

В. Г. Журавлев

МНОГОМЕРНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

На основе периодических ядерных разбиений $\mathcal{T}_{\text{per}} = \mathcal{T}_{\text{per}}(\mathbf{m}, v)$ с весовым вектором \mathbf{m} и иррациональной звездой $v = v(\alpha)$ [1] для произвольного вещественного вектора $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ из \mathbb{R}^d построен **В-алгоритм**

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{T}_{\text{per}} & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathcal{T}_{\text{per}}^{[\sigma]_1} & \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} & \mathcal{T}_{\text{per}}^{[\sigma]_n} & \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \dots & \\ v & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{[\sigma]_1} & \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} & v^{[\sigma]_n} & \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \dots & \\ T(\beta) & \xrightarrow{\sigma_1} & T^{[\sigma]_1}(\beta) & \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} & T^{[\sigma]_n}(\beta) & \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \dots, & \end{array} \quad (0.1)$$

где $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ – любая бесконечная последовательность дифференцирований разбиения \mathcal{T}_{per} , $v^{[\sigma]_n}$ – производные звезды и $T^{[\sigma]_n}(\beta)$ – аппроксимационные d -мерные параллелепипеды, содержащие внутри себя вектор β .

В теореме 11.1 доказывается, что для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ найдутся такие целые векторы $p^{[\sigma]_n} \in \mathbb{Z}^d$ и такие целые числа $q^{[\sigma]_n}$ с условием $0 \leq q^{[\sigma]_n} < m^{[\sigma]_n}$, где $m^{[\sigma]_n}$ – натуральное число, равное порядку звезды $v^{[\sigma]_n}$, что выполняется оценка

$$|\beta - q^{[\sigma]_n} \alpha - p^{[\sigma]_n}|_1 \leq \varrho(v^{[\sigma]_n}). \quad (0.2)$$

Здесь $|\cdot|_1$ обозначает метрику

$$|(x_1, \dots, x_d)|_1 = |x_1| + \dots + |x_d| \quad (0.3)$$

и $\varrho(v^{[\sigma]_n})$ – радиус производной звезды $v^{[\sigma]_n}$ в метрике (0.3).

При этом числа $q^{[\sigma]_n}$, векторы $p^{[\sigma]_n}$ и радиусы $\varrho(v^{[\sigma]_n})$ в неравенствах (0.2) эффективно вычислимы и аппроксимационные параллелепипеды $T^{[\sigma]_n}(\beta)$, получаемые через В-алгоритм (0.1), обладают свойством *минимальности*: $q\alpha + p \notin (T^{[\sigma]_n}(\beta))^{\text{int}}$ для любой пары p, q с ограничением $0 \leq q < m^{[\sigma]_n}$.

Ключевые слова: многомерные неоднородные приближения, полиэдральные ядерные разбиения, дефляция.

Неравенство (0.2) можно записать в виде оценки (теорема 12.1)

$$|\beta - q^{[\sigma]^n} \alpha - p^{[\sigma]^n}|_1 \leq \frac{c}{(m^{[\sigma]^n})^{\eta'}} \quad (0.4)$$

для всех $n \geq n_{\eta'}$. Здесь $\eta' < \eta$, где $\eta = \eta(\alpha, \wp)$ – диофантова экспонента, зависящая от α и целевой функции \wp , определяющих выбор бесконечной последовательности дифференцирований $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$.

С помощью симплекс-ядерного алгоритма (\mathcal{SK} -алгоритма) [2] были проведены численные эксперименты. Во всех случаях оказалось $\eta > 0$. Это означает, что симплекс-ядерный алгоритм в сочетании с рассматриваемым здесь \mathfrak{B} -алгоритмом (0.1) позволяют получать нетривиальные многомерные неоднородные приближения (0.4).

В той же работе [2], дополнительно были исследованы диофантовы экспоненты η для кубических иррациональностей $\alpha = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2})$, где $2 \leq a \leq 10^3$ отлично от полного куба. Ниже приведены наибольшее, среднее и наименьшее значения диофантовых экспонент:

$$\eta_{\max} = 0.462, \quad \eta_{\text{mid}} = 0.344, \quad \eta_{\min} = 0.079.$$

Симплекс-модульный алгоритм (\mathcal{SM} -алгоритм) [3], примененный к кубическим иррациональностям α , позволяет получать в неравенствах (0.4) показатель η , сколь угодно близкий к наилучшему возможному значению $\eta = 1/2$ (см., например, [4, 5]).

Два алгоритма – симплекс-ядерный и \mathfrak{B} -алгоритм – имеют разную природу: первый отвечает за скорость приближения, второй – за поиск аппроксимационного параллелепипеда $T^{[\sigma]^n}(\beta)$, в который попадает точка β при измельчении (0.1) ядерного разбиения $\mathcal{T}_{\text{рег}}$. Более конкретно, \mathfrak{B} -алгоритм позволяет вычислять коэффициенты вектора $q^{[\sigma]^n} \alpha + p^{[\sigma]^n}$ в неравенствах (0.2) и (0.4).

Таким образом, симплекс-ядерный алгоритм устанавливает непосредственную связь между неоднородными приближениями (0.4) и соответствующими им однородными приближениями

$$|m^{[\sigma]^n} \alpha - r^{[\sigma]^n}|_1 \leq \frac{c}{(m^{[\sigma]^n})^{\eta'}} \quad (0.5)$$

с прежней диофантовой экспонентой η' , где $m^{[\sigma]^n}$ – порядок звезды $v^{[\sigma]^n}$ и целые векторы $r^{[\sigma]^n}$, разумеется, тоже другие. Ранее связь между приближениями (0.4) и (0.5) была обнаружена А. Я. Хинчиным [6] в двумерном случае $d = 2$ (см. также более доступную ссылку [7]).

Укажем еще на две работы по двумерным неоднородным приближениям [8] и [9], в которых используется метод итерации.

§1. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЯДЕРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Универсальные ядерные разбиения. Общая конструкция. Будут рассматриваться разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon)$ пространства \mathbb{R}^{d+1} с параметрами: $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_d)$ – *нормаль* с условием

$$|\mathbf{n}|_1 = |n_0| + |n_1| + \dots + |n_d| = 1; \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \quad (1.2)$$

– *базис* пространства \mathbb{R}^{d+1} , состоящий из векторов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$;

$$\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi \quad (1.3)$$

– *центрирующий луч*, порождаемый некоторым нормированным

$$|\pi|_1 = 1 \quad (1.4)$$

направляющим вектором $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из \mathbb{R}^{d+1} , где \mathbb{R}_+ – множество неотрицательных вещественных чисел; $\Upsilon \subset \mathbb{R}$ – непустое подмножество.

1.2. Условия согласования параметров разбиения.

Условие 1. *Весовой вектор*

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = (m_0, m_1, \dots, m_d) \quad (1.5)$$

с координатами

$$m_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_k, \quad (1.6)$$

где $k = 0, 1, \dots, d$, содержится

$$\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^{d+1} \quad (1.7)$$

в *положительном конусе* $\mathbb{R}_+^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ векторов с положительными координатами. Число

$$m = |\mathbf{m}|_1 = m_0 + m_1 + \dots + m_d \quad (1.8)$$

назовем *порядком* весового вектора (1.5). Из условия (1.7) вытекает неравенство

$$m > 0. \quad (1.9)$$

Условие 2. Направляющий луч (1.3) принадлежит

$$\Pi \subset \angle^{\text{int}} \mathbf{u} \quad (1.10)$$

внутренности $\angle^{\text{int}} \mathbf{u}$ конуса

$$\angle \mathbf{u} = \{\lambda_0 \mathbf{u}_0 + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_d \mathbf{u}_d; \lambda_k \geq 0\},$$

порождаемого векторами базиса (1.2).

1.3. Ограничение на параметры разбиения. В [10] были рассмотрены разбиения вида $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon)$, где в качестве параметра \mathbf{u} выбирался *унимодулярный базис*, т. е. базис из целочисленных векторов

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \in \mathbb{Z}^{d+1} \quad (1.11)$$

под условием

$$\det U = \pm 1 \quad \text{для матрицы} \quad U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_d \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

строки которой – координаты векторов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$. Условия (1.11), (1.12) эквивалентны *унимодулярности* матрицы U , т. е. условию $U \in \text{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. Параметром Υ был выбран *полуинтервал*

$$\Upsilon = \Upsilon_{\mathbf{m}} = [0, m) \quad (1.13)$$

с правым концом (1.8). Из (1.9) вытекает, что полуинтервал (1.13) имеет длину $|\Upsilon_{\mathbf{m}}| = |\mathbf{m}|_1 = m > 0$, где $\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$.

Замечание 1.1. В разбиении $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ параметр \mathbf{n} определяет периодичность разбиения, параметры \mathbf{u} и Π – тип многогранников, образующих разбиение. Все рассуждения предполагаются внутри положительного конуса $\mathbb{R}_+^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

§2. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЯДЕРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

2.1. Ориентированный граф $\vec{\mathcal{G}}$. В пространстве \mathbb{R}^{d+1} рассмотрим $(d+1)$ -мерный *слой*

$$\mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}; \mathbf{n} \cdot \hat{x} \in \Upsilon\}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{n} \cdot \hat{x}$ – скалярное произведение нормали \mathbf{n} из (1.1) и \hat{x} ; Υ – полуинтервал (1.13). В свою очередь, в слое $\mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1}$ выделим *решетку*

$$\mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^{d+1} = \mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{a \in \mathbb{Z}^{d+1}; \mathbf{n} \cdot a \in \Upsilon\} \quad (2.2)$$

точек $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ с целыми координатами a_k . Число $\mu \hat{x} = \mathbf{n} \cdot \hat{x}$ будем называть *весом* точки $\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Используя решетку (2.2), можем определить *ориентированный граф* $\vec{\mathcal{G}}$ с вершинами $\vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} = \mathbb{Z}_{\mathbf{n}}^{d+1}$. Две вершины $a, a' \in \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}}$ соединим дугой \mathbf{u}_k^\pm , если выполнено условие $a' - a = \mathbf{u}_k^\pm$, где \mathbf{u}_k^\pm принадлежит симметризованной \mathbf{u} -звезде $\mathbf{u}^\pm = \{\mathbf{u}_0^\pm, \mathbf{u}_1^\pm, \dots, \mathbf{u}_d^\pm\}$, где $\mathbf{u}_k^\pm = \pm \mathbf{u}$, получающейся симметризацией базиса (1.2). Определенный так граф $\vec{\mathcal{G}}$ назовем \mathbf{u} -графом.

2.2. Проекция. Зададим проекцию

$$\text{pr}_\Pi : \mathbb{R}_{\mathbf{n}}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} \quad (2.3)$$

вдоль луча Π из (1.3), отображающую слой (2.1) на его нижнюю граничную гиперплоскость

$$\mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}; \mathbf{n} \cdot \hat{x} = 0\}. \quad (2.4)$$

Теорема 2.1. Если выполнены условия (1.7) и (1.10), то проекция (2.3) задает изоморфизм $\text{pr}_\Pi : \vec{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathcal{G}}$ определенного выше \mathbf{u} -графа $\vec{\mathcal{G}}$ и его проекции

$$\vec{\mathcal{G}} = \text{pr}_\Pi \vec{\mathcal{G}} \quad (2.5)$$

– графа из пространства \mathbb{R}^d , отождествляемого $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1}$ с гиперплоскостью (2.4).

Доказательство. См. [11], теорема 2.1. □

Аналогично [2] можно доказать, что проекция

$$v = \text{pr}_\Pi \mathbf{u} \quad (2.6)$$

базиса \mathbf{u} на гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} = \mathbb{R}^d$ образует звезду

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}, \quad (2.7)$$

где $v_k = \text{pr}_\Pi \mathbf{u}_k$ для $k = 0, 1, \dots, d$.

Определение 2.1. Пусть любые $d - 1$ вектора из множества (2.7) линейно независимы, и пусть любые его два вектора v_{k_1}, v_{k_2} не принадлежат гиперплоскости, порождаемой остальными векторами из v , и лежат по отношению к ней в разных полупространствах. Тогда такое множество векторов v назовем звездой.

Чаще, однако, для проверки множества векторов v быть звездой более удобным оказывается применять следующий критерий [11].

Критерий 2.1. Рассмотрим симплекс

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d; \lambda_0 + \dots + \lambda_d \leq 1, \lambda_0, \dots, \lambda_d \geq 0\},$$

$\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v . Пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ – его внутренняя часть. Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию $0 \in \Delta^{\text{int}}(v)$.

2.3. Звездный граф. Дополнительно к (2.7) введем симметризованную звезду

$$w = \{w_0, w_1, \dots, w_d\}, \quad (2.8)$$

состоящую из лучей $w_k = \pm v_k$, где v_k принадлежат звезде v , и имеющих соответственно веса $\mu w_k = \text{sign}(w_k) m_k$, где знаки $\text{sign}(w_k)$ звезд w_k определены условиями $\text{sign}(w_k) = +1$ или -1 для $w_k = +v_k$ или $w_k = -v_k$, а $m_k = \mu \mathbf{u}_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_k$ – веса (1.6) базисных векторов \mathbf{u}_k . По определению, числа m_k также считаются весами

$$m_k = \mu v_k, \quad (2.9)$$

лучей $v_k \in v$ звезды (2.7), $k = 0, 1, \dots, d$.

Определенный в (2.5) ориентированный граф \vec{G} имеет вершины

$$\vec{G}^{\text{ver}} = \{x = x(a); a \in \mathbb{Z}^{d+1}, \mu x \in \Upsilon\}, \quad (2.10)$$

при этом

$$x = x(a) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_d v_d \quad (2.11)$$

– точка из пространства \mathbb{R}^d с индексом $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ из решетки \mathbb{Z}^{d+1} ; вес μx точки $x = x(a)$ определен равенством

$$\mu x = a_0 \mu v_0 + a_1 \mu v_1 + \dots + a_d \mu v_d = \mu a, \quad (2.12)$$

где справа

$$\mu a = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_d m_d \quad (2.13)$$

– вес индекса a , определяемый через веса (2.9) лучей v_k звезды v ; Υ – полуинтервал (1.13).

Вершины $x, x' \in \vec{G}^{\text{ver}}$ соединены дугой w_k – ориентированным ребром с номером $k = 0, 1, \dots, d$, если

$$x' - x = w_k \in w. \quad (2.14)$$

Здесь w – симметризованная звезда (2.8). Если же вершины $x = x(a)$, $x' = x'(a')$ записать в терминах индексов (2.11), то (2.14) будет эквивалентно условию $a' - a = \varepsilon_k^\pm \in \varepsilon^\pm$ при этом $\varepsilon^\pm = \{\varepsilon_0^\pm, \varepsilon_1^\pm, \dots, \varepsilon_d^\pm\}$,

где $\varepsilon_k^\pm = \pm \varepsilon_k$, – симметризованная единичная звезда, получающаяся симметризацией единичного базиса

$$\varepsilon_0 = (0, \dots, 0, 1), \quad \varepsilon_1 = (1, \dots, 0, 0), \quad \varepsilon_d = (0, \dots, 1, 0) \quad (2.15)$$

пространства \mathbb{R}^{d+1} . Если векторам ε_k придать веса $\mu \varepsilon_k = m_k$, то вес (2.13) индекса a запишется $\mu a = a_0 \mu \varepsilon_0 + a_1 \mu \varepsilon_1 + \dots + a_d \mu \varepsilon_d$, аналогично весу (2.12) вершины $x = x(a)$.

Ориентированный граф \vec{G} называется *звездным графом*. В (2.5) было приведено его глобальное определение. Локально же граф \vec{G} задается условиями (2.10) и (2.14).

2.4. Перекладывающиеся параллелепеды. Определим для $k = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d -мерные базисные параллелепеды

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\}, \quad (2.16)$$

где k_1, \dots, k_d – дополнительные к k индексы в $\{0, 1, \dots, d\}$. Множество лучей v_{k_1}, \dots, v_{k_d} назовем *скелетом* параллелепипеда T_k из (2.16). Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (2.7), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d \quad (2.17)$$

параллелепипедов (2.16) образует *параллелепед* [12], [13] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} T[l] \quad (2.18)$$

с помощью параллельных переносов $T[l] = T + l$ на векторы l решетки L . Причем различные многогранники $T[l]$ из (2.18) не имеют общих внутренних точек. Здесь $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d]$ – *полная решетка* в пространстве \mathbb{R}^d с базисом l_1, \dots, l_d , т.е. векторы l_1, \dots, l_d линейно независимы над \mathbb{R} . Векторы l_k определяются через лучи v_0, v_1, \dots, v_d звезды v равенствами $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \dots, d$.

2.5. Вершины базисных параллелепипедов. Напомним, что параллелепипед T_k в (2.16) порождается векторами $v_i \in v$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \quad (2.19)$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$. Множество векторов $\text{Sk}_k = \{v_i; i \in \mathcal{D}_k\}$ назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда T_k . Остов Sk_k порождает параллелепипед T_k и содержит наименьшее число векторов с указанным

свойством. Согласно (2.16), множество *вершин* параллелепипеда T_k суть

$$T_k^{\text{ver}} = \{v_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \quad (2.20)$$

Здесь *мультииндекс* $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_\iota\}$ – произвольное подмножество индексов из множества (2.19), $v_{\mathbf{i}} = v_{i_1} + \dots + v_{i_\iota}$. В (2.20) допускается пустое подмножество $\mathbf{i} = \emptyset$ с $\iota = 0$. В данном случае полагаем $v_{\emptyset} = 0$. *Отмеченный параллелепипед* $T_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед T_k с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $v_{\mathbf{i}} \in T_k^{\text{ver}}$.

2.6. Графы базисных параллелепипедов. *Граф* $\vec{G}(T_k)$ параллелепипеда T_k – это ориентированный граф, имеющий вершины

$$\vec{G}^{\text{ver}}(T_k) = T_k^{\text{ver}}.$$

По аналогии с (2.14), вершины $v_{\mathbf{i}}, v_{\mathbf{i}'} \in T_k^{\text{ver}}$ считаются соединенными дугой w_k , если $v_{\mathbf{i}'} - v_{\mathbf{i}} = w_k \in w$.

Отмеченному параллелепипеду $T_{k,\mathbf{i}}$ отвечает граф $\vec{G}(T_{k,\mathbf{i}})$, в котором выделена та же самая вершина $v_{\mathbf{i}} \in \vec{G}^{\text{ver}}(T_k)$, что и у параллелепипеда $T_{k,\mathbf{i}}$.

2.7. Вложения графов. Заметим, согласно определениям (2.16) и (2.10), (2.14) имеют место включения $T_{k,\mathbf{i}} \subset \mathbb{R}^d$ и $\vec{G} \subset \mathbb{R}^d$. Учитывая это, будем говорить, что граф $\vec{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ отмеченного параллелепипеда $T_{k,\mathbf{i}}$ *вкладывается*

$$x : \vec{G}(T_{k,\mathbf{i}}) \hookrightarrow \vec{G} \quad (2.21)$$

в граф \vec{G} в его вершине $x \in \vec{G}^{\text{ver}}$, если выполняется включение графов

$$\vec{G}(T_{k,\mathbf{i}}) + (x - v_{\mathbf{i}}) \subset \vec{G}.$$

Последнее означает, что $\vec{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ является подграфом графа \vec{G} при условии, если выделенную вершину $v_{\mathbf{i}}$ графа $\vec{G}(T_{k,\mathbf{i}})$ параллельным сдвигом совместить с вершиной x графа \vec{G} .

2.8. Общая конструкция универсальных ядерных разбиений пространства \mathbb{R}^d . Обозначим через

$$X_{k,\mathbf{i}} = \{x \in \vec{G}^{\text{ver}}; \vec{G}(T_{k,\mathbf{i}}) \xrightarrow{x} \vec{G}\} \quad (2.22)$$

подмножество тех вершин x графа \vec{G} , в которых имеет место включение (2.21). Пусть

$$xT_{k,\mathbf{i}} = T_{k,\mathbf{i}} + (x - v_{\mathbf{i}}) \subset \mathbb{R}^d \quad (2.23)$$

обозначает параллелепипед, получающийся сдвигом $T_{k,i}$ на вектор $x - v_i$, где x принадлежит множеству вершин $X_{k,i} \subset \vec{G}^{\text{ver}}$ и $v_i \in T_k^{\text{ver}}$ – вершина базисного параллелепипеда T_k с мультииндексом $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$.

Теорема 2.2. *При выполнении условий (1.7) и (1.10) имеет место разбиение*

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \bigcup_{\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k} \bigcup_{x \in X_{k,i}} xT_{k,i} \quad (2.24)$$

пространства \mathbb{R}^d любой размерности d . Здесь \mathcal{D}_k – множество индексов (2.19) и $X_{k,i}$ – подмножество (2.22) вершин x графа \vec{G} , определенное в (2.10), (2.14). В объединении (2.24) любые два параллелепипеда $xT_{k,i}$ и $x'T_{k',i'}$ либо совпадают, либо не имеют общих внутренних точек.

Доказательство. См. [10]. □

Замечание 2.1. Звездный граф \vec{G} строится локально по двум параметрам \mathbf{m}, v . По теореме 2.2 данный граф определяет все ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$. Тем самым, мы получаем локальный алгоритм

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbf{m},v} \quad (2.25)$$

построения разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ по его внутренним параметрам \mathbf{m}, v .

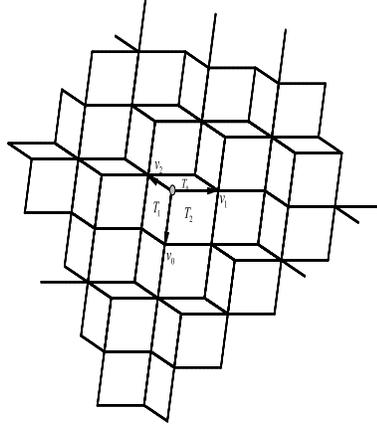
Замечание 2.2. Будем называть \mathbb{R}^d внутренним пространством, а \mathbb{R}^{d+1} – внешним пространством. При этом внутреннее пространство \mathbb{R}^d отождествляется с гиперплоскостью $\mathbb{R}_{\mathbf{n},0}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, см. (2.4).

2.9. Пример двумерного ядерного разбиения. На рис. 2.1 показано двумерное ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$, параметры которого $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi$ в данный момент не имеют значения и будут приведены в пункте 7.1.

На рисунке выделены звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ и базисные параллелограммы T_0, T_1, T_2 , нумеруемые лучами звезды v и образующие ядро $K\Gamma = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$ разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$.

§3. ПОСЛОЙНЫЙ РОСТ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

3.1. Внешние и внутренние параметры разбиений. Параметры $\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi$ ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ являются *внешними*. Они возникают из пространства \mathbb{R}^{d+1} , хотя сами разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ содержатся в пространстве \mathbb{R}^d .

Рис. 2.1. Двумерное ядерное разбиение \mathcal{T} .

Введем *внутренние параметры* \mathbf{m}, v , полагая

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, $v = \text{rg}_{\Pi} \mathbf{u}$ – весовой вектор (1.5) и звезда (2.6) соответственно. Согласно *локальному алгоритму* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbf{m}, v}$ из (2.25) для построения ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ достаточно знать его внутренние параметры \mathbf{m}, v , т. е. параметры \mathbf{m}, v полностью задают разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

Обратный переход от внутренних параметров к внешними удобно проводить посредством *канонического подъема*: $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \uparrow \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{e}, \Pi)$. Здесь $m\mathbf{n} = \mathbf{m}$ – нормаль, $\mathbf{e} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ – единичный базис (2.15) пространства \mathbb{R}^{d+1} , $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi_{\mathbf{e}}$ – центрирующий луч с направляющим вектором $\pi_{\mathbf{e}} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$, определяемым типом $\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ (5.9) звезды v .

3.2. Геодезические. Зададим *геодезическое расстояние* $\gamma(x, x')$ между вершинами $x, x' \in \mathcal{T}^{\text{ver}}(\mathbf{m}, v)$ как минимальное количество ребер

разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, которыми можно соединить указанные вершины. Напомним, ребра – это всевозможные лучи $w_k \in w$ симметризованной звезды (2.8). Используя расстояние, введем *геодезическую сферу*

$$eq(x, n) = \{x' \in \mathcal{T}^{\text{ver}}(\mathbf{m}, v) : \gamma(x, x') = n\} \quad (3.2)$$

и *геодезический шар*

$$Eq(x, n) = \{x' \in \mathcal{T}^{\text{ver}}(\mathbf{m}, v) : \gamma(x, x') \leq n\} \quad (3.3)$$

с центром в x радиуса $n = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, сфера (3.2) и шар (3.3) состоят из вершин разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$. Из определений следует

$$eq(x, 0) = Eq(x, 0) = \{x\},$$

$$Eq(x, n) = eq(x, 0) \cup eq(x, 1) \cup \dots \cup eq(x, n).$$

3.3. Разложение разбиений на слои. Полагая

$$X_k = \bigcup_{\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k} X_{k, \mathbf{i}},$$

определим множество вершин

$$eq(\mathbf{x}_0, n; k) = (X_k \cap eq(\mathbf{x}_0, n))_{\min}, \quad (3.4)$$

где $X_{k, \mathbf{i}}$ определено в (2.22) и $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{T}^{\text{ver}}(\mathbf{m}, v)$ – произвольная фиксированная вершина разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, следующим образом:

- 1) если $x \in eq(\mathbf{x}_0, n; k)$, то найдется такой мультииндекс $\mathbf{i} = \mathbf{i}_{\min}$, что $x \in X_{k, \mathbf{i}} \cap eq(\mathbf{x}_0, n)$;
- 2) если найдутся еще вершина $x' \in eq(\mathbf{x}_0, n; k)$, $x' \neq x$, и мультииндекс \mathbf{i}' с условием $x' \in X_{k, \mathbf{i}'} \cap eq(\mathbf{x}_0, n)$, то мультииндекс \mathbf{i}' удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{i} \prec \mathbf{i}' \quad (3.5)$$

относительно *лексикографического упорядочения*;

- 3) не существует вершин $x' \in X_k \cap Eq(\mathbf{x}_0, n - 1)$ и мультииндексов $\mathbf{i}' \subseteq \mathcal{D}_k$ таких, что $x' \in X_{k, \mathbf{i}'}$.

Расширим множество вершин (3.4) до множества пар

$$eq(\mathbf{x}_0, n; k)_{\text{ind}} = \{(x, \mathbf{i}) : x \in eq(\mathbf{x}_0, n; k), \mathbf{i} = \mathbf{i}_{\min}\}, \quad (3.6)$$

где \mathbf{i}_{\min} – минимальный мультииндекс (3.5). Затем множества пар (3.6) расширяем до множества троек

$$eq(\mathbf{x}_0, n)_{\text{ind}} = \{(x, k, \mathbf{i}) : 0 \leq k \leq d, (x, \mathbf{i}) \in eq(\mathbf{x}_0, n; k)\}. \quad (3.7)$$

Пусть фиксированная вершина $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{T}^{\text{ver}}(\mathbf{m}, v)$ имеет вес $\mu_0 = \mu \mathbf{x}_0$. Введем обозначение

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v; \mathbf{x}_0, \mu_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} Eq(\mathbf{x}_0, n). \quad (3.8)$$

Здесь

$$Eq(\mathbf{x}_0, n) = \bigcup_{(x, k, \mathbf{i}) \in eq(\mathbf{x}_0, n)_{\text{ind}}} xT_{k, \mathbf{i}} \quad (3.9)$$

– слои, составленные из параллелепипедов, определенных в (2.23).

Теорема 3.1. 1. Если индексы (x, k, \mathbf{i}) и (x', k', \mathbf{i}') из $eq(\mathbf{x}_0, n)_{\text{ind}}$ не совпадают, то

$$xT_{k, \mathbf{i}} \neq x'T_{k', \mathbf{i}'}$$

2. Геодезические слои (3.9), соответствующие различным n , не имеют общих внутренних точек, т. е.

$$Eq(\mathbf{x}_0, n)^{\text{int}} \cap Eq(\mathbf{x}_0, n')^{\text{int}} = \emptyset \quad \text{при } n \neq n'.$$

3. Имеет место равенство

$$\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{m}, v; \mathbf{x}_0, \mu_0)$$

разбиений (2.24) и (3.8). Второе разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v; \mathbf{x}_0, \mu_0)$ есть не что иное, как разложение первого разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ на геодезические слои (3.9).

Доказательство. 1. Неравенство следует непосредственно из определения (3.4) множества вершин $eq(\mathbf{x}_0, n; k)$.

2. Это вытекает из $eq(\mathbf{x}_0, n)_{\text{ind}} \cap eq(\mathbf{x}_0, n')_{\text{ind}} = \emptyset$ с $n \neq n'$.

3. Третье утверждение вытекает из теоремы 2.2 и разложения

$$\mathcal{T}^{\text{ver}}(\mathbf{m}, v) = \bigcup_{n=0}^{\infty} eq(\mathbf{x}_0, n)$$

множества вершин разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ на геодезические сферы. \square

Замечание 3.1. Впервые, основываясь на локальных правилах, алгоритм послойного построения ядерных разбиений был приведен в публикациях [11] и [14].

§4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЗВЕЗД И ЦЕНТРИРОВАННЫХ
УНИМОДУЛЯРНЫХ БАЗИСОВ

4.1. Производные звезды. Обозначим Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежит

$$v_\sigma \notin H_{\sigma'} \quad (4.1)$$

гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через оставшиеся $d - 1$ векторы звезды v с индексами из дополнения $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ к сочетанию σ . При этом условии только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (4.2)$$

будет звездой (2.7). Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \quad (4.3)$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H_{\sigma'}^\pm$, и $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v .

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (4.3) гарантирована ограничением (4.1) на сумму векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$.

Определение 4.1. Обозначим через $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$, то множество векторов из (4.2), которое является звездой. Если существуют звезды v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 4.1 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \quad (4.4)$$

где $v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}$, $v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$ или $v_{k_1}^\sigma = v_\sigma$, $v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$, в зависимости от выполнения условия из (4.3), и $v_{k'}^\sigma = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (4.4) назовем σ -производной невырожденной звезды v . Если нужно выделить индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем использовать еще и другое, развернутое, обозначение $v^\sigma = v^{\sigma^{k_1, k_2}}$.

4.2. Центрированный унимодулярный базис. Введем новое обозначение

$$\mathbf{u}_\Pi = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}_\Pi \quad (4.5)$$

для унимодулярного базиса \mathbf{u} (1.11), (1.12), внутри конуса которого содержится $\Pi \subset \angle^{\text{int}} \mathbf{u}$ направляющий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ (1.3). Базис \mathbf{u}_Π назовем *центрированным унимодулярным базисом* или кратко – *CU-базисом*, а луч Π – *центрирующим лучом*.

4.3. Дифференцирования центрированных базисов. Используя проекцию rg_Π из (2.3), с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u}_\Pi & \xrightarrow{\text{rg}_\Pi} & v \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \mathbf{u}_\Pi^\sigma & \xrightarrow{\text{rg}_\Pi} & v^\sigma \end{array} \quad (4.6)$$

можно перенести операции $\sigma \in \Sigma$ дифференцирования звезд $v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma$ (4.4) на дифференцирования CU-базисов \mathbf{u}_Π .

Выясним *геометрический смысл* дифференцирований CU-базисов \mathbf{u}_Π . Пусть σ' – дополнительное сочетание к $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через $\widehat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в \mathbb{R}^{d+1} , содержащую векторы $\mathbf{u}_{k'_j} \in \mathbf{u}_\Pi$ с индексами k'_j из σ' и луч Π . Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор \widehat{v}_{k_1} и сумма векторов $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\widehat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\mathbf{u}_\Pi \xrightarrow{\sigma} \mathbf{u}_\Pi^\sigma \quad (4.7)$$

сводится к замене вектора \mathbf{u}_{k_2} на сумму $\mathbf{u}_{k_1} + \mathbf{u}_{k_2}$.

Центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$, направленный вдоль нормированного вектора $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из \mathbb{R}^{d+1} , назовем *иррациональным*, если

$$\text{координаты } \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Здесь кольцо \mathbb{Z} целых рациональных чисел можно заменить полем рациональных чисел \mathbb{Q} .

В [2] доказаны следующие утверждения.

Предложение 4.1. *Если центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ иррационален (4.8), то любой унимодулярный базис \mathbf{u}_Π (4.5), центрированный лучом Π , бесконечно дифференцируем (4.7). При этом проекция $v = v_\Pi = \text{rg}_\Pi \mathbf{u}_\Pi$ – бесконечно дифференцируемая звезда, см. (2.3), (4.4). \square*

Предложение 4.2. *Если Π – иррациональный луч, то для любого $\sigma \in \Sigma$ производное множество векторов \mathbf{u}_Π^σ , определенное в (4.6) и*

(4.7), снова образует SU -базис, т. е. унимодулярный базис, центрированный лучом Π . \square

§5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

5.1. Первое определение производного разбиения. Для ядерного разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi, \Upsilon)$ из (2.24) и любого сочетания $\sigma \in \Sigma$ полагаем

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}_\Pi^\sigma, \Pi), \quad (5.1)$$

где разбиение справа может быть записано как $\mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}_\Pi^\sigma, \Pi, \Upsilon_{\mathbf{m}}^\sigma)$. При этом, \mathbf{u}_Π^σ – SU -базис (4.6), (4.7); $\Upsilon_{\mathbf{m}}^\sigma = \Upsilon_{\mathbf{m}^\sigma} = [0, m^\sigma)$, где $m^\sigma = |\mathbf{m}^\sigma|_1$, – полуинтервал (1.13) для весового вектора

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_\Pi^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma), \quad (5.2)$$

относительно которого имеем $\mathbf{m}^\sigma \in \mathbb{R}_+^{d+1}$, если, см. (4.7), свойством $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^{d+1}$ обладал (1.7) начальный базис \mathbf{u} .

Теорема 5.1. *Если центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ является иррациональным (4.8), то определенное в (5.1) множество $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ снова образует ядерное разбиение вида (2.24).*

Доказательство. См. [10]. \square

Множество $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ из (5.1) называется *производным ядерным разбиением*.

5.2. Второе определение производного разбиения. Мы положим $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ или, согласно (5.1), $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}_\Pi^\sigma, \Pi)$.

Теорема 5.2. *В предположениях теоремы 5.1 и с обозначениями (3.1), (5.2) имеем $\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma)$.*

Доказательство. См. [15]. \square

5.3. Производные внутренних параметров. Зная только весовой вектор \mathbf{m} и сочетание $\sigma \in \Sigma$, нельзя определить производный вектор \mathbf{m}^σ . Ранее, в (5.2), было приведено внешнее определение вектора \mathbf{m}^σ через нормаль \mathbf{n} и центрированный базис \mathbf{u}_Π из *внешнего пространства* \mathbb{R}^{d+1} . Однако можно определить производные

$$(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\sigma} (\mathbf{m}, v)^\sigma = (\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma)$$

сразу для пар (\mathbf{m}, v) , где производный весовой вектор \mathbf{m}^σ определяется

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}_v^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma) \quad (5.3)$$

через производную звезду v^σ (4.4):

$$m_{k_1}^\sigma = m_{k_1}, \quad m_{k_2}^\sigma = m_\sigma \quad \text{или} \quad m_{k_1}^\sigma = m_\sigma, \quad m_{k_2}^\sigma = m_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (4.3),

$$m_{k'}^\sigma = m_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in \sigma'.$$

5.4. Барицентрические координаты. Согласно условию (1.10) центрирующий луч $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ принадлежит внутренности конуса $\angle^{\text{int}} \mathbf{u}$. Поэтому его можно записать в виде $\pi = \pi'_0 \mathbf{u}_0 + \pi'_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \pi'_d \mathbf{u}$ с положительными коэффициентами. Удобно выбрать

$$\pi = \pi_0 \mathbf{u}_0 + \pi_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \pi_d \mathbf{u}, \quad (5.4)$$

$$\pi_k = \frac{1}{\pi'_0 + \pi'_1 + \dots + \pi'_d} \pi'_k \quad (5.5)$$

и вектор отождествлять с его конечной точкой.

Пусть

$$\Delta_{\mathbf{u}} = \Delta\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \quad (5.6)$$

– замкнутый d -мерный симплекс, вершины которого есть концы векторов унимодулярного базиса $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ из (1.11), (1.12). Из (5.4), (5.5) следует, что точка π принадлежит симплексу (5.6) и ее *барицентрические координаты*

$$\pi_{\mathbf{u}} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d) \quad (5.7)$$

относительно вершин симплекса, удовлетворяют условию

$$|\pi_{\mathbf{u}}|_1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_d = 1, \quad \text{где} \quad \pi_k > 0.$$

Как мы увидим далее, представление направляющего вектора π луча $\Pi = \mathbb{R}_+ \cdot \pi$ через барицентрические координаты (5.7) более инвариантно, чем его представление через координаты в единичном базисе пространства \mathbb{R}_{d+1} , использованного ранее в (1.4).

5.5. Типы звезд и их эквивалентность. Действуя проекцией rg_Π из (2.3) на представление (5.4), получаем представление

$$\mathbf{0} = \pi_0 v_0 + \pi_1 v_1 + \dots + \pi_d v_d \quad (5.8)$$

для точки $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – центра звезды v и, значит, она имеет те же барицентрические координаты

$$\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d), \quad (5.9)$$

что и точка π , но уже относительно звезды v или, точнее, – относительно замкнутого d -мерного симплекса $\Delta_v = \Delta\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$. Бариецентрические координаты (5.9) центра звезды v назовем *типом* звезды, туре $v = \mathbf{0}_v = \pi$. Будем говорить, что звезды v и v' *аффинно эквивалентны* или, кратко, *эквивалентны* $v \sim v'$, если $v' = Av$ для некоторого преобразования A из группы аффинных преобразований $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ размерности d . Следующая лемма доказана в [11].

Лемма 5.1. *Эквивалентность $v \sim v'$ звезд имеет место в том и только в том случае, когда $\mathbf{0}_v = \mathbf{0}_{v'}$.* \square

5.6. Иррациональность луча и звезды. Скажем, что звезда v имеет *иррациональный* тип, если бариецентрические координаты π_0, \dots, π_d ее центра (5.9) удовлетворяют условию:

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}. \quad (5.10)$$

Лемма 5.2. *Звезда $v = \text{rg}_{\Pi} \mathbf{u}$, см. (2.6), иррациональна в том и только в том случае, когда иррационален луч Π .*

Доказательство. Это следует из определений иррациональности звезды (5.10) и луча (4.8) и равенства их бариецентрических координат, вытекающего из представлений (5.4), (5.8). \square

Теорема 5.3. *Если звезда v иррациональна (5.10), то ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ бесконечно дифференцируемо и*

$$\mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma). \quad (5.11)$$

Доказательство. Это следует из теоремы 5.2 и леммы 5.2. \square

Замечание 5.1. Формула (5.11) интересна тем, что дифференцирование ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$, определяемых своими внутренними параметрами – весовым вектором \mathbf{m} и звездой v , – полностью осуществляется на языке тех же внутренних параметров.

5.7. Специализации. Заметим, что дифференцирование

$$\sigma : \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}^\sigma \quad (5.12)$$

не определено на множестве обычных базисов \mathbf{u} , а только на множестве центрированных базисов \mathbf{u}_{Π} из (4.5). Чтобы определить дифференцирование базисов (5.12), нужно рассмотреть *специализации*

$$\sigma_* = \sigma_{k_1}^{k_1, k_2} \quad \text{и} \quad \sigma_* = \sigma_{k_2}^{k_1, k_2} \quad (5.13)$$

дифференцирований σ , действующие по формуле

$$\sigma_* : \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}^{\sigma_*} = \{\mathbf{u}_0^{\sigma_*}, \mathbf{u}_1^{\sigma_*}, \dots, \mathbf{u}_d^{\sigma_*}\} \quad (5.14)$$

где $\mathbf{u}_{k_1}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_1}$, $\mathbf{u}_{k_2}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_1} + \mathbf{u}_{k_2}$ для первого случая (5.13),

$\mathbf{u}_{k_1}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_1} + \mathbf{u}_{k_2}$, $\mathbf{u}_{k_2}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k_2}$ для второго случая (5.13),

$\mathbf{u}_{k'}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_{k'}$ для всех $k' \neq k_1, k_2$.

Используя (5.14) перенесем действие $\sigma_* : \mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{m}^{\sigma_*}$ также на множество весовых векторов \mathbf{m} из (1.5).

Уточним связь дифференцирования с его специализациями.

Замечание 5.2. 1. В определении (5.2) производного весового вектора \mathbf{m}^σ неявно присутствует центрирующий вектор Π в базисе \mathbf{u}_Π . Безотносительно же к базису \mathbf{u}_Π операция дифференцирования весовых векторов \mathbf{m}^σ не определена, также как и операция \mathbf{u}^σ в (5.12).

2. С другой стороны, пара $\{\sigma, \mathbf{u}_\Pi\}$ задает $\{\sigma, \mathbf{u}_\Pi\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_{\mathbf{u}_\Pi}$ специализацию дифференцирования σ таким образом, чтобы $\mathbf{u}^{\sigma_*} = \mathbf{u}_\Pi^\sigma$.

3. Аналогично, пара $\{\sigma, v\}$ задает специализацию $\{\sigma, v\} \xrightarrow{*} \sigma_* = \sigma|_v$. При этом производная звезда $v^{\sigma_{**}}$ не определена для $\sigma_{**} \neq \sigma_*$. Здесь σ_* и σ_{**} – двойственные специализации (5.13) одного и того же дифференцирования σ .

§6. ДЕФЛЯЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

6.1. Лучи. Пусть $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$ – множество индексов из $d + 1$ элемента; $\sigma = \{0, 1\}$ – сочетание из двух *фиксированных элементов* $0, 1$; $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$ – дополнение σ в \mathcal{D} из $d' = d - 1$ элемента и $\sigma'' \subset \sigma'$ – любое множество из $d'' = d - 2$ элементов.

Определим следующие лучи:

v_0, v_1 – *связанные лучи*: лучи звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, отвечающие сочетанию σ ;

v_0 – *исчезающий луч*;

v_1 – *остающийся луч* (доминантный луч);

v_k для $k \in \sigma'$ – *свободные лучи*;

$v_0 = v_0 + v_1$ – *новый луч* производной звезды $v^\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

6.2. Параллелепипеды. Определим для $k = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d -мерные *параллелепипеды*

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\}, \quad (6.1)$$

где k_1, \dots, k_d – индексы из дополнения $\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}$. Множество лучей v_{k_1}, \dots, v_{k_d} назовем *остовом* параллелепипеда T_k .

6.3. Ядро. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (2.7), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d \quad (6.2)$$

параллелепипедов (6.1) образует *ядро*.

6.4. Производное ядро. Пусть

$$v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\} \quad (6.3)$$

– производная звезда (4.4) для произвольного $\sigma \subset \mathcal{D}$. Определим *производное ядро*

$$T^\sigma = T_0^\sigma \cup T_1^\sigma \cup \dots \cup T_d^\sigma, \quad (6.4)$$

составленное из производных параллелепипедов

$$T_k^\sigma = \{\lambda_{k_1} v_{k_1}^\sigma + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}^\sigma; 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\}$$

аналогичных параллелепипедам (6.1). По условию луч v_0 исчезающий, а луч v_1 остающийся, т. е. является доминантным лучом. Поэтому, согласно определению (4.4), производная звезда (6.3) примет вид

$$v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\} = \{v_0 + v_1, v_1, \dots, v_d\} \quad \text{для } \sigma = \{0, 1\}. \quad (6.5)$$

6.5. Производные параллелепипеды. Опишем параллелепипеды из производного ядра T^σ (6.4) для $\sigma = \{0, 1\}$. Всего параллелепипедов $d + 1$.

$T_{\sigma', 1}$ – параллелепипед с остовом $v_{\sigma', 1} = \{v_{\sigma'}, v_1\}$;

$T_{\sigma', 0}$ – параллелепипед с остовом $v_{\sigma', 0} = \{v_{\sigma'}, v_0\}$, где $v_{\sigma'}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \sigma'$;

$T_{\sigma'', 0, 1}$ – параллелепипеды с остовами $v_{\sigma'', 0, 1} = \{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$, где $v_{\sigma''}$ – множество лучей v_k с индексами $k \in \sigma''$, при этом σ'' пробегает все $(d - 2)$ -подмножества из σ' . Последних параллелепипедов $d - 1$.

Характеристики производных параллелепипедов:

$T_0^\sigma = T_{\sigma', 1}$ – неменяющийся параллелепипед;

$T_1^\sigma = T_{\sigma', 0}$ – *компенсирующий* параллелепипед с уменьшенным объемом;

$T_k^\sigma = T_{\sigma'', 0, 1}$ – *деформирующиеся* параллелепипеды, сохраняющие объем.

6.6. Исходные параллелепипеды. Новые обозначения. Теперь опишем параллелепипеды исходного ядра T (6.2). Всего параллелепипедов $d + 1$. Они делятся на *три типа*:

$T_0 = T_{\sigma',1}$ – параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}, v_1\}$;

$T_1 = T_{\sigma',0}$ – параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}, v_0\}$;

$T_k = T_{\sigma'',0,1}$, где k из дополнения $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$, т.е. $k \neq 0, 1$, – параллелепипеды с остовами $\{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$.

6.7. Подстановки. Зададим Δ – подстановку (substitution), действующую на параллелепипеды T_0 , T_1 и T_k ($k \neq 0, 1$) соответственно специализациями Δ_0 , Δ_1 и Δ_k :

$$T_0 = T_{\sigma',1} \xrightarrow{\Delta_0} T_{\sigma',1}; \quad (6.6)$$

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\Delta_1} T_{\sigma',0} \cup (T_0 + v_0); \quad (6.7)$$

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} \xrightarrow{\Delta_k} T_{\sigma'',0,1}. \quad (6.8)$$

6.8. Орбиты производного разбиения. Если звезда v невырожденная, то по теореме 2.3 из [16] любая производная развертка

$$T^\sigma = T(v^\sigma) = T_0^\sigma \cup T_1^\sigma \cup \dots \cup T_d^\sigma$$

снова вкладывается $T^\sigma = T(v^\sigma) \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_L^d$ в тот же тор \mathbb{T}_L^d , но уже с *производным* весовым вектором

$$\mathbf{m}^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma) = (m_0 + m_1, m_1, \dots, m_d)$$

для подстановки $\sigma = \{0, 1\}$ в согласии с формулой (6.5).

6.9. Подстановки в исходных обозначениях. Перечислим:

$$T_0 = T_{\sigma',1} \xrightarrow{\Delta_0} T_{\sigma',1} = T_0^\sigma; \quad (6.9)$$

$$T_1 = T_{\sigma',0} \xrightarrow{\Delta_1} T_{\sigma',0} \cup (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0^\sigma + v_0); \quad (6.10)$$

$$T_k = T_{\sigma'',0,1} \xrightarrow{\Delta_k} T_{\sigma'',0,1} = T_k^\sigma \quad \text{для } k \neq 0, 1. \quad (6.11)$$

6.10. Подстановки и дифференцирования.

Теорема 6.1. Для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$ существует отображение $\sigma \rightarrow \Delta = \Delta(\sigma)$ в множество подстановок Δ вида (6.6)–(6.8) такое, что определенное в (3.1) ядерное разбиение $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ тора \mathbb{T}_L^d для невырожденной звезды v переводится

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma) \quad (6.12)$$

подстановкой Δ в производное ядерное разбиение $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma)$, порождаемое производной звездой v^σ (4.4).

Доказательство. См. [16]. \square

§7. ГЕОМЕТРИЯ ПОДСТАНОВОК ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

7.1. Косые сдвиги. Выясним геометрический смысл подстановок параллелепипедов (6.9)–(6.11). Первая подстановка (6.9) тождественная:

$$T_0 \xrightarrow{\Delta_0} T_0^\sigma = T_0. \quad (7.1)$$

Рассмотрим третью подстановку (6.11)

$$T_k = T_{\sigma'', 0, 1} \xrightarrow{\Delta_k} T_{\sigma'', \mathbf{0}, 1} = T_k^\sigma \quad \text{для } k \neq 0, 1.$$

По определению $T_k = T_{\sigma'', 0, 1}$ – d -мерные параллелепипеды с остовами $\{v_{\sigma''}, v_0, v_1\}$. За *основание (base)* $T_k(v_{\sigma''}, v_1)$ параллелепипеда T_k выберем $(d-1)$ -мерный параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma''}, v_1\}$. Представим параллелепипед T_k через сумму Минковского

$$T_k = T_{\sigma'', 0, 1} = T_k(v_{\sigma''}, v_1) \dot{+} v_0.$$

Также запишем и производный параллелепипед

$$T_k^\sigma = T_{\sigma'', \mathbf{0}, 1} = T_k(v_{\sigma''}, v_1) \dot{+} v_0,$$

где нулевой луч v_0 производной звезды v^σ имеет вид $v_0 = v_0 + v_1$. Следовательно, для $k \neq 0, 1$ преобразование $T_k \xrightarrow{\Delta_k} T_k^\sigma$ есть не что иное, как *косой сдвиг* верхнего основания $T_k(v_{\sigma''}, v_1) + v_0$ вдоль вектора v_1 , принадлежащего нижнему основанию $T_k(v_{\sigma''}, v_1)$. Поэтому преобразования косого сдвига Δ_k для $k \neq 0, 1$ сохраняют объем параллелепипедов

$$\text{vol } T_k^\sigma = \text{vol } T_k. \quad (7.2)$$

Более сложной оказалась вторая подстановка (6.10):

$$T_1 = T_{\sigma', 0} \xrightarrow{\Delta_1} T_{\sigma', \mathbf{0}} \cup (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0).$$

Рассмотрим *сужение* Δ_1^- отображения Δ_1 :

$$T_1 = T_{\sigma', 0} \xrightarrow{\Delta_1^-} T_1^\sigma = T_{\sigma', \mathbf{0}}. \quad (7.3)$$

Вернемся к гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через $d-1$ вектор звезды v с индексами из дополнения $\sigma' = \mathcal{D} \setminus \sigma$ к сочетанию $\sigma = \{0, 1\}$. Пусть для определенности луч v_0 принадлежит полупространству $H_{\sigma'}^+$,

другой луч v_1 – полупространству $H_{\sigma'}^-$. По соглашению v_0 – исчезающий луч, а v_1 – остающийся (доминантный) луч. Поэтому новый луч $v_0 = v_0 + v_1$ производной звезды v^σ будет принадлежать тому же полупространству, что и исчезающий луч v_0 . Итак, имеем

$$v_0 \in H_{\sigma'}^+, \quad v_0 \in H_{\sigma'}^+, \quad v_1 \in H_{\sigma'}^-. \quad (7.4)$$

В качестве *основания* $T_1(v_{\sigma'})$ параллелепипеда $T_1 = T_{\sigma',0}$ выберем $(d-1)$ -мерный параллелепипед с остовом $\{v_{\sigma'}\}$. Имеем

$$T_1 = T_{\sigma',0} = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} v_0; \quad (7.5)$$

$$T_1^\sigma = T_{\sigma',0} = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} v_0 = T_1(v_{\sigma'}) \dot{+} (v_0 + v_1). \quad (7.6)$$

Из представлений (7.5), (7.6) и включений (7.4) следует неравенство $\text{vol } T_1^\sigma = \text{vol } \Delta_1^- T_1 < \text{vol } T_1$. Таким образом, сужение Δ_1^- (7.3) отображения Δ_1 представляет собою *сжимающий* косоу сдвиг $T_1 \xrightarrow{\Delta_1^-} T_1^\sigma$.

7.2. Складки.

Предложение 7.1. 1. *Определенная в (6.9)–(6.11) подстановка параллелепипедов*

$$T_k \xrightarrow{\Delta} T_k^\sigma$$

имеет следующий геометрический смысл: $\Delta = \Delta_0$ – тождественное отображение; $\Delta = \Delta_1^-$ – сжимающий косоу сдвиг; $\Delta = \Delta_k$ – простой косоу сдвиг для остальных $k \neq 0, 1$.

2. *Отображение \vee -складки $T_1 \xrightarrow{\Delta} \Delta T_1 = T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0)$ сохраняет объем*

$$\text{vol } \Delta T_1 = \text{vol } T_1^\sigma + \text{vol } T_0 \quad (7.7)$$

3. *При подстановке параллелепипедов $\text{Kr} \xrightarrow{\Delta} \Delta \text{Kr}$, ядро $\text{Kr} = \text{Kr}(\mathcal{T})$ разбиения \mathcal{T} (2.17) сохраняет объем $\text{vol } \Delta \text{Kr} = \text{vol } \text{Kr}$.*

Доказательство. См. [15]. □

7.3. Дефляция ядерных разбиений. Пусть Δ – подстановка (6.6)–(6.8) на множестве параллелепипедов T_0, T_1, \dots, T_d и

$$\mathcal{T}(\mathbf{m}, v) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T}^\Delta(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) \quad (7.8)$$

– отображение (6.12) на множестве ядерных разбиений $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ из теоремы 6.1. По предложению 7.1 отображения $T_k \xrightarrow{\Delta} T_k^\sigma$ или сохраняют объемы параллелепипедов, или уменьшают. При этом недостающий объем всего исходного разбиения \mathcal{T} восполняется через образование

\vee -складкок $T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0)$ в преобразованном разбиении \mathcal{T}^Δ или, иначе, добавлением в \mathcal{T}^Δ новых параллелепипедов вида T_0 .

Таким образом, в результате преобразования $\mathcal{T} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T}^\Delta$ разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ в нем в среднем происходит уменьшение объемов образующих его параллелепипедов T_k . По этой причине преобразование (7.8) называется *дефляцией* разбиения $\mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$.

7.4. Дефляция двумерного ядерного разбиения. Рассматривается ядерное разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ размерности $d = 2$, изображенное на рис. 2.1. Для его ядра $T = \text{Kr} = \text{Kr}(\mathcal{T})$ (6.2) на рис. 7.1 показан процесс образования \vee -складки $T_1^\sigma \vee (T_0 + v_0) = T_1^\sigma \cup (T_0 + v_0)$ в случае сочетания $\sigma = \{0, 1\}$, когда v_0 – исчезающий луч, а v_1 – остающийся (доминантный) луч.

Звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ в разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ имеет лучи v_0, v_1, v_2 порядков $m_0 = 6, m_1 = 5, m_2 = 3$. У дефлированной звезды $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ порядки лучей $m_0^\sigma = m_0 + m_1 = 11, m_1^\sigma = 5, m_2^\sigma = 3$.

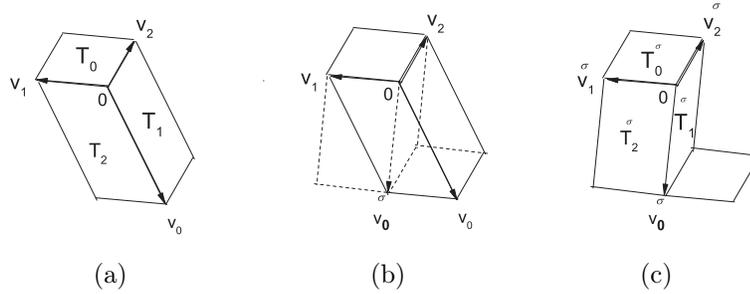


Рис. 7.1. (a) Исходное ядро T ; (b) образование \vee -складки; (c) ядро T^σ после дефляции $\sigma = \{0, 1\}$.

Для того же сочетания $\sigma = \{0, 1\}$ на рис. 8.1 показан процесс дефляции $\mathcal{T} \xrightarrow{\Delta} \Delta\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ (7.8) двумерного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ на рис. 2.1. Весь дефляционный процесс происходит в многоугольной полосе, выделенной жирными границами на рис. 8.1(b). В результате дефляции порядок $m_0 = 6$ становится $m_0^\sigma = 11$, поэтому в разбиении $\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ количество параллелограммов типа T_0 возрастает на 5. Все новые параллелограммы типа T_0 лежат в выделенной полосе и входят в образовавшиеся \vee -складки.

§8. СТУПЕНЧАТЫЙ ГИПЕРСЛОЙ И ЕГО ДЕФЛЯЦИЯ

8.1. Ступенчатый гиперслой. В d -мерном ядерном разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \Pi)$ построим бесконечный ступенчатый слой \mathcal{L} . Построение начнем с *затравки*

$$\text{Кг} \setminus T_0 = T_1 \cup \dots \cup T_d \quad (8.1)$$

из d параллелепипедов ядра Кг . Они имеют общее v_0 -ребро, соответствующее лучу v_0 звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ и общую *нулевую вершину* $x_0 = 0$. У всех параллелепипедов T_k ядра Кг будем считать вершину $x_0 = 0$ *отмеченной*. При таком допущении любой параллелепипед

$$T_k[x] = T_k + x \quad \text{с} \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (8.2)$$

имеет вполне определенное положение в пространстве \mathbb{R}^d .

Фиксируем параллелепипед $T_{\mathbf{k}}$ из затравки $\text{Кг} \setminus T_0$ и вершину $x \in \mathcal{T}^{\text{ver}}$ разбиения \mathcal{T} . Будем предполагать выполненным условие

$$T_{\mathbf{k}}[x_0] \subset \mathcal{T}. \quad (8.3)$$

В дальнейшем $T_{\mathbf{k}}$ служит *аппроксимационным параллелепипедом*.

К параллелепипеду $T_{\mathbf{k}}$ со всех сторон по v_0 -ребру будем последовательно прикладывать соседние параллелепипеды

$$T_k[x] \subset \mathcal{T} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (8.4)$$

из разбиения \mathcal{T} , где $x \in \mathcal{T}^{\text{ver}}$ – вершины разбиения \mathcal{T} . Получаем непрерывный *ступенчатый слой*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(T_{\mathbf{k}}, x_0) = \bigcup_{1 \leq k \leq d} \bigcup_{x_k \in \mathcal{B}^{\text{ver}}} T_k[x_k], \quad (8.5)$$

составленный из параллелепипедов (8.4) (см. рис. 2.1 и рис. 8.1). Здесь \mathcal{B} обозначает $(d-1)$ -мерную границу слоя \mathcal{L} , проходящую через вершину $x_0 \in \mathcal{T}^{\text{ver}}$. Назовем ее *верхней границей* слоя \mathcal{L} . Объединение (8.5) является *разбиением* слоя \mathcal{L} на параллелепипеды T_1, \dots, T_d . Поскольку слой \mathcal{L} разделяет все разбиение \mathcal{T} на две части, то его можно назвать *гиперслоем*.

Замечание 8.1. Все построения (8.1)–(8.5) слоя \mathcal{L} соответствуют базисной специализации $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$ для дифференцирования $\sigma = \sigma^{0,1}$ из §6, где v_0, v_1 – связанные лучи, т. е. лучи звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, отвечающие дифференцированию σ , при этом v_0 – исчезающий луч, v_1 – доминантный луч, остальные v_k для $k \neq 0, 1$ – свободные лучи.

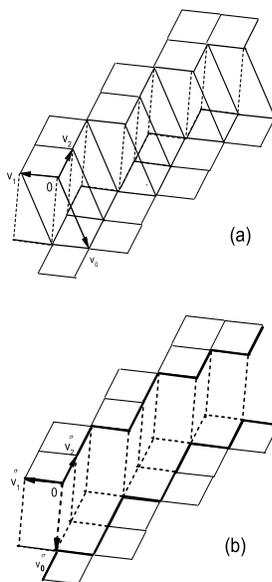


Рис. 8.1. (a) Образование V-складок в разбиении \mathcal{T} для $\sigma = \{0, 1\}$; (b) дефлированное разбиение $\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$.

Если потребуется указать на специализацию σ_* , то кроме (8.5) будем использовать уточняющее обозначение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\sigma_*; T_{\mathbf{k}}, x_0) \quad \text{для специализации} \quad \sigma_* = \sigma_0^{0,1}. \quad (8.6)$$

Из определения (8.1)–(8.5) следует, что граница $\partial\mathcal{L}$ полосы \mathcal{L} разбивается

$$\partial\mathcal{L} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}[v_0] \quad (8.7)$$

на две ступенчатые гиперповерхности \mathcal{B} и $\mathcal{B}[v_0] = \mathcal{B} + v_0$; при этом вершины $x \in \mathcal{B}^{\text{ver}}$ верхней границы \mathcal{B} обладают свойством:

$$x \in \mathcal{B}^{\text{ver}} \Rightarrow \mu x \in \Upsilon_{\mathbf{m} \setminus \{m_0\}}, \quad (8.8)$$

где μx – вес (2.12) вершины x ,

$$\Upsilon_{\mathbf{m} \setminus \{m_0\}} = [0, m - m_0] = [0, m_1 + \dots + m_d] \subset \Upsilon_{\mathbf{m}}$$

– *укороченный полуинтервал* из весового полуинтервала $\Upsilon_{\mathbf{m}}$ (1.13) и $m_k = \mu v_k$ – веса (2.9) лучей $v_k \in v$ звезды (2.7). Для вершин границы $\partial\mathcal{L}$ полосы \mathcal{L} имеют место включения

$$\mathcal{B}^{\text{ver}} \subset \mathcal{T}^{\text{ver}}, \quad \mathcal{B}^{\text{ver}}[v_0] \subset \mathcal{T}^{\text{ver}}.$$

Отметим, что вершины $x \in \mathcal{B}^{\text{ver}}$ и $x+v_0 \in \mathcal{B}^{\text{ver}}[v_0]$ соединены v_0 -ребром некоторого параллелограмма из разбиения \mathcal{T} .

8.2. Дефляция гиперслоя. Пусть X – произвольное множество из \mathbb{R}^d и $\text{Til } X$ – какое-либо его разбиение. Для формулировки следующего результата нам потребуется операция *стирания* разбиения $|\text{Til } X| = X$, т. е. возвращения от разбиения $\text{Til } X$ к исходному множеству X .

Теорема 8.1. Пусть \mathcal{L} – гиперслоем (8.6) и $\mathcal{L}^\Delta = \mathcal{L}^{\sigma_*}$ – его дефляция (7.8) для специализации $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$, т. е. ограничение дефляции $\Delta = \sigma_*$ из (7.8) со всего разбиения \mathcal{T} на параллелепипеды гиперслоя \mathcal{L} . Тогда имеет место равенство множеств

$$|\mathcal{L}^\Delta| = |\mathcal{L}|. \quad (8.9)$$

Здесь первоначально гиперслоем \mathcal{L} рассматривается как разбиение на параллелепипеды T_1, \dots, T_d .

Доказательство. Заметим, что, при дефляции $\mathcal{L} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{L}^\Delta$ полосы \mathcal{L} ее границы \mathcal{B} и $\mathcal{B}[v_0]$ сохраняются

$$\partial\mathcal{L}^\Delta = \partial\mathcal{L} \quad (8.10)$$

(см. рис. 7.1 и рис. 8.1). Затем отметим, при дифференцировании $v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = v^{\sigma_0^{0,1}}$ звезды v осуществляется специализация $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$. Поэтому при дефляции $\Delta = \sigma_*$ выполняется включение множеств

$$|\mathcal{L}^\Delta| \subset |\mathcal{L}|. \quad (8.11)$$

Согласно формул (7.1), (7.2) и (7.7) дефляция Δ сохраняет объемы

$$\text{vol } \Delta T_k = \text{vol } T_k \quad (8.12)$$

параллелепипедов ΔT_k для $k = 0, 2, \dots, d$ и складки ΔT_1 для $k = 1$.

Поскольку \mathcal{L}^Δ является разбиением, т. е. в нем параллелепипеды не пересекаются по внутренним точкам, отсюда и из (8.10), (8.11), (8.12) выводим равенство (8.9). \square

Замечание 8.2. Определенный в (8.6) гиперслоем \mathcal{L} будет рассматриваться и как множество, и как разбиение на параллелепипеды. Из контекста будет ясно, о чем идет речь.

§9. СПРЯМЛЕНИЕ И РАССЛОЕНИЕ ГИПЕРСЛОЯ

9.1. Проекция гиперслоя. Рассмотрим *проекцию* $\text{pr} = \text{pr}_{\downarrow v_0}$ пространства \mathbb{R}^d на \mathbb{R}^{d-1} :

$$\text{pr} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d-1}.$$

Проекция осуществляется вдоль вектора v_0 из ядра v на гиперплоскость, проходящую через начало координат $x = 0$, которую будем отождествлять с $(d-1)$ -мерным подпространством $\mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$.

Поддействию проекцией

$$\text{pr} : \mathcal{L} \longrightarrow \text{pr } \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{d-1} \quad (9.1)$$

на гиперслоем (8.6). Если гиперслоем \mathcal{L} рассматривать как разбиение, то его проекция $\text{pr } \mathcal{L}$ также будет *разбиением*. В определении (9.1) гиперслоем \mathcal{L} можно заменить его границами (8.7). В этом случае придем к тому же самому разбиению:

$$\text{pr } \mathcal{L} = \text{pr } \partial \mathcal{L} = \text{pr } \mathcal{B} = \text{pr } \mathcal{B}[v_0]. \quad (9.2)$$

Для разбиения $\text{pr } \mathcal{L}$ звездой будет множество $(d-1)$ -мерных векторов

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\} \subset \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{где } \mathbf{v}_k = \text{pr } v_k, \quad (9.3)$$

– это будет доказано в предложении 9.1. Используя звезду \mathbf{v} для индексов $k = 1, 2, \dots, d$ определим $(d-1)$ -мерные базисные *параллелепипеды*

$$\mathbf{T}_k = \text{pr } T_k, \quad (9.4)$$

натянутые на векторы $\mathbf{v}_{k'} \in \mathbf{v}$ с номерами $k' \neq k$.

По схеме §3, кроме основного разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}^d$, введем еще новое $(d-1)$ -мерное *разбиение*

$$\mathcal{T}^{d-1} = \mathcal{T}(\mathbf{m} \setminus \{m_0\}, \mathbf{v}; \mathbf{x}_0, \mu_{\mathbf{k}}) \subset \mathbb{R}^{d-1}, \quad (9.5)$$

где $\mathbf{x}_0 = \text{pr } x_0 \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\mu_0 = \mu x_0 = \mu x_0 \in \Upsilon_{\mathbf{m} \setminus \{m_0\}}$ – начальная вершина и ее вес.

Предложение 9.1. *Определенные в (9.1), (9.5) разбиения совпадают:*

$$\text{pr } \mathcal{L} = \mathcal{T}^{d-1}. \quad (9.6)$$

Доказательство. Проверим, что если первоначальное множество $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ образует звезду (2.7), то его проекция $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$

из (9.3) сохраняет данное свойство. По критерию 2.1 имеет место представление начала координат

$$\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d = 0 \quad (9.7)$$

через лучи звезды v с коэффициентами $\lambda_0 > 0, \dots, \lambda_d > 0$. Тогда из (9.7) будет следовать аналогичное представление для проекций лучей

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_d \mathbf{v}_d = 0 \quad (9.8)$$

с коэффициентами $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_d > 0$ и, значит, снова по критерию 2.1 проекция \mathbf{v} остается звездой.

Для доказательства равенства (9.6) воспользуемся определением проекции гиперслоя \mathcal{L} из (9.2):

$$\text{pr } \mathcal{L} = \text{pr } \mathcal{B}.$$

Данное равенство означает совпадение локальных правил у проекции $\text{pr } \mathcal{L}$ и верхней границы \mathcal{B} с локальными правилами (8.8). Последние в точности такие же, как у разбиения \mathcal{T}^{d-1} из (9.5). Данный факт вместе с (9.8) доказывают равенство (9.6). \square

9.2. Расслоение гиперслоя. Воспользуемся теоремой 3.1 и рассмотрим расслоение

$$\mathcal{T}^{d-1} = \mathcal{T}(\mathbf{m} \setminus \{m_0\}, \mathbf{v}; \mathbf{x}_0, \mu_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} Eq(\mathbf{x}_0, n) \quad (9.9)$$

$(d-1)$ -мерного разбиения (9.5) по полиэдральным геодезическим слоям

$$Eq(\mathbf{x}_0, n) = \bigcup_{(\mathbf{x}, k, \mathbf{i}) \in eq(\mathbf{x}_0, n)_{\text{ind}}} \mathbf{x} \mathbf{T}_{k, \mathbf{i}},$$

где разбиение нумеруется тройками точек из

$$eq(\mathbf{x}_0, n)_{\text{ind}} = \{(\mathbf{x}, k, \mathbf{i}) : 1 \leq k \leq d, (x, \mathbf{i}) \in eq(\mathbf{x}_0, n; k)\}$$

(см. определение (3.7)).

По предложению 9.1 существует изоморфизм

$$\text{pr} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{T}^{d-1}$$

между разбиением \mathcal{T}^{d-1} и разбиением ступенчатого d -мерного слоя \mathcal{L} , действующий по правилу

$$\text{pr} : x T_{k, \mathbf{i}} \longrightarrow \mathbf{x} \mathbf{T}_{k, \mathbf{i}}, \quad (9.10)$$

где

$$\mathbf{T}_k = \text{pr } T_k, \quad x = \text{pr } \mathbf{x}$$

для $k = 1, 2, \dots, d$ (см. (9.4)). Данный изоморфизм позволяет перенести (9.9) на разбиение

$$\mathcal{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} Eq(\mathbf{x}_0, n) \quad (9.11)$$

гиперслоя \mathcal{L} по d -мерным геодезическим слоям

$$Eq(\mathbf{x}_0, n) = \bigcup_{(\mathbf{x}, k, i) \in eq(\mathbf{x}_0, n)_{\text{ind}}} xT_{k,i}. \quad (9.12)$$

§10. ДЕФЛЯЦИОННЫЙ ПЕРЕХОД

10.1. Дефляция базисных параллелепипедов. Пусть, как и раньше, Δ – дефляция (7.8) для специализации $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$. По (6.10) и (6.11) имеем

$$T_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\Delta} T_{\mathbf{k}}^{\sigma} \cup (T_0^{\sigma} + v_0) \quad \text{для } \mathbf{k} = 1, \quad (10.1)$$

$$T_{\mathbf{k}} \xrightarrow{\Delta} T_{\mathbf{k}}^{\sigma} \quad \text{для } \mathbf{k} = 2, \dots, d. \quad (10.2)$$

Для $k = 1$, по (10.1) записываем

$$\begin{aligned} xT_{k,i} &\xrightarrow{\Delta} (x-v_i)T_{k,\emptyset}^{\sigma} \cup (v_0+x-v_i)T_{0,\emptyset}^{\sigma}, \quad \text{так как} & (10.3) \\ \Delta xT_{k,i} &= \Delta T_k + (x-v_i) = (T_k^{\sigma} + (x-v_i)) \cup (T_0^{\sigma} + v_0 + x-v_i) \\ &= T_k^{\sigma}[x-v_i] \cup T_0^{\sigma}[v_0+x-v_i] = (x-v_i)T_{k,\emptyset}^{\sigma} \cup (v_0+x-v_i)T_{0,\emptyset}^{\sigma}, \end{aligned}$$

где, согласно (7.1), $T_{0,\emptyset}^{\sigma} = T_{0,\emptyset}$. Для $k = 2, \dots, d$ по (10.2) получим

$$xT_{k,i} \xrightarrow{\Delta} (x-v_i)T_{k,\emptyset}^{\sigma}, \quad \text{так как} \quad (10.4)$$

$$\Delta xT_{k,i} = \Delta(T_k + (x-v_i)) = T_k^{\sigma} + (x-v_i) = T_k^{\sigma}[x-v_i] = (x-v_i)T_{k,\emptyset}^{\sigma}.$$

10.2. Переход к новому аппроксимационному параллелепипеду. В условиях теоремы 8.1 пусть

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{L}^{\Delta} = \mathcal{L}^{\sigma_*}$$

– дефляция (7.8) гиперслоя \mathcal{L} для специализации $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}^d$ принадлежит

$$\beta \in xT_{\mathbf{k},\emptyset} = T_{\mathbf{k}}[x] \quad (10.5)$$

аппроксимационному параллелепипеду $T_{\mathbf{k}}$ из (8.3) в вершине $x = x_0 \in \mathcal{T}^{\text{ver}}$ для некоторого $\mathbf{k} = 1, 2, \dots, d$. По (8.5) он содержится

$$T_{\mathbf{k}}[x] \in Eq(x, 0) \subset \mathcal{L}$$

в нулевом геодезическом слое.

Используя расслоение (9.11), перейдем к дефляции гиперслоя

$$\mathcal{L}^{\Delta} = \bigcup_{n=0}^{\infty} Eq^{\Delta}(x, n),$$

где

$$Eq^{\Delta}(x, n) = \bigcup_{(\mathbf{x}, k, i) \in eq(x, n)_{\text{ind}}} \Delta x T_{k, i} \quad (10.6)$$

уже не являются геодезическими слоями.

Переходя по верхней строке диаграммы от слоя к слою

$$\begin{array}{ccccccc} Eq(x, 0) & \rightarrow & Eq(x, 1) & \rightarrow \dots \rightarrow & Eq(x, n) & \rightarrow \dots \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & & \\ Eq^{\Delta}(x, 0) & \rightarrow & Eq^{\Delta}(x, 1) & \rightarrow \dots \rightarrow & Eq^{\Delta}(x, n) & \rightarrow \dots, \end{array} \quad (10.7)$$

мы будем перебирать весь гиперслой \mathcal{L} . По теореме 8.1 гиперслой \mathcal{L} и его дефляция \mathcal{L}^{Δ} совпадают как множества $|\mathcal{L}^{\Delta}| = |\mathcal{L}|$. Поэтому движение по верхней строке диаграммы (10.7) можно заменить движением по ее нижней строке.

Пусть на n -ом шаге нашлось такое $xT_{k, i}$ из (10.6), что

$$\beta \in \Delta x T_{k, i}.$$

Тогда, согласно (10.3) и (10.4), будет иметь место одно из включений:

$$\beta \in (x - v_i)T_{k, \emptyset}^{\sigma} \quad \text{или} \quad \beta \in (v_0 + x - v_i)T_{0, \emptyset}^{\sigma} \quad \text{для} \quad k = 1; \quad (10.8)$$

$$\beta \in (x - v_i)T_{k, \emptyset}^{\sigma} \quad \text{для} \quad k = 2, \dots, d. \quad (10.9)$$

Для параллелепипедов из (10.8) и (10.9) введем единое обозначение

$$T^{\sigma}(\beta) = (\nu_k + x - v_i)T_{k, \emptyset}^{\sigma} = T_k^{\sigma}[\nu_k + x - v_i], \quad \text{где} \quad (10.10)$$

$$\nu_k = \begin{cases} v_0, & \text{если} \quad k = 0, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq 0. \end{cases}$$

10.3. \mathfrak{B} -алгоритм.

Случай $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$. Для случая дифференцирования $\sigma = \sigma^{0,1}$ со специализацией $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$ опишем \mathfrak{B} -алгоритм

$$\mathcal{T} \ni T(\beta) \xrightarrow{\mathfrak{B}(\sigma_0^{0,1})} T^{\sigma}(\beta) \in \mathcal{T}^{\sigma} \quad (10.11)$$

поиска параллелепипеда $T^\sigma(\beta)$, начиная с аппроксимационного параллелепипеда

$$\beta \in T(\beta) = T_k[x] = T_{\mathbf{k}}[x].$$

Шаг 1. Если $T(\beta) = T_k[x]$ для $k = 0$, то полагаем $T^\sigma(\beta) = T(\beta)$; и \mathfrak{B} -алгоритм останавливается.

Шаг 2. Если же $T(\beta) = T_k[x]$ для $k \neq 0$, то двигаясь по нижней строке диаграммы (10.7) за конечное число шагов $n = 0, 1, 2, \dots$ находим первый попавшийся параллелепипед $T^\sigma(\beta)$ из (10.10); и \mathfrak{B} -алгоритм останавливается.

Случай произвольного $\sigma_* = \sigma_{k_0, k_1}^{k_0, k_1}$. Укажем, какие нужно сделать изменения

$$\mathcal{T} \ni T(\beta) \xrightarrow{\mathfrak{B}(\sigma_{k_0, k_1}^{k_0, k_1})} T^\sigma(\beta) \in \mathcal{T}^\sigma$$

в определении \mathfrak{B} -алгоритма (10.11) в случае произвольного дифференцирования $\sigma = \sigma^{k_0, k_1}$ со специализацией $\sigma_* = \sigma_{k_0, k_1}^{k_0, k_1}$. Зададим подстановку $s = s(k_0, k_1)$ на множестве индексов $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$, переводящую $k_0 \rightarrow 0$, $k_1 \rightarrow 1$, а другие $k \neq k_0, k_1$ биективно в оставшиеся индексы $\mathcal{D} \setminus \{0, 1\}$ произвольным образом. В этом случае \mathfrak{B} -алгоритм модифицируется следующим образом:

$$\mathfrak{B}(\sigma_{k_0, k_1}^{k_0, k_1}) = \underbrace{s^{-1}}_3 \cdot \underbrace{\mathfrak{B}(\sigma_0^{0,1})}_2 \cdot \underbrace{s}_1, \quad (10.12)$$

где операции в (10.12) производятся в указанном порядке. Здесь подстановка s производит соответствующую перенумерацию параллелепипедов T_0, T_1, \dots, T_d разбиения \mathcal{T} ; $\mathfrak{B}(\sigma_0^{0,1})$ – ранее определенный \mathfrak{B} -алгоритм (10.11); s^{-1} – обратная перенумерация параллелепипедов $T_0^\sigma, T_1^\sigma, \dots, T_d^\sigma$ уже в производном разбиении \mathcal{T}^σ .

10.4. Входные и выходные данные \mathfrak{B} -алгоритма.

$$\text{Входные данные } \mathfrak{B}\text{-алгоритма:} \quad (10.13)$$

- 1) разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ с параметрами: $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_d)$ – весовым вектором (1.5) и $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ – звездой (2.6);
- 2) дифференцирование $\sigma = \sigma^{0,1}$ со специализацией $\sigma_* = \sigma_0^{0,1}$;
- 3) аппроксимационный параллелепипед $T_{\mathbf{k}}[x]$ в вершине

$$x = x_0 = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_d v_d \in \mathcal{T}^{\text{ver}} \text{ веса}$$

$$\mu_x = \mu x = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_d m_d \in \Upsilon_{\mathbf{m} \setminus \{m_0\}}, \quad (10.14)$$

определяемый через веса (2.9) лучей v_k звезды v .

Выходные данные \mathfrak{B} -алгоритма: (10.15)

- 1) производное разбиение $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}^\sigma(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^\sigma, v^\sigma)$ с весовым вектором $\mathbf{m}^\sigma = (m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_d^\sigma)$ и звездой $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}$;
- 2) следующее дифференцирование σ' со специализацией σ'_* ;
- 3) аппроксимационный параллелепипед $T^\sigma(\beta) = T_k^\sigma[x']$ в вершине

$$x' = \nu_k + x - v_i \in (\mathcal{T}^\sigma)^{\text{ver}}$$

разбиения \mathcal{T}^σ , разложение (2.11) и вес (2.12) которой находится из условия $(\mathbf{x}, k, \mathbf{i}) \in eq(x, n)_{\text{ind}}$ в (9.12).

Замечание 10.1. Из сравнения (10.13) и (10.15) можно сделать вывод: множество входных и выходных данных \mathfrak{B} -алгоритма одно и то же, поэтому в иррациональном случае возможно продолжение итерации \mathfrak{B} -алгоритма сколь угодно долго.

10.5. Однородные приближения. Подобные приближения возникают для $\beta = 0$, когда аппроксимационный параллелепипед $T_k[x]$ находится в нулевой вершине $x = 0$, т. е.

$$\beta = 0 \in T(\beta) = T_k[0]. \quad (10.16)$$

В этом случае \mathfrak{B} -алгоритм (10.11) через произвольное дифференцирование σ разбиения \mathcal{T} приводит к новой аппроксимации

$$\beta = 0 \in T^\sigma(\beta) = T_k^\sigma[0] \quad (10.17)$$

того же типа, что и начальная аппроксимация (10.16). Мы видим, что \mathfrak{B} -алгоритм не выводит действие за пределы ядра Kг разбиения \mathcal{T} :

$$\beta = 0 \in \text{Kг} \xrightarrow{\mathfrak{B}} \text{Kг}^\sigma \ni \beta = 0, \quad (10.18)$$

$\text{Kг} = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d$ и $\text{Kг}^\sigma = T_0^\sigma \cup T_1^\sigma \cup \dots \cup T_d^\sigma$ – ядро производного разбиения \mathcal{T}^σ .

Если в качестве β выбрать какую-либо вершину $\beta \in \mathcal{T}^{\text{ver}}$ разбиения \mathcal{T} , то все сведется снова к аппроксимации (10.17). Таким образом, для вершин $\beta \in \mathcal{T}^{\text{ver}}$ мы оказываемся в ситуации однородных приближений, ранее подробно рассмотренной в [1], [2].

Из (10.18) следует, что однородные приближения не требуют использования дефляции из (7.8). Это отличает однородные приближения от неоднородных – последние существенно сложнее первых.

§11. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИТЕРАЦИЙ

11.1. Бесконечные итерации дифференцирований. Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \quad (11.1)$$

– множество всех бесконечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$, состоящих из всевозможных σ_i из Σ ; и пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ , при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \emptyset$. Используя определение производной звезды (4.4), индукцией по $n = 0, 1, 2, \dots$ определим $[\sigma]_n$ -*производные*

$$v^{[\sigma]_n} = (v^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n},$$

звезды v , где условимся $v^{[\sigma]_0} = v$ для $n = 0$. В иррациональном случае (4.8) звезда v будет $[\sigma]_n$ -*дифференцируемой* для всех значений $n = 0, 1, 2, \dots$ при любом выборе последовательности σ из множества (11.1).

Для таких звезд v соответствующее разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ также будет бесконечно дифференцируемым:

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sigma_1} \mathcal{T}^{[\sigma]_1} \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} \mathcal{T}^{[\sigma]_n} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \dots, \quad (11.2)$$

где, согласно теореме 5.2, имеем $\mathcal{T}^{[\sigma]_n} = \mathcal{T}^{[\sigma]_n}(\mathbf{m}, v) = \mathcal{T}(\mathbf{m}^{[\sigma]_n}, v^{[\sigma]_n})$. Производные $v^{[\sigma]_n}$ и $\mathbf{m}^{[\sigma]_n}$ определены в (4.4) и (5.3).

Посредством \mathfrak{B} -алгоритма (10.12) последовательности (11.2) отвечает последовательность

$$T(\beta) \xrightarrow{[\sigma]_1} T^{[\sigma]_1}(\beta) \xrightarrow{[\sigma]_2} \dots \xrightarrow{[\sigma]_n} T^{[\sigma]_n}(\beta) \xrightarrow{[\sigma]_{n+1}} \dots$$

аппроксимационных параллелепипедов

$$T^{[\sigma]_n}(\beta) = T_{k_n}^{[\sigma]_n}[x_n] \quad (11.3)$$

с номерами $k_n = 0, 1, \dots, d$ и в вершинах $x_n \in \mathcal{T}^{[\sigma]_n \text{ ver}}$, однозначно определяемых $[\sigma]_n$ -производной.

11.2. Периодические разбиения. Для приложений к диофантовым приближениям наиболее интересны периодические разбиения

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{per}} = \mathcal{T}_{\text{per}}(\mathbf{m}, v). \quad (11.4)$$

Выберем весовой вектор

$$\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_d) = (1, 1, \dots, 1) \quad (11.5)$$

и звезду

$$v = v(\alpha) = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}, \quad (11.6)$$

состоящую из лучей

$$v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - \mathbf{e}_1, \dots, \quad v_d = \alpha - \mathbf{e}_d, \quad (11.7)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_d = (0, 0, \dots, 1)$ – единичный базис \mathbb{R}^d . По критерию 2.1, лучи v_0, v_1, \dots, v_d звезды v должны удовлетворять условию

$$\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d = 0 \quad (11.8)$$

с коэффициентами $\lambda_0 > 0, \dots, \lambda_d > 0, \lambda_0 + \dots + \lambda_d = 1$. Подставляя в равенство (11.8) явное выражение для лучей (11.7), приходим к равносильному равенству

$$\alpha = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_d \mathbf{e}_d, \quad (11.9)$$

где

$$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_d > 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_d < 1. \quad (11.10)$$

В силу критерия 2.1 условия (11.9) и (11.10) являются необходимыми и достаточными, чтобы совокупность лучей (11.6) образовывало звезду. Используя явный вид вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, перепишем условия (11.9) и (11.10) в более удобном виде

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_d > 0, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_d < 1. \quad (11.11)$$

Вектор α назовем *иррациональным*, если

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \text{ линейно независимы над } \mathbb{Z}. \quad (11.12)$$

В этом случае определенная в (11.6) звезда v , а с ней и периодическое разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{per}}$ из (11.4), будут бесконечно дифференцируемыми:

$$\mathcal{T}_{\text{per}} \xrightarrow{\sigma_1} \mathcal{T}_{\text{per}}^{[\sigma]_1} \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_n} \mathcal{T}_{\text{per}}^{[\sigma]_n} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} \dots \quad (11.13)$$

При этом разбиение \mathcal{T}_{per} и все его производные $\mathcal{T}_{\text{per}}^{[\sigma]_n}$ будут периодическими разбиениями пространства \mathbb{R}^d с *единичной квадратной решеткой* периодов $L = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d]$. Поэтому факторизованные разбиения

$$\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{[\sigma]_n} = \mathcal{T}_{\text{per}}^{[\sigma]_n} / L \subset \mathbb{T}^d$$

можно рассматривать как разбиения d -мерного тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ для любых бесконечных последовательностей $\sigma \in \Xi$ и всех порядков производных $n = 0, 1, 2, \dots$

Введем в рассмотрение *сдвиг*

$$\mathbb{T}^d \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d : S(x) \equiv x + \alpha \pmod{L} \quad (11.14)$$

тора на вектор α и *орбиту*

$$\text{Orb}^{[\sigma]^n}(0) = \{S^i(0) \equiv i\alpha \pmod{L}; i = 0, 1, \dots, m^{[\sigma]^n} - 1\} \quad (11.15)$$

начальной вершины 0 относительно сдвига тора (11.14). *Порядок* $m^{[\sigma]^n}$ орбиты $\text{Orb}^{[\sigma]^n}(0)$ вычисляется, с учетом начальных условий (11.5), по формуле

$$m^{[\sigma]^n} = m_0^{[\sigma]^n} + m_1^{[\sigma]^n} + \dots + m_d^{[\sigma]^n}, \quad (11.16)$$

приведенной ранее в (5.3). Число $m^{[\sigma]^n}$ также называется *порядком* разбиения $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{[\sigma]^n}$ и его звезды $v^{[\sigma]^n}$.

Предложение 11.1. *Вершины разбиения тора $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{[\sigma]^n}$ есть в точности точки орбиты $\text{Orb}^{[\sigma]^n}(0)$, т. е.*

$$(\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{[\sigma]^n})^{\text{ver}} = \text{Orb}^{[\sigma]^n}(0).$$

Доказательство. См. [1]. □

11.3. Радиусы базисных параллелепипедов и ядра. Пусть разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{m}, v)$ имеет звезду $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$. Зададим *радиусы* его базисных параллелепипедов T_k из (2.16), полагая

$$\varrho(T_k) = \sum_{\substack{0 \leq k' \leq d \\ k' \neq k}} |v_{k'}|_1, \quad (11.17)$$

где $|\cdot|_1$ – метрика (0.3). *Радиус* звезды v и ядра $\text{K}\Gamma = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d$ разбиения (6.2) определим равенством

$$\varrho(v) = \varrho(\text{K}\Gamma) = \sum_{0 \leq k \leq d} |v_k|_1. \quad (11.18)$$

Так как лучи звезды $v_k \neq 0$, будет

$$\varrho(T_k) < \varrho(v) \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots, d. \quad (11.19)$$

Определения (11.17) и (11.18) естественным образом переносятся на базисные параллелепипеды $T_k^{[\sigma]^n}$, звезды $v^{[\sigma]^n}$ и ядра $\text{K}\Gamma^{[\sigma]^n}$ производных разбиений $\mathcal{T}^{[\sigma]^n}$.

11.4. Основной результат о неоднородных приближениях.

Теорема (основная) 11.1. Пусть $\mathcal{T}_{\text{per}} = \mathcal{T}_{\text{per}}(\mathbf{m}, v)$ – периодическое разбиение с весовым вектором \mathbf{m} и иррациональной звездой $v = v(\alpha)$ из (11.5) и (11.6); и пусть $T^{[\sigma]n}(\beta) = T_{k_n}^{[\sigma]n}[\mathbf{x}_n]$ – аппроксимационные параллелепипеды (11.3), полученные посредством \mathfrak{B} -алгоритма (10.12) для разбиения \mathcal{T}_{per} , произвольного вектора β из тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и любой бесконечной последовательности дифференцирований $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества (11.1). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Найдутся такой целый вектор $p^{[\sigma]n} \in \mathbb{Z}^d$ и такое целое число $q^{[\sigma]n}$ с условием

$$0 \leq q^{[\sigma]n} < m^{[\sigma]n}, \quad (11.20)$$

где $m^{[\sigma]n}$ – порядок (11.16) звезды $v^{[\sigma]n}$, что выполняется оценка

$$|\beta - q^{[\sigma]n}\alpha - p^{[\sigma]n}|_1 \leq \varrho(T_{k_n}^{[\sigma]n}) \quad (11.21)$$

или более универсальная оценка

$$|\beta - q^{[\sigma]n}\alpha - p^{[\sigma]n}|_1 \leq \varrho(v^{[\sigma]n}). \quad (11.22)$$

2. Число $q^{[\sigma]n}$, вектор $p^{[\sigma]n}$ и радиусы $\varrho(T_{k_n}^{[\sigma]n})$, $\varrho(v^{[\sigma]n})$ эффективно вычислимы; при этом $q^{[\sigma]n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Аппроксимационные параллелепипеды $T^{[\sigma]n}(\beta)$ обладают свойством минимальности: $q\alpha + p \notin (T^{[\sigma]n}(\beta))^{\text{int}}$ для любой пары p, q с ограничением

$$0 \leq q < m^{[\sigma]n}. \quad (11.23)$$

Доказательство. 1. Из включения $\beta \in T^{[\sigma]n}(\beta) = T_{k_n}^{[\sigma]n}[\mathbf{x}_n]$ следует $\beta - \mathbf{x}_n \in T_{k_n}^{[\sigma]n}$, где \mathbf{x}_n – вершина аппроксимационного параллелепипеда $T^{[\sigma]n}(\beta)$ и, значит, вершина разбиения $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{[\sigma]n}$. Тогда по предложению 11.1 из определения (11.15) орбиты $\text{Orb}^{[\sigma]n}(0)$ вершина \mathbf{x}_n имеет вид $\mathbf{x}_n = q^{[\sigma]n}\alpha - p^{[\sigma]n}$, где коэффициент $q^{[\sigma]n}$ удовлетворяет условию (11.20). Это доказывает оценку (11.21), из которой и неравенства (11.19) вытекает вторая оценка (11.22).

2. Эффективная вычислимость векторов $p^{[\sigma]n}$, чисел $q^{[\sigma]n}$ и радиусов $\varrho(T_{k_n}^{[\sigma]n})$, $\varrho(v^{[\sigma]n})$ следует из определений (10.11), (10.12) для \mathfrak{B} -алгоритма и определения (4.4) производных звезд $v^{[\sigma]n}$, из которого также следует свойство $q^{[\sigma]n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

3. По предложению 11.1 вершины разбиения $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{[\sigma]^n}$, а следовательно, и вершины всех образующих его параллелепипедов совпадают в точности с орбитой $\text{Orb}^{[\sigma]^n}(0)$. Поэтому внутри аппроксимационного параллелепипеда $T^{[\sigma]^n}(\beta)$ нет точки $q\alpha + p$ с условием (11.23). \square

§12. ЛОКАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ

12.1. Целевая функция. Из неравенства (11.22) видно, что приближение вещественной точки $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ точками вида $p\alpha + q$ зависит от величины радиуса $\varrho(v^{[\sigma]^n})$ производной звезды $v^{[\sigma]^n}$. В свою очередь, сами производные звезды $v^{[\sigma]^n}$ определяются бесконечной последовательностью дифференцирований $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Чтобы как-то упорядочить выбор дифференцирований σ_n из Σ , входящих в последовательность σ , можно, например, ввести целевую функцию $\wp(v) \geq 0$, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$\wp(v) \geq \wp(v'), \quad \text{если } \Delta(v) \supset \Delta(v'), \quad (12.1)$$

где v, v' – две произвольные звезды и $\Delta(v), \Delta(v')$ – отвечающие им симплексы;

$$\varrho(v) \leq c \wp(v) \quad (12.2)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от звезды v .

Если целевая функция $\wp(v) \geq 0$ уже задана, то ее можно будет использовать для формирования стратегии выбора производных $\sigma_n \in \Sigma$ в последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$, применяя индукцию по $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\wp(v^{[\sigma]^n}) = \min_{\sigma'_n \in \Sigma} \wp(v^{[\sigma']^n}), \quad (12.3)$$

где через $[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ и $[\sigma']_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n\}$ обозначены отрезки длины n . Определенную в (12.3) стратегию будем называть \wp -стратегией, явно указывая на ее зависимость от целевой функции $\wp(v)$ из (12.1), (12.2).

12.2. Диофантовы экспоненты. Из неравенств (11.22) и (12.2) следует, что выбранная \wp -стратегия применительно к данной звезде $v = v(\alpha)$ из (11.6) срабатывает, если $\wp(v^{[\sigma]^n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Если же попытаться как-то количественно оценить \wp -стратегию, то с этой целью можно использовать, например, *диофантову экспоненту*, точнее

– \wp -экспоненту

$$\eta = \eta(\alpha, \wp) = \sup_{n' \geq 0} \inf_{n \geq n'} \frac{-\ln \wp(v^{[\sigma]_n})}{\ln m^{[\sigma]_n}}. \quad (12.4)$$

Роль экспоненты (12.4) видна из следующего утверждения.

Теорема 12.1. *В условиях теоремы 11.1, пусть целевая функция $\wp(v)$ обладает свойствами (12.1), (12.2) и по \wp -стратегии (12.3) построена бесконечная последовательность производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Кроме того, пусть η' – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\eta' < \eta$, где $\eta = \eta(\alpha, \wp)$ – диофантова экспонента (12.4). Тогда справедлива оценка*

$$|\beta - q^{[\sigma]_n} \alpha - p^{[\sigma]_n}|_1 \leq \frac{c}{(m^{[\sigma]_n})^{\eta'}} \quad (12.5)$$

для всех $n \geq n_{\eta'}$. Здесь $m^{[\sigma]_n}$ – порядок (11.16) звезды $v^{[\sigma]_n}$, c – константа из неравенства (12.2) и нижняя граница $n_{\eta'}$ для n определяется выбором показателя η' и зависит от иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в (11.11) и целевой функции $\wp(v)$.

Доказательство. Оценка следует из неравенства (11.22) теоремы 11.1 и определения (12.4) диофантовой экспоненты η . \square

Замечание 12.1. Согласно (11.20) выполняется неравенство $q^{[\sigma]_n} < m^{[\sigma]_n}$. Поэтому из оценки (12.5) будет вытекать более слабое неравенство

$$|\beta - q^{[\sigma]_n} \alpha - p^{[\sigma]_n}|_1 \leq \frac{c}{(q^{[\sigma]_n})^{\eta'}}.$$

Замечание 12.2. Неравенство (12.5) нетривиально только при условии $\eta' > 0$. Это требование можно удовлетворить только в случае

$$\eta = \eta(\alpha, \wp) > 0. \quad (12.6)$$

Таким образом, подбирая целевую функцию $\wp(r)$ в (12.1), (12.2) необходимо следить за ограничением (12.6). При этом, если для двух таких функций $\wp(v)$ и $\wp'(v)$ будет иметь место неравенство $\eta(\alpha, \wp) > \eta(\alpha, \wp')$, то целевая функция $\wp(v)$ предпочтительней функции $\wp'(v)$.

Замечание 12.3. Определенная в (12.4) диофантова экспонента $\eta = \eta(\alpha, \wp)$ не зависит от выбора (10.5) вектора для аппроксимации $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$. Два алгоритма – \wp -стратегия (12.3) и \mathfrak{B} -алгоритм (10.11), (10.12) – имеют разную природу: первый отвечает за скорость

приближения, второй – за поиск аппроксимационного параллелепипеда $T(\beta)$, в который попадает точка β при измельчении (11.13) разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{рег}}$. Иначе, \mathfrak{B} -алгоритм позволяет вычислять коэффициенты вектора $q^{[\sigma]^n} \alpha + p^{[\sigma]^n}$ из неравенства (11.22).

12.3. Многошаговые стратегии. Определенную равенством (12.3) \wp -стратегию, естественно назвать *одношаговой*. Если возникнет задача увеличения значения диофантовой экспоненты (12.6) и, значит, увеличения скорости приближения в неравенстве (12.5), то для этого можно попытаться искать другую целевую функцию $\wp'(r)$ или, не меняя исходную функцию $\wp(r)$, применить многошаговую стратегию:

$$\min_{\substack{\sigma_{n+1} \in \Sigma, \dots \\ \dots \sigma_{n+\omega-1} \in \Sigma}} \wp(v^{[\sigma]^{n+\omega-1}}) = \min_{\substack{\sigma'_n \in \Sigma, \\ \sigma_{n+1} \in \Sigma, \dots \\ \dots \sigma_{n+\omega-1} \in \Sigma}} \wp(v^{[\sigma']^{n+\omega-1}}), \quad (12.7)$$

где
$$[\sigma]_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\},$$

$$[\sigma']_{n+\omega-1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+\omega-1}\}$$

– отрезки длины $n + \omega - 1$ в бесконечной последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$. Если отрезок $[\sigma]_{n-1}$ уже построен, то следующий отрезок $[\sigma]_n$ находится по правилу (12.7). Определенную таким образом стратегию будем называть *ω -шаговой стратегией* с оценочной функцией $\wp(r)$ или кратко – *\wp^ω -стратегией*. Стратегия из (12.3) – это одношаговая \wp^1 -стратегия.

Замечание 12.4. Все определяемые таким образом стратегии относятся к классу локальных – каждый шаг определяется по возможным результатам конечного отрезка следующих за ним шагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби*, Владимир, ВлГУ (2019), <https://vk.com/id589973164>.
2. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*. – Современные проблемы математики, МИАН **299** (2017), 283–303.
3. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*. – Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
4. Дж. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*, Москва, Наука (1961).
5. В. Шмидт, *Диофантовы приближения*, Москва, Мир (1983).

6. A. Khintchine, *Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen.* — Acta Arith., **2** (1937), 161–172.
7. А. Я. Хинчин, *Избранные труды по теории чисел*, Москва, МЦНМО (2006).
8. T. Komatsu, *On inhomogeneous Diophantine approximation and the Nishioka–Shiokawa–Tamura algorithm.* — Acta arithm. **86**, No. 4 (1998), 305–324.
9. Sh. Yasutomi, *On a new algorithm for inhomogeneous diophantine approximation.* — Tsukuba J. Math. **29** (2005), 173–195.
10. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **511** (2022), 28–53.
11. В. Г. Журавлев, *Универсальные ядерные разбиения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **490** (2020), 49–93.
12. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
13. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, Москва (2012), 82–102.
14. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.
15. В. Г. Журавлев, *Самоподобия и подстановки ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **523** (2023), 83–120.
16. В. Г. Журавлев, *Инфляция и дефляция ядерных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **523** (2023), 53–82.

Zhuravlev V. G. Multidimensional inhomogeneous approximations.

The simplex-karyon algorithm is applied to multidimensional inhomogeneous approximations in combination with one more algorithm, which finds an approximation parallelepiped into which the approximate point falls when splitting the polyhedral karyon tiling.

Владимирский
государственный университет
пр. Строителей, 11,
600024, Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 5 апреля 2024 г.