $\mathbf{e}'_k$  имеют вид

$$\mathbf{e}'_k = \begin{pmatrix} p_{1k} \\ \vdots \\ p_{dk} \\ -q_k \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

с координатами  $p_{1k} \geq 0, \dots, p_{dk} \geq 0, q_k \geq 1$ , являющимися целыми числами. Поэтому к векторам  $\mathbf{e}'_k$  можно применить центральную проекцию  $\text{pr}_{-1}$  из (2.8). Получим вектор

$$\text{pr}_{-1} \mathbf{e}'_k = \begin{pmatrix} p_{1k}/q_k \\ \vdots \\ p_{dk}/q_k \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

принадлежащий гиперплоскости  $\mathbf{H}_{-1}$  (2.9). В дальнейшем удобно для вектора (2.18) использовать сокращение

$$\text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_k = \begin{pmatrix} p_k/q_k \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } p_k/q_k = \begin{pmatrix} p_{1k}/q_k \\ \vdots \\ p_{dk}/q_k \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

**2.5. Конусы и симплексы.** Определим *многогранный конус*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}[\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_d, \mathbf{e}'_{d+1}] = \{\lambda_1\mathbf{e}'_1 + \dots + \lambda_d\mathbf{e}'_d + \lambda_{d+1}\mathbf{e}'_{d+1}; \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \quad (2.20)$$

с ребрами, направленными вдоль векторов (2.17). Здесь  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  обозначает множество вещественных неотрицательных чисел. В терминах (2.20) конус (1.2) запишется как

$$\mathbf{C} = \mathbb{R}_{\geq 0}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}]. \quad (2.21)$$

**Лемма 2.2.** Пусть  $M$  принадлежит  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S}' \rangle$ , см. (2.6),  $\mathbf{C}_-$  – конус (2.2),  $v$  – вектор из последовательности (2.13). Тогда

$$\mathbb{R}_{\geq 0}[\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_d, \mathbf{e}'_{d+1}] \subset \mathbf{C}_- \quad \text{и} \quad v \in \mathbb{R}_{\geq 0}[\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_d, \mathbf{e}'_{d+1}]. \quad (2.22)$$

**Доказательство.** Применяя предложение 2.1, из условия принадлежности матрицы  $M$  полугруппе  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S}' \rangle$  выводим первое включение. Из определения расширенного  $M$ -алгоритма (2.10), (2.11) вытекает включение

$$v' = Mv \in \mathbb{R}_{\geq 0}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}],$$

что означает существование разложения

$$v' = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_d\mathbf{e}_d + x_{d+1}\mathbf{e}_{d+1} \quad (2.23)$$

вектора  $v'$  с коэффициентами  $x_k \geq 0$  для  $k = 1, \dots, d, d+1$ . Умножая на матрицу  $M^{-1}$  правую и левую части равенства (2.23) и вспоминая определение (2.16) векторов  $\mathbf{e}'_k$ , получаем разложение

$$v = x_1\mathbf{e}'_1 + \dots + x_d\mathbf{e}'_d + x_{d+1}\mathbf{e}'_{d+1} \quad (2.24)$$

вектора  $v$  с теми же коэффициентами, что и равенстве (2.23). Из разложения (2.24) вытекает второе включение (2.22).  $\square$

Рассмотрим  $d$ -мерный симплекс

$$\begin{aligned} \text{Simp}_{-1}(\text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_1, \dots, \text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_d, \text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_{d+1}) \\ = \mathbb{R}_{\geq 0}[\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_d, \mathbf{e}'_{d+1}] \cap \mathbf{H}_{-1}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

получающийся *сечением* конуса (2.20) гиперплоскостью  $\mathbf{H}_{-1}$  из (2.9). Согласно (2.19), данный симплекс имеет  $d + 1$  *вершину*

$$\text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_k = \begin{pmatrix} p_k/q_k \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, d, d + 1.$$

Далее воспользуемся *биекцией*

$$\mathbf{H}_{-1} \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}_{\geq 0}^d : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Поскольку симплекс (2.25) по определению содержится в  $d$ -мерной гиперплоскости  $\mathbf{H}_{-1}$ , то, вспоминая обозначения (2.19) и используя биекцию (2.26), указанный симплекс можно отождествить с другим, также  $d$ -мерным симплексом

$$\begin{aligned} & \text{Simp}\left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_d}{q_d}, \frac{p_{d+1}}{q_{d+1}}\right) \\ &= \left\{ \lambda_1 \frac{p_1}{q_1} + \dots + \lambda_d \frac{p_d}{q_d} + \lambda_{d+1} \frac{p_{d+1}}{q_{d+1}}; \lambda_1 + \dots + \lambda_d + \lambda_{d+1} = 1, \lambda_k \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

но уже содержащимся в конусе  $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$ .

**Теорема 2.1.** Пусть вектор  $v$  из последовательности (2.13) имеет

вид  $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ , где  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$  принадлежит  $d$ -мерному конусу

$\mathbb{R}_{\geq 0}^d$ , и пусть матрица  $M$  из (2.14) принадлежит полугруппе  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{S} \rangle'$ , т. е. имеет вид (2.6). Тогда, см. (2.27), имеем

$$\alpha \in \text{Simp}\left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_d}{q_d}, \frac{p_{d+1}}{q_{d+1}}\right). \quad (2.28)$$

**Доказательство.** По условию теоремы вектор  $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$  принадлежит определенной в (2.9) гиперплоскости  $\mathbf{H}_{-1}$ . Поэтому его проекция (2.8) на  $\mathbf{H}_{-1}$  совпадает с самим вектором

$$\text{pr}_{-1}v = v$$

и, следовательно, по лемме 2.2 вектор  $v$  принадлежит

$$v \in \text{Simp}_{-1}(\text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_1, \dots, \text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_d, \text{pr}_{-1}\mathbf{e}'_{d+1}) \quad (2.29)$$

симплексу (2.25). Поскольку образ вектора  $v$  относительно биекции (2.26) равен  $\iota(v) = \alpha$ , то из включения (2.29) вытекает утверждение теоремы (2.28).  $\square$

Введем какую-нибудь метрику в  $\mathbb{R}^{d+1}$ , например, 1-метрику

$$|(x_1, \dots, x_{d+1})|_1 = |x_1| + \dots + |x_{d+1}|. \quad (2.30)$$

В метрике (2.30) определим длину наибольшего ребра

$$\varrho_{\max}^M = \max_{1 \leq k < k' \leq d+1} \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k'}}{q_{k'}} \right|_1$$

симплекса (2.27). Она полностью определяется матрицей  $M$  из (2.14).

**Теорема 2.2.** В обозначениях теоремы 2.1 выполняется следующая аппроксимационная формула

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|_1 \leq \varrho_{\max}^M$$

для всех  $k = 1, \dots, d+1$ .

**Доказательство.** Формула следует из (2.28), поскольку расстояние от произвольной точки симплекса до любой из его вершин не превосходит длины наибольшего ребра этого симплекса.  $\square$

**2.6. Приближения обычными цепными дробями.** Следствием теоремы 2.1 является следующий хорошо известный частный случай (см., например, [1]).

**Следствие 2.1.** Если  $d = 1$  и  $\alpha > 0$  – вещественное число, то

$$\alpha \in \left[ \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_1}{q_1} \right],$$

а  $p_1, q_1, p_2, q_2$  определены по  $\alpha$  в (2.19).

### §3. ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

**3.1. Матричное разложение в цепную дробь.** На примере размерности  $d = 2$  покажем характерные особенности и эффекты работы  $M$ -алгоритма, определенного в (1.4), (1.16), (1.17). За начальный вектор выберем

$$\alpha_{-1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}_-, \quad (3.1)$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi^2 \end{pmatrix}$$

и  $\pi = 3.1415\dots$  – известная трансцендентная константа.

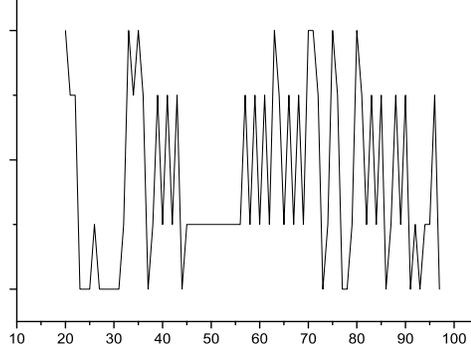


Рис. 3.1. Матричное разложение начального вектора  $\alpha_{-1} = (\alpha, -1)$ .

В двумерном случае элементарные матрицы (1.14) принимают вид

$$E_1^{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$E_2^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку вектор  $\alpha$  трансцендентный и, значит, его степень  $\deg \alpha = +\infty$  больше  $d + 1 = 3$ , под действием  $\mathcal{M}$ -алгоритма вектор  $\alpha_{-1}$  из (3.1) будет иметь бесконечное непериодическое матричное разложение в цепную дробь

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &\xrightarrow{M_1} M_1 \alpha_{-1} \xrightarrow{M_2} M_2 M_1 \alpha_{-1} \xrightarrow{M_3} \\ &\dots \xrightarrow{M_n} M_n \dots M_2 M_1 \alpha_{-1} \xrightarrow{M_{n+1}} \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$  – одна из элементарных матриц (3.2). Причина появления такого типа разложения та же, что и при разложении, скажем, кубической иррациональности в обычную цепную дробь.

Чтобы придать разложению (3.3) графический вид, нужно как-то упорядочить матрицы (3.2). Удобно это сделать, например, следующим образом:

$$E_1^{1,3} \prec E_3^{1,3} \prec E_3^{2,3} \prec E_2^{2,3}. \quad (3.4)$$

Именно такой порядок использован на графике, представленном на рис. 3.1. Четыре уровня на этом графике отвечают соответствующим уровням в последовательности (3.4) элементарных матриц.

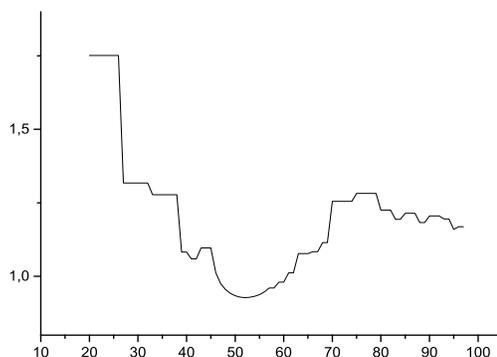


Рис. 3.2. График диофантовых экспонент  $\eta(n, 1)$  для линейной формы  $l_1^{M(n)}$ .

**3.2. Аппроксимации линейных форм.** Запишем в координатах

$$M(n) = M_n \cdots M_2 M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

матрицу из (3.3); и проследим, как длинные циклы в разложениях в цепную дробь (в нашем случае – это плато из шагов с номерами 45–55) влияют на порядок приближения линейных форм. Учитывая выбор

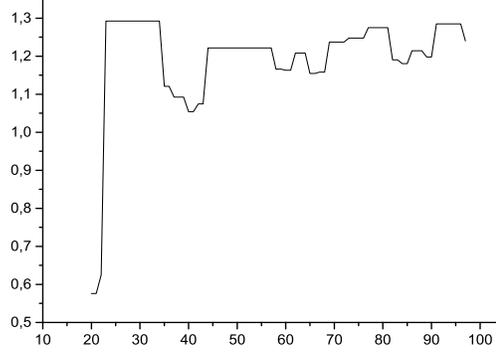


Рис. 3.3. График диофантовых экспонент  $\eta(n, 2)$  для линейной формы  $l_2^{M(n)}$ .

начального вектора (3.1) и вид матрицы (3.5), получаем следующие три линейные формы

$$\begin{cases} l_1^{M(n)}(m_1) = m_{11}\sqrt{2} + m_{12}\sqrt[4]{2} - m_{1,3} \\ l_2^{M(n)}(m_2) = m_{21}\sqrt{2} + m_{22}\sqrt[4]{2} - m_{2,3} \\ l_3^{M(n)}(m_3) = m_{31}\sqrt{2} + m_{32}\sqrt[4]{2} - m_{3,3}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где через  $m_1, m_2, m_3$  обозначили строки матрицы (3.5).

**3.3. Диофантовы экспоненты приближений.** Скорость приближения линейными формами удобно оценивать через диофантовы экспоненты. Если ввести обозначения

$$\max(m_k) = \max\{m_{k1}, m_{k2}, m_{k,3}\} \quad (3.7)$$

для  $k = 1, 2, 3$ , то *диофантовы экспоненты* можно определить формулой

$$\eta(n, k) = \frac{-\ln(|l_k^{M(n)}(m_k)|)}{\ln(\max(m_k))}. \quad (3.8)$$

Определение (3.8) корректно, т.к.  $M(n)$  из (3.5) являются унимодулярными матрицами с неотрицательными целыми коэффициентами,

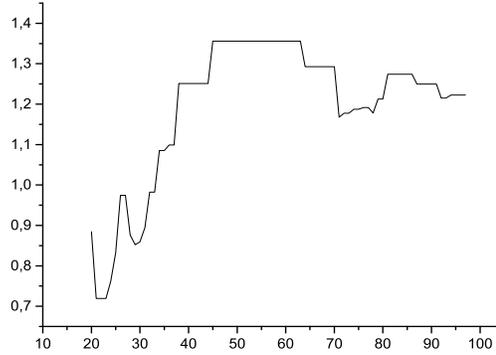


Рис. 3.4. График диофантовых экспонент  $\eta(n, 3)$  для линейной формы  $l_3^{M(n)}$ .

и поэтому для таких матриц  $\max(m_k) > 0$  и линейные формы (3.6) принимают ненулевые значения  $l_k^{M(n)}(m_k) \neq 0$ .

Из (3.8) вытекает следующая аппроксимационная оценка

$$\left| l_k^{M(n)}(m_k) \right| \leq \frac{1}{\max(m_k)^{\eta(n,k)}} \quad (3.9)$$

для  $n = 1, 2, 3, \dots$  и  $k = 1, 2, 3$ . В случае размерности  $d = 2$  указанная оценка считается нетривиальной, если диофантова экспонента в (3.9) удовлетворяет неравенству [16]

$$\eta(n, k) > 1. \quad (3.10)$$

На рис. 3.2–3.4 изображены графики диофантовых экспонент  $\eta(n, k)$  для линейных форм  $l_k^{M(n)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) при значениях аргумента из интервала  $20 \leq n \leq 100$ . Если поставить задачу получения хороших приближений (3.9), т. е. отыскание тех значений  $n$ , при которых  $\eta(n, k)$  принимает большие значения, то необходимо учитывать диофантовы экспоненты сразу для всех трех линейных форм  $l_1^{M(n)}, l_2^{M(n)}, l_3^{M(n)}$ . С этой целью введем *максимальную экспоненту*

$$\eta(n) = \max\{\eta(n, 1), \eta(n, 2), \eta(n, 3)\}. \quad (3.11)$$

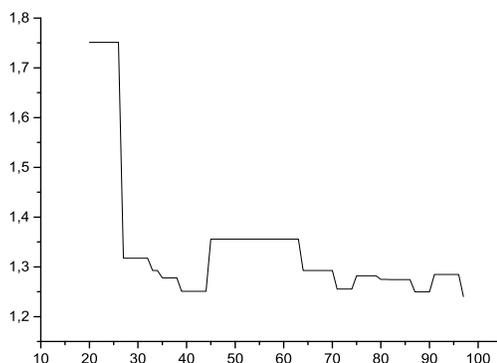


Рис. 3.5. Максимум диофантовых экспонент  $\eta(n)$  для трех линейных форм.

Ее график представлен на рис. 3.5. На пиках данного графика максимальная экспонента (3.11) принимает значения  $\eta(n) > 1.3$ . Следовательно,  $\mathcal{M}$ -алгоритм, согласно неравенству (3.10), позволяет получать нетривиальные приближения линейными формами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А. Я., *Целые дроби*, четвертое изд., Москва, Наука, 1978.
2. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms*. — arXiv:1508.07814, August 2015.
3. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the Arnoux–Rauzy–Poincaré algorithm*. — *Advances in Applied Mathematics* **63** (2015), 90–130.
4. V. Brun, *En generalisation av Kjedebrøken*. — *Skrifter utgit av Videnskapsselskapeti Kristiania, I. Matematisk–Naturvidenskabelig Klasse* **6** (1919–1920).
5. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*. — In *Treizieme congrès des mathématiciens scandinaves, tenu à Helsinki 18–23 août (1957)*, 45–64. Mercator Tryckeri, Helsinki, 1958.
6. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexité linéaire*. — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
7. A. Nogueira, *The three-dimensional Poincaré continued fraction algorithm*. — *Israel J. Math.* **90** (1995), no. 1–3, 373–401.
8. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions*. — *Nordisk Nat. Tidskr.* **9** (1961), 37–43.

9. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction*, Oxford Univ. Press, New York, 2000.
10. S. Labbe, *3-dimensional Continued Fraction Algorithms Cheat Sheets*. — arXiv:1511.08399v1, November 2015.
11. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*. — Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 1–20.
12. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби*, Владимир, ВлГУ, 2019, <https://vk.com/id589973164>.
13. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms*. — Mathematics of computation **25** (1971), no. 113, 163–180.
14. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms, II*. — Mathematics of computation **26** (1972), no. 120, 977–993.
15. В. Г. Журавлев, *Диофантовы приближения линейных форм*. — Алгебра и анализ, **490** (2020), 5–24.
16. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*, Москва, ИЛ, 1961.
17. В. Шмидт, *Диофантовы приближения*, Москва, Мир, 1983.

Zhuravlev V. G. Multidimensional Euclidean algorithm and continued fractions.

An algorithm is proposed as a multidimensional generalization of the Euclid algorithm. It is similar to the Brun algorithm. For any dimension  $d$ , the algorithm allows to obtain 1)  $d$ -dimensional approximations; 2) approximations of linear forms of  $d + 1$  variables. A verification test of work efficiency was carried out.

Владимирский  
государственный университет  
пр. Строителей, 11,  
600024, Владимир, Россия  
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 5 апреля 2024 г.