Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 538, 2024 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. XII. АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ДЛЯ СЕРИИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБР С ДВУМЯ ПРОСТЫМИ МОДУЛЯМИ

Введение

Настоящая работа продолжает серию статей автора и его учеников, посвящённых исследованию когомологий Хохшильда алгебр диэдрального типа (см. [1–12]). Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [13]). В недавней работе [12] алгебра когомологий $\mathrm{HH}^*(R)$ была описана (в терминах образующих и определяющих соотношений) для подсемейства некоторой "исключительной" серии алгебр диэдрального типа, имеющих два простых модуля.

Для этой "исключительной" серии, возникающей в случае, когда основное поле имеет характеристику 2, ранее были вычислены группы когомологий Хохшильда (см. [6]). Описание этих групп существенно зависит от четности или нечётности двух натуральных параметров, входящих в определяющие соотношения алгебр из исследуемого семейства. В [12] алгебра когомологий $\mathrm{HH}^*(R)$ была вычислена для случая, когда эти параметры принимают нечётные значения. Здесь мы вычисляем алгебру $\mathrm{HH}^*(R)$ для остальных трёх случаев (т.е. когда хотя бы один из этих параметров чётен).

Как и в работе [12], в вычислениях умножений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ мы используем минимальную проективную резольвенту для алгебр из рассматриваемого семейства, построенную ранее в [6].

Ключевые слова: алгебры диэдрального типа, алгебра когомологий Хохшильда.
Автор благодарит грант РНФ No. 22-71-10001 за поддержку.

§1. Предварительные сведения

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики. Алгебры $R_{k,s,c}$ серии $D(2\mathcal{B})(k,s,c)$ (из классификации К. Эрдман [13]) описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$$Q^{(\mathcal{B})}:\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\beta\gamma = \eta\beta = \gamma\eta = 0,\ \ (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k,$$
$$\alpha^2 = c(\gamma\beta\alpha)^k,\ \ \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k,$$

где $k, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $c \in \{0,1\}$ (композицию путей мы записываем справа налево). Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то можно считать, что $c = 0$. Для алгебр $R_{k,s,0}$ группы $\mathrm{HH}^n(R)$ и алгебра когомологий $\mathrm{HH}^*(R)$ исследовались в [4, 8]. С другой стороны, группы $\mathrm{HH}^n(R)$ для алгебр $R_{k,s,1}$ были вычислены в [6], и их описание существенно зависит от чётности или нечётности параметров k и s. В настоящей работе алгебра когомологий Хохшильда для алгебр $R_{k,s,1}$ описывается для случаев, когда хотя бы один из параметров k и s чётен, за исключением некоторых малых значений параметров.

Пусть $R = R_{k,s,1}$, где $k, s \in \mathbb{N}, k > 1, s > 2$, и пусть $\Lambda := R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – обёртывающая алгебра алгебры R. Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента бимодуля R, построенная в [6]. Таким образом,

$$\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R,R) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)).$$

Описание этой резольвенты довольно громоздкое, и мы здесь его не воспроизводим, но будем использовать многие обозначения, связанные с этим описанием. В частности, для некоторых элементов алгебры R используются сокращённые обозначения:

$$a := \alpha\gamma\beta,\ \ b := \beta\alpha\gamma,\ \ g := \gamma\beta\alpha.$$

Кроме того, мы через $\delta^n := \mathrm{Hom}_\Lambda(d^Q_n, R)$ обозначаем дифференциал комплекса $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)$. Дифференциалы d^Q_n (а также δ^n) задаются с помощью матриц, соответствующих фиксированным разложениям модулей Q_n в прямую сумму неразложимых Λ-модулей; будем называть такие разложения стандартными.

Резольвента $Q_\bullet = \left(Q_n, d_n^Q\right)$ была получена из некоторой диаграммы с помощью приёма, аналогичного тотализации бикомплекса. Строение этой диаграммы обладает уникальной особенностью: при отбрасывании первых двух её столбцов мы получаем поддиаграмму, совпадающую с исходной (отличающуюся лишь сдвигом градуировки). Кроме того, поддиаграмма, состоящая из первых двух столбцов рассматриваемой диаграммы, после "тотализации" доставляет подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, при этом имеет место короткая точная последовательность комплексов

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\imath} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{1.1}$$

расщепляющаяся в каждой степени (см. [6, предложение 3.3]). Эта последовательность в свою очередь приводит к длинной точной когомологической последовательности, в которой, начиная с некоторого места, все связывающие гомоморфизмы – нулевые (см. [6, лемма 4.16]), и таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$. При $n \geqslant 5$ имеет место короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \to 0. \tag{1.2}$$

Хотя размерности групп $\mathrm{HH}^i(R)$, $i \geqslant 0$, были вычислены в [6], нам необходимо получить явное описание базисов (над K) этих групп. Сразу отметим, что ввиду [13, III.14] пространство $\mathrm{HH}^0(R)$ допускает в качестве K-базиса следующее множество

$$\{a^i + g^i + b^i\}_1^{k-1} \cup \{\eta^i\}_1^s \cup \{1, \gamma\beta a^{k-1}, a^k\}.$$

Поскольку базисы пространств $\mathrm{Im}\,\delta^i$, $0 \leqslant i \leqslant 4$, указаны в [6], то нам достаточно найти базисы пространств $\mathrm{Ker}\,\delta^i$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$. Это делается аналогично [4, предложение 4.4], и детали этих вычислений мы оставляем читателю. После этого непосредственно получается описание базисов пространств $\mathrm{HH}^i(R)$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$, которое приводится в нижеследующих предложениях.

Отметим, что, как и в [12], нулевая $m \times n$-матрица обозначается через $\mathrm{O}_{m,n}$, нулевая матрица-строка длины n – через O_n; указания на размеры таких матриц будем опускать, когда они ясны из контекста. Наконец, для i-коцикла $x \in \mathrm{Ker}\,\delta^i$ его когомологический класс $\mathrm{cl}\,x \in \mathrm{HH}^i(R)$ будем часто обозначать также через x.

Предложение 1.2. (a) *Предположим, что k и s чётны. Тогда пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant s,\\
&\big(\alpha, \mathrm{O}_3\big),\ \big(0, \beta, \mathrm{O}_2\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big).
\end{aligned}$$

(b) *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо из множества, указанного в пункте* (a), *удалить элемент* $\big(\mathrm{O}_3, \eta\big)$.

(c) *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо из множества, указанного в пункте* (a), *удалить элемент* $\big(0, \beta, \mathrm{O}_2\big)$*, а также заменить в нём элемент* $\big(\alpha, \mathrm{O}_3\big)$ *на элемент* $\big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2\big)$.

Предложение 1.3. (a) *Предположим, что k и s чётны. Тогда пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned}
&\big(a^i + g^i, b^i, a^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(0, \eta^i, \mathrm{O}_4\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant s,\\
&\big(a^k, \mathrm{O}_5\big),\ \big(\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3\big),\\
&\big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big).
\end{aligned}$$

(b) *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *надо из множества, указанного в пункте* (a), *удалить элемент* $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_4\big)$.

(c) *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *надо из множества, указанного в пункте* (a), *удалить элемент* $\big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\big)$.

Предложение 1.4. (a) *Предположим, что k и s чётны. Тогда пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$
\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant s,\\
&\big(\alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big), \ \big(0, \beta, \mathrm{O}_6\,\big), \ \big(a^k, \mathrm{O}_7\,\big),\\
&\big(\,\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1\big), \ \big(\,\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big), \ \big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\,\big).
\end{aligned}
$$

(b) *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо из множества, указанного в пункте* (a), *удалить элемент* $\big(\,\mathrm{O}_3, \eta, \mathrm{O}_4\,\big)$.

(c) *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо в множестве, указанном в пункте* (a), *опустить элемент* $\big(0, \beta, \mathrm{O}_6\,\big)$, *а элемент* $\big(\alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big)$ *заменить на элемент* $\big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big)$.

Предложение 1.5. (a) *Предположим, что k и s чётны. Тогда пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$
\begin{aligned}
&\big(a^i + g^i, b^i, \mathrm{O}_8\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(0, \eta^i, \mathrm{O}_8\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant s,\\
&\big(e_0, e_1, \mathrm{O}_8\,\big), \ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_9\,\big), \ \big(a^k, \mathrm{O}_9\,\big),\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \mathrm{O}_4\,\big),\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \mathrm{O}_4, \gamma, 0\big), \ \big(\,\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_7\,\big), \ \big(\,\mathrm{O}_6, e_0, \mathrm{O}_3\,\big).
\end{aligned}
$$

(b) *Предположим, что из чисел k, s одно чётно, а другое нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^4(R)$ *надо в множестве, указанном в пункте* (a), *опустить элемент* $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_8\,\big)$.

Предложение 1.6. (a) *Предположим, что k и s чётны. Тогда пространство* $\mathrm{HH}^5(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_{11}\big) \ \text{для}\ 0 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_8\,\big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant s,\\
&\big(0, \beta, \mathrm{O}_{10}\,\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_{11}\,\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_{11}\,\big),\\
&\big(\,\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_4\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_6\,\big),\\
&\big(\,\mathrm{O}_8, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_9, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big).
\end{aligned}$$

(b) *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^5(R)$ *надо из множества, указанного в пункте* (a), *удалить элемент* $\big(\,\mathrm{O}_3, \eta, \mathrm{O}_8\,\big)$.

(c) *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо из множества, указанного в пункте* (a), *удалить элемент* $\big(0, \beta, \mathrm{O}_{10}\,\big)$, *а также заменить в нём элемент* $\big(\alpha, \mathrm{O}_{11}\,\big)$ *на элемент* $\big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_{10}\,\big)$.

§2. Формулировка основного результата

В этом разделе мы приведём основной результат работы, а именно опишем мультипликативную структуру алгебры когомологий Хохшильда для рассматриваемых алгебр. Для этого мы сначала определим несколько серий градуированных алгебр.

Пусть

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1', u_1'', u_2', u_3\} \cup \{v_i\}_{i=1}^6&\\
\cup \{w_1, w_2', w_2'', w_3'\} \cup \{z_0, z_1, t\}.&
\end{aligned} \tag{2.1}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_1]$ введём градуировку так, что

$$\begin{gathered}
\deg p_i = 0 \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant 4,\\
\deg u_1' = \deg u_1'' = u_2' = u_3 = 1,\\
\deg v_i = 2 \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant 6,\\
\deg w_1 = \deg w_2' = \deg w_2'' = \deg w_3' = 3,\\
\deg z_0 = \deg z_1 = 4,\ \deg t = 5.
\end{gathered}$$

Несколько утяжелённая система обозначений здесь и в последующем связана с тем, что мы будем пользоваться некоторыми деталями вычислений из работы [12], и потому согласовываем новые обозначения с использованными в [12].

Рассмотрим вспомогательный элемент

$$\theta_n := \sum_{i=1}^{n} i \in K \tag{2.2}$$

и определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(k,s) = K[\mathcal{X}_1]/I_1$, где идеал I_1 порождён следующими элементами:

$$\left.\begin{array}{c} p_1^k + p_2^s,\ p_3^2,\ p_4^2, \\ p_ip_j \ \text{ для } \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4, \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

$$p_ju_3 \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{2.4}$$

$$p_1(u_1' + u_1''), \tag{2.5}$$

$$p_2u_1',\ p_4u_1',\ p_ju_1'' \ \text{ для } \ j > 1, \tag{2.6}$$

$$p_ju_2' \ \text{ для } \ j \neq 2, \tag{2.7}$$

$$p_4v_1 + p_3v_4,\ p_4v_1 + u_1'u_3, \tag{2.8}$$

$$p_1^{k-1}v_2 + p_2^{s-1}v_3 + p_4v_1, \tag{2.9}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_iv_1 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 3,\ p_iv_2 \ \text{ для } \ i > 1, \\ p_iv_3 \ \text{ для } \ i \neq 2,\ p_iv_4 \ \text{ для } \ i \neq 3, \\ p_iv_j \ \text{ для } \ j \in \{5,6\} \ \text{ и любых } i, \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

$$(u_1')^2 + \theta_kp_2^{s-1}v_3 + (\theta_k + 1)u_1'u_3, \tag{2.11}$$

$$(u_1'')^2 + u_1'u_1'',\ (u_1'')^2 + \theta_kp_2^{s-1}v_3 + \theta_ku_1'u_3, \tag{2.12}$$

$$(u_2')^2 + \theta_sp_2^{s-1}v_3, \tag{2.13}$$

$$u_3v_i \ \text{ для } \ i > 1, \tag{2.14}$$

$$u_1'v_i \ \text{ для } \ i \in \{1,3,5,6\}, \tag{2.15}$$

$$u_1''v_i \ \text{ для } \ i \in \{1,3,4,6\}, \tag{2.16}$$

$$u_2'v_i \ \text{ для } \ i \in \{1,2,4,6\}, \tag{2.17}$$

$$u_1'v_2 + u_1''v_2,\ u_1'v_2 + p_1w_2',\ u_1'v_2 + p_1w_2'', \tag{2.18}$$

$$u_1'v_4 + p_3w_2', \tag{2.19}$$

$$u_2'v_3 + p_2w_3', \tag{2.20}$$

$$p_4w_1 + u_1''v_5,\ \ p_4w_1 + u_2'v_5, \tag{2.21}$$

$$p_iw_1\ \ \text{для}\ \ i < 4,\ \ p_2w_2',\ \ p_4w_2', \tag{2.22}$$

$$p_iw_2''\ \ \text{для}\ \ i > 1, \tag{2.23}$$

$$p_iw_3'\ \ \text{для}\ \ i \neq 2, \tag{2.24}$$

$$v_1v_6 + u_3w_2', \tag{2.25}$$

$$u_1'w_1,\ \ u_3w_1,\ \ u_3w_2'', \tag{2.26}$$

$$u_1'w_2' + u_1''w_2'\ u_1'w_2' + u_1'w_2'',\ \ u_1'w_2' + u_1''w_2'', \tag{2.27}$$

$$u_2'w_1 + u_1''w_1,\ \ u_1'w_2' + \theta_k p_1^k z_0, \tag{2.28}$$

$$u_2'w_2',\ \ u_2'w_2'', \tag{2.29}$$

$$u_2'w_3' + \theta_s p_2^s z_0,\ \ u_1'w_3',\ \ u_1''w_3',\ \ u_3w_3', \tag{2.30}$$

$$v_iv_j\ \ \text{при}\ \ 1 \leqslant i < j \leqslant 5,\ \ v_iv_6\ \ \text{при}\ i > 1, \tag{2.31}$$

$$v_4^2,\ \ v_5^2,\ \ v_6^2,\ \ v_2^2 + p_1^2z_0,\ \ v_3^2 + p_2^2z_0, \tag{2.32}$$

$$p_iz_1\ \ \text{для всех}\ \ i, \tag{2.33}$$

$$p_4t + v_6w_1,\ \ p_4t + u_1''z_1,\ \ p_4t + u_2'z_1, \tag{2.34}$$

$$p_4t + v_5w_2'',\ \ p_4t + v_5w_3', \tag{2.35}$$

$$v_4w_2' + p_3u_1'z_0,\ \ v_2w_2' + v_2w_2'',\ \ v_2w_2' + p_1u_1'z_0, \tag{2.36}$$

$$v_jw_1\ \ \text{для}\ \ 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{2.37}$$

$$v_3w_2',\ \ v_5w_2',\ \ v_6w_2', \tag{2.38}$$

$$v_jw_2''\ \ \text{для}\ \ j \in \{1,3,4,6\}, \tag{2.39}$$

$$v_jw_3'\ \ \text{для}\ \ j \in \{1,2,4,6\},\ \ v_3w_3' + p_2u_2'z_0, \tag{2.40}$$

$$p_it\ \ \text{при}\ \ i < 4, \tag{2.41}$$

$$u_1'z_1,\ \ u_3z_1, \tag{2.42}$$

$$w_1w_3' + w_1w_2'',\ \ w_1w_3' + u_1''t,\ \ w_1w_3' + u_2't, \tag{2.43}$$

$$w_1w_2',\ \ w_2'w_3',\ \ w_2''w_3', \tag{2.44}$$

$$(w_2')^2 + \theta_k p_2^{s-1}v_3z_0 + (\theta_k + 1)u_1'u_3z_0, \tag{2.45}$$

$$(w_2'')^2 + w_2'w_2'',\ \ (w_2'')^2 + \theta_k(p_2^{s-1}v_3 + u_1'u_3)z_0, \tag{2.46}$$

$$(w_3')^2 + \theta_s p_2^{s-1}v_3z_0, \tag{2.47}$$

$$v_iz_1\ \ \text{для всех}\ i, \tag{2.48}$$

$$v_6t + p_4w_1z_0,\ \ w_2''z_1 + p_4w_1z_0,\ \ w_3'z_1 + p_4w_1z_0, \tag{2.49}$$

$$w_1z_1 + v_5t, \tag{2.50}$$

$$w_2'z_1, \tag{2.51}$$

$$z_1^2,\ \ w_2''t + w_3't,\ \ w_3't + u_1''w_1z_0, \tag{2.52}$$

$$z_1t + v_5w_1z_0, \tag{2.53}$$

$$t^2 + z_0w_1^2. \tag{2.54}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K[\mathcal{X}_1]$.

Далее, рассмотрим множество

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_2 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1', u_1'', u_2, u_3\} \cup \{v_i\}_{i=1}^6 \\ \cup \{w_1, w_2', w_2'', w_3''\} \cup \{z_0, z_1, t\}.\end{aligned} \tag{2.55}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_2]$ введём градуировку так, что

$$\deg p_i = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 4,$$
$$\deg u_1' = \deg u_1'' = u_2 = u_3 = 1,$$
$$\deg v_i = 2 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 6,$$
$$\deg w_1 = \deg w_2' = \deg w_2'' = \deg w_3'' = 3,$$
$$\deg z_0 = \deg z_1 = 4,\ \ \deg t = 5.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$, где идеал I_2 порождён элементами из (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.8), (2.10), (2.14), (2.15), (2.16), (2.19), (2.22), (2.23), (2.25), (2.31), (2.32), (2.33), (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), (2.41), (2.50), (2.53), (2.54), а также следующими элементами:

$$p_2^{s-1}u_2,$$
$$(u_1')^2 + (\theta_k + 1)u_1'u_3,\ \ u_1'u_1'' + (u_1'')^2,$$
$$u_1'u_1'' + \theta_k u_1'u_3,\ \ u_1'u_2,\ \ u_1''u_2,\ \ u_2^2,\ \ u_2u_3,$$
$$p_1^{k-1}v_2 + p_4v_1,\ \ p_2^{s-1}v_3,$$
$$p_4w_1 + u_1''v_5,\ \ u_2v_3 + p_2w_3'',\ \ u_2v_i \ \text{ для } \ i \neq 3,$$
$$p_2^s z_0,\ \ u_1'w_1,\ \ u_2w_1,\ \ u_3w_1,\ \ u_1'w_2',\ \ u_1''w_2',\ \ u_2w_2',$$
$$u_1'w_2'',\ \ u_1''w_2'',\ \ u_2w_2'',\ \ u_3w_2'',$$
$$u_1'w_3'',\ \ u_1''w_3'',\ \ u_2w_3'',\ \ u_3w_3'',$$
$$p_4t + v_6w_1,\ \ p_4t + u_1''z_1,\ \ p_4t + v_5w_2'',$$

$$
\begin{gathered}
v_j w_3'' \text{ для } j \neq 3,\ v_3 w_3'' + p_2 u_2 z_0,\\
u_1' z_1,\ u_2 z_1,\ u_3 z_1,\\
w_1 w_3'',\ w_2' w_3'',\ w_2'' w_3'',\ (w_3'')^2,\\
w_1 w_2'' + u_1'' t,\ (w_2')^2 + (\theta_k + 1) u_1' u_3 z_0,\\
(w_2'')^2 + w_2' w_2'',\ (w_2'')^2 + \theta_k u_1' u_3 z_0,\\
v_6 t + w_2'' z_1,\ v_6 t + p_4 w_1 z_0,\\
z_1^2,\ w_2'' t + u_1'' w_1 z_0.
\end{gathered}
$$

Наконец, рассмотрим множество

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_3 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1, u_2', u_3, u_4\} \cup \{v_i\}_{i=1}^6&\\
\cup \{w_1, w_2, w_3', w_4\} \cup \{z_0, z_1, t\}.& \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_3]$ введём градуировку так, что

$$
\begin{gathered}
\deg p_i = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 4,\\
\deg u_1 = \deg u_2' = u_3 = u_4 = 1,\\
\deg v_i = 2 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 6,\\
\deg w_1 = \deg w_2 = \deg w_3' = \deg w_4 = 3,\\
\deg z_0 = \deg z_1 = 4,\ \deg t = 5.
\end{gathered}
$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$, где идеал I_3 порождён элементами из (2.3), (2.7), (2.10), (2.14), (2.17), (2.31), (2.32), (2.33), (2.37), (2.40), (2.41), (2.48), (2.50), (2.53), (2.54), а также следующими элементами:

$$
\begin{gathered}
p_j u_1 \text{ для } j \neq 3,\ p_j u_3 \text{ для всех } j,\\
p_j u_4 \text{ для } j > 1,\ p_1^{k-1} u_4,\\
u_1 u_2',\ u_1 u_4,\ (u_2')^2 + \theta_s p_2^{s-1} v_3,\\
u_1^2 + u_1 u_3,\ u_1^2 + p_4 v_1,\ u_1^2 + p_2^{s-1} v_3,\\
u_1 v_i \text{ для } i \in \{1, 2, 3, 6\},\\
u_4 v_i \text{ для } i \neq 2,\\
u_1 v_4 + p_3 w_2,\ u_1 v_5 + u_2' v_5,\ u_1 v_5 + p_4 w_1,\\
p_i w_1 \text{ для } i < 4,\ p_i w_2 \text{ для } i \neq 3,\\
p_i w_3' \text{ для } i \neq 2,\ p_i w_4 \text{ для } i > 1,\ p_1^{k-1} w_4,\\
u_3 w_1,\ u_4 w_1,\ u_1 w_2,\ u_2' w_2,\ u_4 w_2,
\end{gathered}
$$

$$\begin{gathered}
u_1w_3',\ u_2'w_3',\ u_3w_3',\ u_4w_3',\\
u_1w_4,\ u_2'w_4,\ u_3w_4,\ u_4w_4,\\
u_1w_1+u_2'w_1,\ v_1v_6+u_3w_2,\ p_1^kz_0,\\
p_4t+v_6w_1,\ p_4t+v_5w_2,\ p_4t+v_5w_3',\\
p_4t+u_1z_1,\ p_4t+u_2'z_1,\\
v_2w_4+p_1u_4z_0,\ v_4w_2+p_3u_1z_0,\ v_3w_3'+p_2u_2'z_0,\\
w_1w_2+w_1w_3',\ w_1w_2+u_1t,\ w_1w_2+u_2't,\\
w_2^2+(w_3')^2,\ w_2^2+p_4v_1z_0,\ u_3t,\ u_4t,\\
w_3'z_1+v_6t,\ w_3'z_1+p_4w_1z_0,\ w_4z_1,\\
w_2t+w_3't,\ w_2t+u_1w_1z_0,\ z_1^2,\ w_4t.
\end{gathered}$$

Основной результат работы – следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = R_{k,s,1}$, *где* $k > 2$ *и* $s > 2$.

(A) *Предположим, что* k *и* s *чётны. Тогда алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная* K*-алгебра изоморфна* $\mathcal{A}_1$.

(Б) *Предположим, что* k *чётно, а* s *нечётно. Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ *как градуированные* K*-алгебры.*

(В) *Предположим, что* k *нечётно, а* s *чётно. Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3$ *как градуированные* K*-алгебры.*

§3. Образующие и соотношения

Мы сейчас кратко опишем интерпретацию произведения Йонеды в алгебре $\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathrm{Ext}^m_\Lambda(R,R)$. Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента (см. раздел 1). Рассмотрим комплекс

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\big);$$

как и ранее, δ^n – дифференциалы, индуцированные дифференциалами резольвенты $Q_\bullet$. Тогда для коциклов $f \in \operatorname{Ker}\delta^n$ и $g \in \operatorname{Ker}\delta^t$ имеем $\operatorname{cl} g \cdot \operatorname{cl} f = \operatorname{cl}(\mu \mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f))$, где $\mathrm{T}^i(h)$ обозначает i-ю трансляцию коцикла h. В дальнейшем мы будем описывать трансляции $\mathrm{T}^i(h)$ $(i \geqslant 0)$ с помощью матриц, соответствующих стандартным разложениям модулей Q_n.

Сейчас мы переходим к вычислению мультипликативной структуры алгебры когомологий $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр $R = R_{k,s,1}$. Напомним, что для случая, когда параметры k и s нечётны, алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ была описана в [12]. Далее мы отдельно рассмотрим оставшиеся три случая, соответствующие чётности/нечётности параметров k и s.

Случай A. Предположим, что k и s чётны, а также $k > 2$, $s > 2$. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\text{– степени } 0: \quad \begin{cases} p_1 := a + g + b, \ \ p_2 := \eta, \\ p_3 := \gamma\beta a^{k-1}, \ \ p_4 := a^k; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\text{– степени } 1: \quad \begin{cases} u_1' := (\alpha, \mathrm{O}_3), \ \ u_1'' := (0, \beta, \mathrm{O}_2), \\ u_2' := (\mathrm{O}_3, \eta), \ \ u_3 := (\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3); \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\text{– степени } 2: \quad \begin{cases} v_1 := (\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_3), \ \ v_2 := (a + g, b, a, \mathrm{O}_3), \\ v_3 := (0, \eta, \mathrm{O}_4), \ \ v_4 := (\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3), \\ v_5 := (\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}), \\ v_6 := (a^k, \mathrm{O}_5); \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\text{– степени } 3: \quad \begin{cases} w_1 := (\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1), \ \ w_2' := (\alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3), \\ w_2'' := (0, \beta, \mathrm{O}_6), \ \ w_3' := (\mathrm{O}_3, \eta, \mathrm{O}_4); \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\text{– степени } 4: \quad \begin{cases} z_0 := (e_0, e_1, \mathrm{O}_8), \\ z_1 := (\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \mathrm{O}_4); \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\text{– степени } 5: \quad t := (\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_4). \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Предположим, что k и s чётны. Для элементов множества*

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1', u_1'', u_2', u_3\} \cup \{v_i\}_{i=1}^6 \\ \cup \{w_1, w_2', w_2'', w_3'\} \cup \{z_0, z_1, t\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения*

$$\left.\begin{aligned} p_1^k = p_2^s, \ \ p_3^2 = p_4^2 = 0, \\ p_i p_j = 0 \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$$p_j u_3 = 0 \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{3.9}$$

$$p_1(u_1' + u_1'') = 0, \tag{3.10}$$

$$p_2 u_1' = p_4 u_1' = 0; \ \ p_j u_1'' = 0 \ \ \textit{для} \ \ j > 1, \tag{3.11}$$

$$p_j u_2' = 0 \ \ \textit{для} \ \ j \neq 2, \tag{3.12}$$

$$p_4 v_1 = p_3 v_4 = u_1' u_3, \tag{3.13}$$

$$p_1^{k-1}v_2 = p_2^{s-1}v_3 + p_4v_1, \tag{3.14}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_iv_1 = 0 \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant 3, \ \ p_iv_2 = 0 \ \ \textit{для} \ \ i > 1, \\ p_iv_3 = 0 \ \ \textit{для} \ \ i \neq 2, \ \ p_iv_4 = 0 \ \ \textit{для} \ \ i \neq 3, \\ p_iv_j = 0 \ \ \textit{для} \ \ j \in \{5, 6\} \ \ \textit{и любых} \ \ i, \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

$$(u_1')^2 = \theta_k p_2^{s-1}v_3 + (\theta_k + 1)u_1'u_3, \tag{3.16}$$

$$(u_1'')^2 = u_1'u_1'' = \theta_k p_2^{s-1}v_3 + \theta_k u_1'u_3, \tag{3.17}$$

$$(u_2')^2 = \theta_s p_2^{s-1}v_3, \tag{3.18}$$

$$u_3v_i = 0 \ \ \textit{для} \ \ i > 1, \tag{3.19}$$

$$u_1'v_i = 0 \ \ \textit{для} \ \ i \in \{1, 3, 5, 6\}, \tag{3.20}$$

$$u_1''v_i = 0 \ \ \textit{для} \ \ i \in \{1, 3, 4, 6\}, \tag{3.21}$$

$$u_2'v_i = 0 \ \ \textit{для} \ \ i \in \{1, 2, 4, 6\}, \tag{3.22}$$

$$u_1'v_2 = u_1''v_2 = p_1w_2' = p_1w_2'', \tag{3.23}$$

$$u_1'v_4 = p_3w_2', \tag{3.24}$$

$$u_2'v_3 = p_2w_3', \tag{3.25}$$

$$p_4w_1 = u_1''v_5 = u_2'v_5, \tag{3.26}$$

$$p_iw_1 = 0 \ \ \textit{для} \ \ i < 4, \ \ p_2w_2' = p_4w_2' = 0, \tag{3.27}$$

$$p_iw_2'' = 0 \ \ \textit{для} \ \ i > 1, \tag{3.28}$$

$$p_iw_3' = 0 \ \ \textit{для} \ \ i \neq 2, \tag{3.29}$$

$$v_1v_6 = u_3w_2', \tag{3.30}$$

$$u_1'w_1 = u_3w_1 = u_3w_2'' = 0, \tag{3.31}$$

$$u_1'w_2' = u_1''w_2' = u_1'w_2'' = u_1''w_2'', \tag{3.32}$$

$$u_2'w_1 = u_1''w_1, \ \ u_1'w_2' = \theta_k p_1^k z_0, \tag{3.33}$$

$$u_2'w_2' = u_2'w_2'' = 0, \tag{3.34}$$

$$u_2'w_3' = \theta_s p_2^s z_0, \ \ u_1'w_3' = u_1''w_3' = u_3w_3' = 0, \tag{3.35}$$

$$v_iv_j = 0 \ \ \textit{при} \ \ 1 \leqslant i < j \leqslant 5, \ \ v_iv_6 = 0 \ \ \textit{при} \ \ i > 1, \tag{3.36}$$

$$v_4^2 = v_5^2 = v_6^2 = 0, \ \ v_2^2 = p_1^2z_0, \ \ v_3^2 = p_2^2z_0, \tag{3.37}$$

$$p_iz_1 = 0 \ \ \textit{для всех} \ \ i, \tag{3.38}$$

$$p_4t = v_6w_1 = u_1''z_1 = u_2'z_1 = v_5w_2'' = v_5w_3', \tag{3.39}$$

$$v_4w_2' = p_3u_1'z_0, \ \ v_2w_2' = v_2w_2'' = p_1u_1'z_0, \tag{3.40}$$

$$v_jw_1 = 0 \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{3.41}$$

$$v_3w_2' = v_5w_2' = v_6w_2' = 0, \tag{3.42}$$

$$v_j w_2'' = 0 \quad \textit{для} \quad j \in \{1,3,4,6\}, \tag{3.43}$$
$$v_j w_3' = 0 \quad \textit{для} \quad j \in \{1,2,4,6\}, \quad v_3 w_3' = p_2 u_2' z_0, \tag{3.44}$$
$$p_i t = 0 \quad \textit{при} \quad i < 4, \tag{3.45}$$
$$u_1' z_1 = u_3 z_1 = 0, \tag{3.46}$$
$$w_1 w_3' = w_1 w_2'' = u_1'' t = u_2' t, \tag{3.47}$$
$$w_1 w_2' = w_2' w_3' = w_2'' w_3' = 0, \tag{3.48}$$
$$(w_2')^2 = \theta_k p_2^{s-1} v_3 z_0 + (\theta_k + 1) u_1' u_3 z_0, \tag{3.49}$$
$$(w_2'')^2 = w_2' w_2'' = \theta_k (p_2^{s-1} v_3 + u_1' u_3) z_0, \tag{3.50}$$
$$(w_3')^2 = \theta_s p_2^{s-1} v_3 z_0, \tag{3.51}$$
$$v_i z_1 = 0 \quad \textit{для всех} \quad i, \tag{3.52}$$
$$v_6 t = w_2'' z_1 = w_3' z_1 = p_4 w_1 z_0, \tag{3.53}$$
$$w_1 z_1 = v_5 t, \tag{3.54}$$
$$w_2' z_1 = 0, \tag{3.55}$$
$$z_1^2 = 0, \quad w_2'' t = w_3' t = u_1'' w_1 z_0, \tag{3.56}$$
$$z_1 t = v_5 w_1 z_0, \tag{3.57}$$
$$t^2 = z_0 w_1^2. \tag{3.58}$$

Доказательство. Для элементов $u_3, v_i\ (1 \leqslant i \leqslant 6), w_1, z_0, z_1, t$ трансляции подходящих порядков были вычислены в [12] (и формулы остаются справедливыми для рассматриваемого случая). Для остальных элементов множества $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень, необходимые трансляции представлены в следующей лемме.

Лемма 3.2. *В качестве трансляций* (*подходящих порядков*) *элементов* $u_1', u_1'', u_2', w_2', w_2'', w_3'$ *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_1') = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^1(u_1') = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{C}^{(1)} & \mathrm{C}^{(2)} & \mathrm{O}_{4,3} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} & * \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{C}^{(2)})_{1,2} = \alpha \otimes e_0 + \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(u_1'') = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \beta \otimes e_0 & \multirow{2}{*}{$\mathrm{O}_{2,2}$} \\ 0 & 0 & \end{array} \right);$$

$$\mathrm{T}^1(u_1'') = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{C}^{(3)} & \mathrm{C}^{(4)} & \mathrm{C}^{(5)} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{C}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C}^{(4)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{C}^{(5)}$ – 4×3 - *матрица с одним ненулевым элементом* $(\mathrm{C}^{(5)})_{3,2} = \beta\otimes e_1$;

$$\mathrm{T}^0(u_2') = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_{2,3} & \begin{matrix} 0 \\ \eta\otimes e_1 \end{matrix} \end{array}\right);$$

$\mathrm{T}^1(u_2')$ – 4×6 - *матрица с двумя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{T}^1(u_2'))_{2,4} = \eta\otimes e_0, \quad (\mathrm{T}^1(u_2'))_{4,2} = \sum_{i=1}^{s-1} i\eta^i\otimes\eta^{s-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(w_2') = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \alpha\otimes e_0 \\ 0 \end{matrix} & \mathrm{O}_{2,3} & \begin{matrix} \alpha\otimes e_0 \\ 0 \end{matrix} & \mathrm{O}_{2,3} \end{array}\right);$$

$$\mathrm{T}^1(w_2') = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{C}^{(6)} & \mathrm{C}^{(7)} & \mathrm{O}_{4,7} \end{array}\right),$$

где $\mathrm{C}^{(7)}$ – *матрица-столбец с одним ненулевым элементом* $(\mathrm{C}^{(7)})_{1,1} = e_0\otimes(\alpha+\gamma\beta a^{k-1})$, *а* $\mathrm{C}^{(6)}$ – *матрица*

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i\otimes\gamma\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i\otimes a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i\otimes\alpha\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i\otimes\beta\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha g^i\otimes\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\beta\alpha g^i\otimes b^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\mathrm{T}^2(w_2')$ – 6×12 - *матрица с тремя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{T}^2(w_2'))_{1,1} = e_0\otimes\alpha + \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0, \quad (\mathrm{T}^2(w_2'))_{3,1} = \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0,$$
$$(\mathrm{T}^2(w_2'))_{3,5} = e_0\otimes(\alpha+\gamma\beta a^{k-1});$$

$$\mathrm{T}^3(w_2') = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathrm{C}^{(8)} & \mathrm{C}^{(9)} & \mathrm{O}_{8,3} & \mathrm{C}^{(10)} & \mathrm{O}_{8,7} \end{array}\right), \quad \textit{где}$$

$$\mathrm{C}^{(8)} = \left(\begin{array}{c} \tilde{\mathrm{C}}^{(8)} \\ \hline \mathrm{O}_{5,2} \end{array}\right) \quad \textit{с матрицей } \tilde{\mathrm{C}}^{(8)}\textit{, равной}$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)a^i\otimes\gamma\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i\otimes a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i\otimes\alpha\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha g^i\otimes\beta a^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i\otimes\beta\alpha g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\beta\alpha g^i\otimes b^{k-1-i} \end{pmatrix},$$

$\mathrm{C}^{(9)}$ – *матрица-столбец, транспонированная к строке*

$$\Big(\ * \ , \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i}, \sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i}, \ 0 \ , e_0 \otimes \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3 \Big),$$

$$(\mathrm{C}^{(9)})_{1,1} = (\alpha + \gamma\beta a^{k-1}) \otimes e_0 + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i},$$

$\mathrm{C}^{(10)}$ – *матрица-столбец с единственным ненулевым элементом*

$$(\mathrm{C}^{(10)})_{5,1} = e_0 \otimes (\alpha + \gamma\beta a^{k-1});$$

$$\mathrm{T}^0(w_2'') = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \beta \otimes e_0 & \mathrm{O}_{2,6} \\ 0 & 0 & \end{array} \right);$$

$$\mathrm{T}^1(w_2'') = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{C}^{(11)} & \mathrm{O}_{4,2} & \mathrm{C}^{(12)} & \mathrm{O}_{4,5} \end{array} \right),$$

где $\mathrm{C}^{(12)}$ – *матрица-столбец с единственным ненулевым элементом* $(\mathrm{C}^{(12)})_{3,1} = \beta \otimes e_1$, *а* $\mathrm{C}^{(11)}$ – *матрица*

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{C}^{(11)})_{3,1} = \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \gamma\beta a^{k-1} \otimes \beta a^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^2(w_2'') = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{C}^{(13)} & \mathrm{O}_{6,4} & \mathrm{C}^{(14)} & \mathrm{O}_{6,4} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{C}^{(13)} = \left(\begin{array}{c} \tilde{\mathrm{C}}^{(13)} \\ \hline \tilde{\tilde{\mathrm{C}}}^{(13)} \end{array} \right),$$

$\tilde{\mathrm{C}}^{(13)}$ – 4×3 - *матрица с двумя ненулевыми элементами*

$$(\tilde{\mathrm{C}}^{(13)})_{2,2} = e_1 \otimes \beta, \quad (\tilde{\mathrm{C}}^{(13)})_{4,2} = \eta^{s-1} \otimes e_0,$$

$$\tilde{\tilde{\mathrm{C}}}^{(13)} = \begin{pmatrix} \gamma b^{k-1} \otimes \beta\alpha g^{k-1} & e_1 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & \alpha\gamma b^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{C}^{(14)}$ – *матрица-столбец с единственным ненулевым элементом*

$$(\mathrm{C}^{(14)})_{5,1} = e_1 \otimes \eta;$$

$$\mathrm{T}^3(w_2'') = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{C}^{(15)} & \mathrm{C}^{(16)} & \mathrm{O}_{3,10} \\ \hline \mathrm{O}_{5,1} & \mathrm{O}_{5,3} & \mathrm{C}^{(17)} \end{array}\right), \quad \textit{где}$$

$$\mathrm{C}^{(15)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C}^{(16)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} & \eta \otimes e_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{C}^{(17)}$ – 5×10 - *матрица с двумя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{C}^{(17)})_{4,1} = \eta^{s-1} \otimes e_1, \quad (\mathrm{C}^{(17)})_{5,6} = \eta \otimes e_1;$$

$$\mathrm{T}^0(w_3') = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{2,3} & \begin{matrix} 0 \\ \eta \otimes e_1 \end{matrix} & \mathrm{O}_{2,4} \end{array}\right);$$

$\mathrm{T}^1(w_3')$ – 4×10-*матрица с двумя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{T}^1(w_3'))_{4,2} = \sum_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-1-i}, \quad (\mathrm{T}^1(w_3'))_{2,4} = \eta \otimes e_0;$$

$\mathrm{T}^2(w_3')$ – 6×12 - *матрица с тремя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{T}^2(w_3'))_{4,2} = \eta^{s-1} \otimes e_0, \quad (\mathrm{T}^2(w_3'))_{2,4} = \eta \otimes e_0, \quad (\mathrm{T}^2(w_3'))_{5,7} = \eta \otimes e_1;$$

$\mathrm{T}^3(w_3')$ – 8×14 - *матрица с четырьмя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{T}^3(w_3'))_{4,2} = \sum_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-1-i}, \quad (\mathrm{T}^3(w_3'))_{2,4} = \eta \otimes e_0,$$
$$(\mathrm{T}^3(w_3'))_{7,5} = (\mathrm{T}^3(w_3'))_{8,10} = \eta \otimes e_1.$$

Доказательство. Это устанавливается прямой проверкой соотношений $\mu \mathrm{T}^0(b) = b$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(b) = \mathrm{T}^{i-1}(b)\, d_{i+\deg b-1}$ $(i > 0)$ для $b \in \mathcal{Y}_1$ с $\deg b > 0$.

Теперь доказательство предложения 3.1 завершается прямыми вычислениями с матрицами, приведёнными в лемме 3.2 (а также в [12, лемма 3.4]), и эту проверку оставляем читателю. □

Замечание 3.3. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций, указанные в лемме 3.2, остаются справедливыми и при иных значениях параметров k и s, в тех случаях, когда соответствующие элементы включаются в множество образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$.

Лемма 3.4. *Для любого* $\ell \in \mathbb{N}$ *справедливы соотношения*

(1) $v_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, e_0, \mathrm{O}_3\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell}(R)$,

(2) $u_3 v_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+1}(R)$,

(3) $v_6 v_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, a^k, \mathrm{O}_7\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+2}(R)$,

(4) $w_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, e_0, e_1, e_1\big) \in \mathrm{HH}^{3\ell}(R)$,

(5) $v_5 w_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big) \in \mathrm{HH}^{3\ell+2}(R)$,

(6) $w_1^\ell z_1 = \big(\,\mathrm{O}, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \mathrm{O}_4\,\big) \in \mathrm{HH}^{3\ell+4}(R)$,

(7) $w_1^\ell t = \big(\,\mathrm{O}, e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_4\,\big) \in \mathrm{HH}^{3\ell+5}(R)$,

(8) $v_1^\ell(w_2' v_1 + u_3 z_0) = \big(\,\mathrm{O}, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+5}(R)$,

(9) $u_1'' w_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \mathrm{O}_2\,\big) \in \mathrm{HH}^{3\ell+1}(R)$,

(10) $u_1'' w_1^\ell t = \big(\,\mathrm{O}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \mathrm{O}_6\,\big) \in \mathrm{HH}^{3\ell+6}(R)$.

Замечание 3.5. Элементы групп $\mathrm{HH}^n(R)$, указанные в лемме 3.4 (для соответствующих значений n) вместе с подгруппой $z_0 \cdot \mathrm{HH}^{n-4}(R)$ порождают группу $\mathrm{HH}^n(R)$. Это следует из точной последовательности (1.2) (ср. [12, замечание 3.6]).

Доказательство леммы 3.4. Соотношения с (1) по (7) фактически доказаны в [12, лемма 3.5], поскольку соответствующие вычисления не зависят от чётности или нечётности параметров k и s. (Для внимательного читателя отметим, что нумерация формул в [12, лемма 3.5] отличается от использованной здесь.)

Соотношения (9) и (10) получаются с помощью прямых вычислений с учётом формул для трансляций элементов w_1^ℓ и $w_1^\ell t$, приведённых в доказательстве леммы 3.5 из [12]:

$$u_1''w_1^\ell = \mu\mathrm{T}^0(u_1'')\mathrm{T}^1(w_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \mathrm{O}_2\,\big),$$
$$u_1''w_1^\ell t = \mu\mathrm{T}^0(u_1'')\mathrm{T}^1(w_1^\ell t) = \big(\,\mathrm{O}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \mathrm{O}_6\,\big).$$

(8) Наконец, с использованием трансляций элемента v_1^ℓ, полученных в доказательстве леммы 3.5 из [12], получаем, что

$$w_2'v_1^{\ell+1} = \mu\mathrm{T}^0(w_2')\mathrm{T}^3(v_1^{\ell+1}) = \big(\,\mathrm{O}, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big),$$

а тогда используя соотношение (2) леммы (а также [12, замечание 3.3]), получаем

$$w_2'v_1^{\ell+1} + z_0\cdot u_3v_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big).$$

□

Предложение 3.6. *Предположим, что k и s чётны. Множество $\mathcal{Y}_1$, указанное в* (3.7), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1\cup\{1\}$. Мы сначала докажем, что $\bigcup_{i=0}^5 \mathrm{HH}^i(R)\subset\mathcal{H}$. Легко получаем, что $\mathrm{HH}^i(R)\subset\mathcal{H}$ для $i\in\{0,1,2\}$. Далее, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 1.4, часть (а), получаем следующие соотношения:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\,\big) = p_1^i w_2' \quad \text{для } 1\leqslant i\leqslant k-1,$$
$$\big(\,\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\,\big) = p_2^{i-1}w_3' \quad \text{для } 1\leqslant i\leqslant s,$$
$$\big(a^k, \mathrm{O}_7\,\big) = p_3w_2', \quad \big(\,\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big) = u_3v_1,$$
$$\big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\,\big) = p_4w_1,$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R)\subset\mathcal{H}$. Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^4(R)$, описанных в предложении 1.5, часть (а), не лежащих в $z_0\cdot\mathrm{HH}^0(R)$, имеем соотношения

$$\big(\,\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_7\,\big) = u_3w_2', \;\; \big(\,\mathrm{O}_6, e_0, \mathrm{O}_3\,\big) = v_1^2,$$
$$\big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \mathrm{O}_4, \gamma, 0\big) = u_2'w_1,$$

и потому $\mathrm{HH}^4(R)\subset\mathcal{H}$. Наконец, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^5(R)$, описанных в предложении 1.6, часть (а), не лежащих в $z_0\cdot\mathrm{HH}^1(R)$, имеем соотношения

$$\big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_6\,\big) = p_4t, \;\; \big(\,\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big) = v_1w_2' + u_3z_0,$$
$$\big(\,\mathrm{O}_9, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big) = v_5w_1,$$

и следовательно, $\mathrm{HH}^5(R) \subset \mathcal{H}$.

Теперь пусть $n \geqslant 6$. Индукцией по n докажем, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ – коцикл, представляющий элемент из $\mathrm{HH}^n(R)$. Тогда используя замечание 3.5, находим представление для f в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in \pi^*(\mathrm{HH}^{n-4}(R)) = z_0 \cdot \mathrm{HH}^{n-4}(R)$, а f_2 – это один из элементов, перечисленных в лемме 3.4 (для подходящих значений параметра ℓ). По лемме 3.4 $f_2 \in \mathcal{H}$. Если $f_1 = z_0 f_1'$ для $f_1' \in \mathrm{HH}^{n-4}(R)$, то по индукционному предложению $f_1' \in \mathcal{H}$. Таким образом, $f_1 \in \mathcal{H}$, и потому $f \in \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 2, где I_1 – соответствующий идеал соотношений. Ввиду предложений 3.1 и 3.6 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$; не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (A) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.7. *Для любого $m \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Сначала отметим следующие соотношения, непосредственно вытекающие из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$.

Лемма 3.8. *В алгебре $\mathcal{A}_1$ выполняются соотношения*

$$p_1^k u_1' = p_2^s u_1'' = p_2 u_2' = 0, \quad p_1^k v_2 = p_2^s v_3 = 0.$$

Доказательство предложения 3.7. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$\begin{gathered} t > v_2 > v_4 > v_5 > v_6 > v_1 > u_2' > u_1'' > w_3' > w_2'' > w_2' \\ > u_3 > u_1' > v_3 > w_1 > z_1 > z_0 > p_2 > p_3 > p_4 > p_1. \end{gathered}$$

Аналогично доказательству предложения 3.8 в [12] мы рассмотрим список элементарных шагов редукции, приведённый ниже, а затем исследуем нормальные формы мономов (относительно таких шагов редукции); напомним, что параметр θ_n определён в (2.2).

$p_2^s \mapsto p_1^k,$

$p_1^{k-1}v_2 \mapsto p_2^{s-1}v_3 + p_4 v_1,$

$(u_1')^2 \mapsto \theta_k p_2^{s-1}v_3 + (\theta_k+1)u_1'u_3,$

если $\theta_k \neq 0$, то $u_1'u_1'' \mapsto p_2^{s-1}v_3 + u_1'u_3,$

$u_1''v_2 \mapsto u_1'v_2 \mapsto p_1 w_2'' \mapsto p_1 w_2',$

$u_2'v_5 \mapsto u_1''v_5 \mapsto p_4 w_1,$

$u_2'w_1 \mapsto u_1''w_1,$

$p_1 u_1'' \mapsto p_1 u_1',$

$p_3 v_4 \mapsto p_4 v_1 \mapsto u_1' u_3,$

$(u_1'')^2 \mapsto u_1' u_1'',$

если $\theta_s \neq 0$, то $(u_2')^2 \mapsto p_2^{s-1}v_3,$

$u_2'v_3 \mapsto p_2 w_3',$

$u_1'v_4 \mapsto p_3 w_2',$

если $\theta_k \neq 0$, то $u_1''w_2'' \mapsto u_1''w_2' \mapsto u_1'w_2'' \mapsto u_1'w_2' \mapsto p_1^k z_0,$

$v_2^2 \mapsto p_1^2 z_0,$

$v_1 v_6 \mapsto u_3 w_2',$

$p_4 t \mapsto v_5 w_3' \mapsto v_5 w_2'',$

$v_5 w_2'' \mapsto v_6 w_1 \mapsto u_2' z_1 \mapsto u_1'' z_1,$

$v_2 w_2'' \mapsto v_2 w_2' \mapsto p_1 u_1' z_0,$

$v_3^2 \mapsto p_2^2 z_0,$

если $\theta_s \neq 0$, то $u_2'w_3' \mapsto p_2^s z_0,$

$v_4 w_2' \mapsto p_3 u_1' z_0,$

$p_2 u_2' z_0 \mapsto v_3 w_3',$

если $\theta_k \neq 0$, то $(w_2'')^2 \mapsto w_2' w_2'' \mapsto (p_2^{s-1}v_3 + u_1'u_3)z_0,$

если $\theta_s \neq 0$, то $(w_3')^2 \mapsto p_2^{s-1}v_3 z_0,$

$u_2't \mapsto u_1''t \mapsto w_3'w_1 \mapsto w_2''w_1,$

$v_5 t \mapsto w_1 z_1,$

$z_1 t \mapsto v_5 w_1 z_0,$

$(w_2')^2 \mapsto (\theta_k p_2^{k-1}v_3 + (\theta_k+1)u_1'u_3)z_0,$

$v_6 t \mapsto w_3' z_1 \mapsto w_2'' z_1 \mapsto p_4 w_1 z_0,$

$w_3' t \mapsto w_2'' t \mapsto u_1'' w_1 z_0,$

$t^2 \mapsto w_1^2 z_0.$

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$, а $\widetilde{q}_i$ обозначает число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.59}$$

Далее мы рассуждаем аналогично доказательству предложения 4.9 в [8]. Пусть моном f имеет нормальную форму. Последовательно предполагая вхождение в f той или иной образующей из набора $\mathcal{X}_1$, с учётом списка элементарных шагов редукции и мономиальных определяющих соотношений в алгебре $\mathcal{A}_1$ находим для f возможные нормальные формы. Далее составляем списки этих нормальных форм, сортируя их по степеням, и наконец, получаем следующие их количества (т. е. значения $\widetilde{q}_i$).

Мономы степени $12a$:

$$\{tw_1^{4i-12a+5}z_0^{12a-3i-5}\}_{i=3a-1}^{4a-2}, \quad \{v_5 w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1},$$

$$\{v_1^{2(3a-i)}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\quad \{u_3w_2'v_1^{6a-2i-2}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},$$
$$\{u_1''w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},\quad \{w_2''w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{3a}^{4a-1},$$
$$\{w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{p_4w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i-1}\}_{3a}^{4a-1},\quad \{u_1''z_1w_1^{4i-12a+5}z_0^{12a-3i-5}\}_{i=3a-1}^{4a-2},$$
$$\{p_1^rz_0^{3a}\}_{r=0}^{k},\quad \{p_2^rz_0^{3a}\}_{r=1}^{s-1},\quad p_3z_0^{3a},\quad p_4z_0^{3a}$$

(их количество равно $14a+k+s+2$).

Мономы степени $12a+1$:

$$\{tw_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{i=3a-1}^{4a-2},\quad \{v_5w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{u_3v_1^{2(3a-i)}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\quad \{w_2'v_1^{6a-2i-1}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},$$
$$\{u_1''w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},\quad \{w_2''w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{3a}^{4a-1},$$
$$\{w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i}\}_{3a+1}^{4a},\quad \{u_1''z_1w_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{i=3a-1}^{4a-2},$$
$$u_2'z_0^{3a},\quad \{p_1^ru_1'z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-1},\quad \{p_2^ru_2'\}_{r=1}^{s-1}\ \text{при}\ a=0,$$
$$\{p_2^rw_3'v_3z_0^{3a-1}\}_{r=0}^{s-2},\quad p_3u_1'z_0^{3a}$$

(их количество равно $14a+k+s+3$).

Мономы степени $12a+2$:

$$\{tw_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{i=3a}^{4a-1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},$$
$$\{u_3w_2'v_1^{6a-2i-1}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\quad \{u_1''w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{w_2''w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{3a}^{4a-1},\quad \{w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+1}\}_{3a+1}^{4a},$$
$$\{u_1''z_1w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{i=3a}^{4a-1},\quad \{v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\quad \{p_1^rv_2z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-2},$$
$$\{p_2^rv_3z_0^{3a}\}_{r=0}^{s-1},\quad v_6z_0^{3a},\quad u_3u_1'z_0^{3a},\quad v_4z_0^{3a}$$

(их количество равно $14a+k+s+4$).

Мономы степени $12a+3$:

$$\begin{gathered}
\{tw_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1}, \quad \{v_5w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},\\
\{u_3v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \quad \{w_2'v_1^{6a-2i}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\\
\{u_1''w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a}, \quad \{w_2''w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{3a}^{4a},\\
\{w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1}, \quad \{p_4w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\\
\{z_1w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a}, \quad \{u_1''z_1w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1},\\
\{p_1^rw_2'z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-1}, \quad \{p_2^rw_3'z_0^{3a}\}_{r=0}^{s-1}, \quad p_3w_2'z_0^{3a}
\end{gathered}$$

(их количество равно $14a+k+s+5$).

Мономы степени $12a+4$:

$$\begin{gathered}
\{tw_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1}, \quad \{v_5w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},\\
\{u_3w_2'v_1^{6a-2i}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \quad \{u_1''w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\\
\{w_2''w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{3a+1}^{4a}, \quad \{w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+2}^{4a+1},\\
\{p_4w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+2}^{4a+1}, \quad \{z_1w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},\\
\{u_1''z_1w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1}, \quad \{v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\\
\{p_1^rz_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k}, \quad \{p_2^rz_0^{3a+1}\}_{r=1}^{s-1}, \quad p_3z_0^{3a+1}, \quad p_4z_0^{3a+1}
\end{gathered}$$

(их количество равно $14a+k+s+6$).

Мономы степени $12a+5$:

$$\begin{gathered}
\{tw_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a}, \quad \{v_5w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\\
\{u_1''w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1}, \quad \{w_2''w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a},\\
\{w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1}, \quad \{p_4w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},\\
\{z_1w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+2}^{4a+1}, \quad \{u_1''z_1w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},\\
\{w_2'v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \quad \{u_3v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},\\
\{p_1^ru_1'z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-1}, \quad \{p_2^rw_3'v_3z_0^{3a}\}_{r=0}^{s-2}, \quad u_2'z_0^{3a+1}, \quad p_3u_1'z_0^{3a+1}
\end{gathered}$$

(их количество равно $14a+k+s+8$).

Мономы степени $12a+6$:

$$\{tw_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{u_3w_2'v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\quad \{u_1''w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{w_2''w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},$$
$$\{u_1''z_1w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2},\quad \{v_1^{6a-2i+3}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{p_1^rv_2z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rv_3z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-1},\quad u_3u_1'z_0^{3a+1},\quad v_4z_0^{3a+1},\quad v_6z_0^{3a+1}$$

(их количество равно $14a+k+s+9$).

Мономы степени $12a+7$:

$$\{tw_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+3}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},\quad \{u_1''w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{w_2''w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{w_2'v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{u_1''z_1w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a},$$
$$\{w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_1^rw_2'z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-1},\quad \{p_2^rw_3'z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-1},\quad p_3w_2'z_0^{3a+1}$$

(их количество равно $14a+k+s+9$).

Мономы степени $12a+8$:

$$\{tw_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{u_3w_2'v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},\quad \{w_2''w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+3}^{4a+2},\quad \{u_1''w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{u_1''z_1w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+3}^{4a+2},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+3}^{4a+2},\quad \{v_1^{6a-2i+4}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{p_1^rz_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k},\quad \{p_2^rz_0^{3a+2}\}_{r=1}^{s-1},\quad z_1z_0^{3a+1},$$
$$p_3z_0^{3a+2},\quad p_4z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+11$).

Мономы степени $12a+9$:

$$\{tw_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+4}z_0^i\}_{i=0}^{3a+2},\quad \{w_2'v_1^{6a-2i+3}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{w_2''w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+3}^{4a+2},$$
$$\{u_1''w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{u_1''z_1w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+1}^{4a+1},$$
$$\{w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_1^ru_1'z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-1},\quad \{p_2^rv_3w_3'z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-2},\quad u_2'z_0^{3a+2},\quad p_3u_1'z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+13$).

Мономы степени $12a+10$:

$$\{tw_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{u_3w_2'v_1^{6a-2i+3}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},\quad \{w_2''w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{u_1''w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{u_1''z_1w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},\quad \{v_1^{6a-2i+5}z_0^i\}_{i=0}^{3a+2},$$
$$\{w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_1^rv_2z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rv_3z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{s-1},$$
$$v_4z_0^{3a+2},\quad v_6z_0^{3a+2},\quad u_3u_1'z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+13$).

Мономы степени $12a+11$:

$$\{tw_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+5}z_0^i\}_{i=0}^{3a+2},\quad \{w_2'v_1^{6a-2i+4}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-11}z_0^{12a-3i+10}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{w_2''w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{w_1^{4i-12a-11}z_0^{12a-3i+11}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-11}z_0^{12a-3i+11}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{u_1''z_1w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{u_1''w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_1^rw_2'z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-1},\quad \{p_2^rw_3'z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{s-1},\quad p_3w_2'z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+14$).

Непосредственно проверяется, что все мономы в этом списке имеют нормальную форму. Используя описание размерностей $\dim_K \mathrm{HH}^n(R)$, приведённое в [6] (см. теорему 2.1 и следствие 2.2 этой работы), отсюда получаем равенство (3.59). $\square$

Случай Б. Предположим теперь, что k чётно и $k > 2$, а s нечётно. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$
\begin{aligned}
&\text{– степени } 0: && p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ из } (3.1);\\
&\text{– степени } 1: && \begin{cases} u_1', u_1'', u_3 \text{ из } (3.2), \quad \text{а также}\\ u_2 := (\mathrm{O}_3, \eta^2); \end{cases} && (3.60)\\
&\text{– степени } 2: && v_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 6, \text{ из } (3.3);\\
&\text{– степени } 3: && \begin{cases} w_1, w_2', w_2'' \text{ из } (3.4), \quad \text{а также}\\ w_3'' := (\mathrm{O}_3, \eta^2, \mathrm{O}_4); \end{cases} && (3.61)\\
&\text{– степени } 4: && z_0, z_1 \text{ из } (3.5); && (3.62)\\
&\text{– степени } 5: && t \text{ из } (3.6). && (3.63)
\end{aligned}
$$

Предложение 3.9. *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Для элементов множества*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Y}_2 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1', u_1'', u_2, u_3\} \cup \{v_i\}_{i=1}^6&\\
\cup \{w_1, w_2', w_2'', w_3''\} \cup \{z_0, z_1, t\}& \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (3.13), (3.15), (3.19), (3.20), (3.21), (3.24), (3.27), (3.28), (3.30), (3.36), (3.37), (3.38), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43), (3.45), (3.54), (3.57), (3.58), *а также следующие соотношения*:

$$
\begin{gathered}
p_2^{s-1} u_2 = 0,\\
(u_1')^2 = (\theta_k + 1) u_1' u_3,\ \ u_1' u_1'' = (u_1'')^2 = \theta_k u_1' u_3,\\
u_1' u_2 = u_1'' u_2 = u_2^2 = u_2 u_3 = 0,\\
p_1^{k-1} v_2 = p_4 v_1,\ \ p_2^{s-1} v_3 = 0,\\
p_4 w_1 = u_1'' v_5,\ \ u_2 v_3 = p_2 w_3'',\ \ u_2 v_i = 0 \ \ \text{для} \ \ i \neq 3,\\
u_1' w_1 = u_2 w_1 = u_3 w_1 = p_2^s z_0 = 0,\\
u_1' w_2' = u_1'' w_2' = u_2 w_2' = 0,\\
u_1' w_2'' = u_1'' w_2'' = u_2 w_2'' = u_3 w_2'' = 0,\\
u_1' w_3'' = u_1'' w_3'' = u_2 w_3'' = u_3 w_3'' = 0,\\
p_4 t = v_6 w_1 = u_1'' z_1 = v_5 w_2'',\\
v_j w_3'' = 0 \ \ \text{для} \ \ j \neq 3,\ \ v_3 w_3'' = p_2 u_2 z_0,\\
u_1' z_1 = u_2 z_1 = u_3 z_1 = 0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
w_1 w_3'' = w_2' w_3'' = w_2'' w_3'' = (w_3'')^2 = 0, \\
w_1 w_2'' = u_1'' t, \ (w_2')^2 = (\theta_k + 1) u_1' u_3 z_0, \\
(w_2'')^2 = w_2' w_2'' = \theta_k u_1' u_3 z_0, \\
v_6 t = w_2'' z_1 = p_4 w_1 z_0, \\
z_1^2 = 0, \ \ w_2'' t = u_1'' w_1 z_0.
\end{gathered}
$$

Доказательство. С учётом вычислений в доказательстве предложения 3.1 для проверки приведённых выше соотношений остаётся только вычислить трансляции элемента w_3''.

Лемма 3.10. *В качестве трансляций* $\mathrm{T}^i(w_3'')$, $0 \leqslant i \leqslant 3$, *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$
\mathrm{T}^0(w_3'') = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{2,3} & \begin{matrix} 0 \\ \eta^2 \otimes e_1 \end{matrix} & \mathrm{O}_{2,4} \end{array} \right);
$$

$\mathrm{T}^1(w_3'')$ – 4×10-*матрица, имеющая ровно два ненулевых элемента*

$$
(\mathrm{T}^1(w_3''))_{4,2} = \sum_{i=2}^{s-1} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{s-i}, \quad (\mathrm{T}^1(w_3''))_{2,4} = \eta^2 \otimes e_0;
$$

$\mathrm{T}^2(w_3'')$ – 6×12-*матрица, имеющая ровно два ненулевых элемента*

$$
(\mathrm{T}^2(w_3''))_{2,4} = (\mathrm{T}^2(w_3''))_{5,7} = \eta^2 \otimes e_1;
$$

$\mathrm{T}^3(w_3'')$ – 8×14-*матрица, имеющая ровно три ненулевых элемента*

$$
\begin{gathered}
(\mathrm{T}^3(w_3''))_{4,2} = \sum_{i=2}^{s-1} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{s-i}, \quad (\mathrm{T}^3(w_3''))_{2,4} = \eta^2 \otimes e_0, \\
(\mathrm{T}^3(w_3''))_{7,10} = \eta \otimes \eta.
\end{gathered}
$$

Доказательство. Полная аналогия с доказательством леммы 3.2. Опускаем подробности.

Теперь доказательство предложения 3.9 завершается аналогично доказательству предложения 3.1. Соответствующие вычисления оставляем проделать читателю. □

Предложение 3.11. *Предположим, что k чётно, а s нечётно. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в* (3.64), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. С небольшими изменениями повторяем доказательство предложения 3.6; заметим, соотношения из леммы 3.4 остаются справедливыми и в рассматриваемом случае. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 2, где I_2 – соответствующий идеал соотношений. Ввиду предложений 3.9 и 3.11 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$. Пусть $\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_2^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (Б) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.12. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{3.65}$$

Замечание 3.13. Легко проверяется, что в алгебре $\mathcal{A}_2$ справедливо соотношение $p_2^{s-2}v_3w_3'' = 0$.

Доказательство предложения 3.12**.** На кольце $K[\mathcal{X}_2]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$\begin{aligned} &t > v_2 > v_4 > v_5 > v_6 > v_1 > u_2 > u_1'' > w_3'' > w_2'' > w_2' \\ &\quad > u_3 > u_1' > v_3 > w_1 > z_1 > z_0 > p_2 > p_3 > p_4 > p_1. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству предложения 3.7 рассматривается приведённый ниже список элементарных шагов редукции, а затем исследуются соответствующие нормальные формы мономов.

$$\begin{array}{ll}
p_2^s \mapsto p_1^k, & p_1u_1'' \mapsto p_1u_1', \\
p_1^{k-1}v_2 \mapsto p_4v_1, & p_3v_4 \mapsto p_4v_1 \mapsto u_1'u_3, \\
\text{если } \theta_k = 0, \text{ то } (u_1')^2 \mapsto u_1'u_3, & (u_1'')^2 \mapsto u_1'u_1'', \\
\text{если } \theta_k \neq 0, \text{ то } u_1'u_1'' \mapsto u_1'u_3, & u_1''v_2 \mapsto u_1'v_2 \mapsto p_1w_2'' \mapsto p_1w_2', \\
u_2v_3 \mapsto p_2w_3'', & u_1''v_5 \mapsto p_4w_1, \\
u_1'v_4 \mapsto p_3w_2', & v_2^2 \mapsto p_1^2z_0, \\
u_2'w_1 \mapsto u_1''w_1, & v_1v_6 \mapsto u_3w_2', \\
v_3^2 \mapsto p_2^2z_0, & p_4t \mapsto v_5w_2'' \mapsto v_6w_1 \mapsto u_1''z_1, \\
v_4w_2' \mapsto p_3u_1'z_0, & v_2w_2'' \mapsto v_2w_2' \mapsto p_1u_1'z_0, \\
p_2u_2z_0 \mapsto v_3w_3'', & \text{если } \theta_k = 0, \text{ то } (w_2')^2 \mapsto u_1'u_3z_0, \\
u_1''t \mapsto w_2''w_1, & (w_2'')^2 \mapsto w_2'w_2'', \\
\text{если } \theta_k \neq 0, \text{ то } w_2'w_2'' \mapsto u_1'u_3z_0, & v_5t \mapsto w_1z_1, \\
v_6t \mapsto w_2''z_1 \mapsto p_4w_1z_0, & w_2''t \mapsto u_1''w_1z_0, \\
z_1t \mapsto v_5w_1z_0, & t^2 \mapsto w_1^2z_0.
\end{array}$$

В результате получаются списки нормальных форм, которые мало отличаются от списков, полученных в доказательстве предложения 3.7. А именно, надо заменить (в соответствующих размерностях) наборы

$\{p_2^r w_3' z_0^m\}_{r=0}^{s-1}$ на $\{p_2^r w_3'' z_0^m\}_{r=0}^{s-2}$ и заменить наборы $\{p_2^r w_3' v_3 z_0^m\}_{r=0}^{s-1}$ на наборы $\{p_2^r w_3'' v_3 z_0^m\}_{r=0}^{s-3}$, удалить элементы вида $p_1^k z_0^m$, $p_2^{s-1} v_3 z_0^m$, а элементы вида $u_2' z_0^m$ заменить на элементы $u_2 z_0^m$.

Используя описание размерностей $\dim_K \mathrm{HH}^n(R)$, приведённое в [6], отсюда получаем равенство (3.65). □

Случай B. Предположим теперь, что k нечётно, а s чётно, а также $k > 2, s > 2$.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (3.1);

$$\text{– степени 1 :}\quad \begin{cases} u_2', u_3, \text{ из (3.2), а также} \\ u_1 := (\alpha, \beta, \mathrm{O}_2),\ u_4 := (\alpha g, \mathrm{O}_3); \end{cases} \tag{3.66}$$

– степени 2 : v_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, из (3.3);

$$\text{– степени 3 :}\quad \begin{cases} w_1, w_3' \text{ из (3.4), а также} \\ w_2 := (\alpha, \beta, \mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3),\ w_4 := (\alpha g, \mathrm{O}_7); \end{cases} \tag{3.67}$$

$$\text{– степени 4 :}\quad z_0, z_1 \text{ из (3.5);} \tag{3.68}$$

$$\text{– степени 5 :}\quad t \text{ из (3.6).} \tag{3.69}$$

Предложение 3.14. *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Для элементов множества*

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_3 = \{p_i\}_{i=1}^4 \cup \{u_1, u_2', u_3, u_4\} \cup \{v_i\}_{i=1}^6 \\ \cup \{w_1, w_2, w_3', w_4\} \cup \{z_0, z_1, t\} \end{aligned} \tag{3.70}$$

в $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются соотношения (3.8), (3.12), (3.15), (3.19), (3.22), (3.36), (3.37), (3.38), (3.41), (3.44), (3.45), (3.52), (3.54), (3.57), (3.58), *а также следующие соотношения*:

$$p_j u_1 = 0 \text{ для } j \neq 3,\ \ p_j u_3 = 0 \text{ для всех } j,$$
$$p_j u_4 = 0 \text{ для } j > 1,\ \ p_1^{k-1} u_4 = 0,$$
$$u_1 u_2' = u_1 u_4 = 0,\ \ (u_2')^2 = \theta_s p_2^{s-1} v_3,$$
$$u_1^2 = u_1 u_3 = p_4 v_1 = p_2^{s-1} v_3,$$
$$u_1 v_i = 0 \text{ для } i \in \{1, 2, 3, 6\},$$
$$u_4 v_i = 0 \text{ для } i \neq 2,$$
$$u_1 v_4 = p_3 w_2,\ \ u_1 v_5 = u_2' v_5 = p_4 w_1,$$
$$p_i w_1 = 0 \text{ для } i < 4,\ \ p_i w_2 = 0 \text{ для } i \neq 3,$$

$$\begin{gathered}
p_i w_3' = 0 \;\textit{ для }\; i \neq 2,\;\; p_i w_4 = 0 \;\textit{ для }\; i > 1,\;\; p_1^{k-1} w_4 = 0,\\
u_3 w_1 = u_4 w_1 = 0,\;\; u_1 w_2 = u_2' w_2 = u_4 w_2 = 0,\\
u_1 w_3' = u_2' w_3' = u_3 w_3' = u_4 w_3' = 0,\\
u_1 w_4 = u_2' w_4 = u_3 w_4 = u_4 w_4 = 0,\\
u_1 w_1 = u_2' w_1,\;\; v_1 v_6 = u_3 w_2,\;\; p_1^k z_0 = 0,\\
p_4 t = v_6 w_1 = v_5 w_2 = v_5 w_3' = u_1 z_1 = u_2' z_1,\\
v_2 w_4 = p_1 u_4 z_0,\;\; v_4 w_2 = p_3 u_1 z_0,\;\; v_3 w_3' = p_2 u_2' z_0,\\
w_1 w_2 = w_1 w_3' = u_1 t = u_2' t,\\
w_2^2 = (w_3')^2 = p_4 v_1 z_0,\;\; u_3 t = u_4 t = 0,\\
w_3' z_1 = v_6 t = p_4 w_1 z_0,\;\; w_4 z_1 = 0,\\
w_2 t = w_3' t = u_1 w_1 z_0,\\
z_1^2 = 0,\;\; w_4 t = 0.
\end{gathered}$$

Доказательство. С учётом вычислений, проведённых в доказательстве предложений 3.1, 3.9, а также в доказательстве предложения 3.1 в работе [12], для проверки приведённых выше соотношений остаётся только вычислить трансляции элемента w_4.

Лемма 3.15. *В качестве трансляций (подходящих порядков) элемента w_4 можно взять гомоморфизмы, определяемые матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(w_4) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha g \otimes e_0 & \mathrm{O}_{2,7} \\ 0 & \end{array} \right);$$

$$\mathrm{T}^1(w_4) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C}^{(18)} & \mathrm{C}^{(19)} \end{array} \right), \tag{3.71}$$

где $\mathrm{C}^{(18)}$ *есть матрица*

$$\begin{pmatrix}
\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-i} + \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)a^i \otimes \gamma\beta a^{k-i} & \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)\beta a^i \otimes \gamma b^{k-i}\\
\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-i} & \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1) b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i}\\
\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1) g^i \otimes \beta\alpha g^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^i \otimes b^{k-i}\\
0 & 0
\end{pmatrix},$$

$\mathrm{C}^{(19)}$ – 4×8*-матрица с двумя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{C}^{(19)})_{1,1} = (\mathrm{C}^{(19)})_{1,5} = \alpha g \otimes e_0;$$

$\mathrm{T}^2(w_4)$ – 6×12-*матрица с тремя ненулевыми элементами*

$$(\mathrm{T}^2(w_4))_{1,1} = (\mathrm{T}^2(w_4))_{1,5} = (\mathrm{T}^2(w_4))_{3,5} = \alpha g\otimes e_0;$$

$$\mathrm{T}^3(w_4) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{C}^{(20)} & \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{O}_{4,8} \\ \hline \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{C}^{(19)} \end{array}\right),$$

где $\mathrm{C}^{(19)}$ – *матрица из* (3.71) *и* $\mathrm{C}^{(20)}$ *есть матрица*

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma\beta a^i\otimes g^{k-i} & \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)\beta a^i\otimes\gamma b^{k-i} & * \\ \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-i} & \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)b^i\otimes\alpha\gamma b^{k-i} & \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-i} \\ \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)g^i\otimes\beta\alpha g^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^i\otimes b^{k-i} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C}^{(20)}_{1,3} = \sum_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma\beta a^i\otimes g^{k-i} + \alpha g\otimes e_0 + a\otimes\gamma\beta a^{k-1},$$

$$\mathrm{C}^{(20)}_{3,3} = \sum_{i=2}^{k-1}(i+1)g^i\otimes\beta\alpha g^{k-i} + a\otimes\beta\alpha g^{k-1}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.2.

Теперь доказательство предложения 3.14 завершается аналогично доказательству предложения 3.1. Оставляем читателю проделать вычисления. □

Лемма 3.16. *Для любого* $\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$v_1^\ell(v_1w_2+u_3z_0) = \left(\,\mathrm{O},\alpha,\mathrm{O}_3,\alpha,\mathrm{O}_3\,\right)\in \mathrm{HH}^{2\ell+5}(R).$$

Замечание 3.17. Легко проверяется, что для элементов, участвующих в формулировке леммы 3.4, выполняются все соотношения из [12, лемма 3.5], кроме соотношения (8). Формулировка леммы 3.16 как раз и доставляет нам необходимый аналог этого соотношения.

Доказательство леммы 3.16. С использованием формулы для $\mathrm{T}^3(v_1^\ell)$ из доказательства леммы 3.5 в [12] получаем

$$w_2v_1^{\ell+1} = \mu\mathrm{T}^0(w_2)\mathrm{T}^3(v_1^{\ell+1}) = \left(\,\mathrm{O},\gamma\beta a^{k-1},\mathrm{O}_3,\alpha,\mathrm{O}_3,\alpha,\mathrm{O}_3\,\right).$$

Наконец, с помощью пункта (2) леммы 3.5 из [12] получаем, что

$$v^{\ell} \cdot u_3 z_0 = \big(\,\mathrm{O}, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_{11}\,\big),$$

откуда следует требуемое утверждение. □

Предложение 3.18. *Предположим, что k нечётно, а s чётно. Множество $\mathcal{Y}_3$, указанное в* (3.70)*, порождает $\mathrm{HH}^*(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_3 \cup \{1\}$. Мы сначала докажем, что $\bigcup_{i=0}^{5} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$. Легко получаем, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \in \{0,1,2\}$. Далее, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в следствии 1.4, часть (c), получаем соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\,\big) = p_1^{i-1} w_4 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\,\big) = p_2^{i-1} w_3 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant s,\\
&\big(a^k, \mathrm{O}_7\,\big) = p_3 w_2, \quad \big(\,\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big) = u_3 v_1,\\
&\big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\,\big) = p_4 w_1,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^4(R)$, описанных в предложении 1.5, часть (b), не лежащих в $z_0 \cdot \mathrm{HH}^0(R)$, имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(\,\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_7\,\big) = v_1 v_6, \quad \big(\,\mathrm{O}_6, e_0, \mathrm{O}_3\,\big) = v_1^2,\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \mathrm{O}_4, \gamma, 0\big) = u_1 w_1,
\end{aligned}$$

и потому $\mathrm{HH}^4(R) \subset \mathcal{H}$. Наконец, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^5(R)$, описанных в предложении 1.6, часть (c), не лежащих в $z_0 \cdot \mathrm{HH}^1(R)$, имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(\,\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big) = u_3 z_0 + v_1 w_2, \quad \big(\,\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_4\,\big) = t,\\
&\big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_6\,\big) = p_4 t, \quad \big(\,\mathrm{O}_8, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big) = u_3 v_1^2,\\
&\big(\,\mathrm{O}_9, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big) = v_5 w_1.
\end{aligned}$$

Теперь индукцией по n аналогично доказательству предложения 3.6 доказывается, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ для любого n. □

Пусть $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 2, где I_3 – соответствующий идеал соотношений. Ввиду предложений 3.14 и 3.18 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3$. Пусть $\mathcal{A}_3 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_3^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}_3$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (B) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.19. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$\begin{aligned} t > v_2 > v_3 > v_4 > v_5 > v_6 > v_1 > u_3 > u_4 > u_2' > u_1 > w_4 \\ > w_3' > w_2 > w_1 > z_1 > z_0 > p_2 > p_3 > p_4 > p_1. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству предложения 3.7 мы рассмотрим список элементарных шагов редукции, приведённый ниже, а затем исследуем нормальные формы мономов (относительно таких шагов редукции); напомним, что параметр θ_n определён в (2.2).

$$\begin{array}{ll}
p_2^s \mapsto p_1^k, & \text{если } \theta_s \neq 0, \text{ то } p_2^{s-1}v_3 \mapsto (u_2')^2, \\
p_2^{s-1}v_3 \mapsto p_3v_4 \mapsto p_4v_1 \mapsto u_1u_3 \mapsto u_1^2, & u_4v_2 \mapsto p_1w_4, \\
u_1v_4 \mapsto p_3w_2, & u_2'v_5 \mapsto u_1v_5 \mapsto p_4w_1, \\
u_2'v_3 \mapsto p_2w_3', & v_2^2 \mapsto p_1^2z_0, \\
v_1v_6 \mapsto u_3w_2, & u_2'w_1 \mapsto u_1w_1, \\
v_3^2 \mapsto p_2^2z_0, & v_6w_1 \mapsto u_2'z_1 \mapsto u_1z_1, \\
p_4t \mapsto v_5w_3' \mapsto v_5w_2 \mapsto u_1z_1, & v_3w_3' \mapsto p_2u_2'z_0, \\
v_2w_4 \mapsto p_1u_4z_0, & v_4w_2 \mapsto p_3u_1z_0, \\
u_2't \mapsto u_1t \mapsto w_1w_3' \mapsto w_1w_2, & p_4v_1z_0 \mapsto (w_3')^2 \mapsto w_2^2, \\
v_5t \mapsto w_1z_1, & w_3't \mapsto w_2t \mapsto u_1w_1z_0, \\
w_3'z_1 \mapsto p_4w_1z_0, & z_1t \mapsto v_5w_1z_0, \\
t^2 \mapsto w_1^2z_0. &
\end{array}$$

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_3^i$, а $\widetilde{q}_i$ обозначает число мономов из $\mathcal{A}_3^i$, представленных в нормальной форме. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_3^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.72}$$

Далее мы рассуждаем аналогично доказательству предложения 4.9 в [8] (см. также доказательство предложения 3.7) и получаем следующие списки нормальных форм.

Мономы степени $12a$:

$$\{tw_1^{4i-12a+5}z_0^{12a-3i-5}\}_{i=3a-1}^{4a-2},\quad \{v_5w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{v_1^{2(3a-i)}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\quad \{u_3w_2v_1^{6a-2i-2}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\quad \{u_1w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{u_1z_1w_1^{4i-12a+5}z_0^{12a-3i-5}\}_{3a-1}^{4a-2},\quad \{w_2w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{3a}^{4a-1},$$
$$\{w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{p_4w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{3a-1}^{4a-2},\quad \{p_1^rz_0^{3a}\}_{r=0}^{k-1},\quad p_1^k \text{ при } a=0,$$
$$\{p_2^rz_0^{3a}\}_{r=1}^{s-1},\quad p_3z_0^{3a},\quad p_4z_0^{3a}$$

(их количество равно $14a+k+s+1$ при $a>0$ и $k+s+2$ при $a=0$).

Мономы степени $12a+1$:

$$\{tw_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{i=3a-1}^{4a-2},\quad \{v_5w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{u_3v_1^{2(3a-i)}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\quad \{w_2v_1^{6a-2i-1}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\quad \{p_1^ru_4z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-2},$$
$$\{p_2^ru_2'z_0^{3a}\}_{r=1}^{s-1},\quad \{u_1w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},\quad p_3u_1z_0^{3a},$$
$$\{u_1z_1w_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{3a-1}^{4a-2},\quad \{w_2w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{3a}^{4a-1},$$
$$\{w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{3a}^{4a-1}$$

(их количество равно $14a+k+s+2$).

Мономы степени $12a+2$:

$$\{tw_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{i=3a}^{4a-1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},$$
$$\{v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\ \{u_3w_2v_1^{6a-2i-1}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\ \{u_1w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{u_1z_1w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{3a}^{4a-1},\quad \{w_2w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{3a}^{4a-1},$$
$$\{w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{3a}^{4a-1},\quad \{p_1^rv_2z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rv_3z_0^{3a}\}_{r=0}^{s-2},$$
$$p_2^{s-1}v_3z_0^{3a} \text{ при } \theta_s=0,\quad (u_2')^2z_0^{3a} \text{ при } \theta_s=1,\ v_4z_0^{3a},\ v_6z_0^{3a}$$

(их количество равно $14a+k+s+3$).

Мономы степени $12a+3$:

$$\{tw_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\quad \{w_2v_1^{6a-2i}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\quad \{u_1w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{u_1z_1w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{3a}^{4a-1},\quad \{w_2w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{3a}^{4a},$$
$$\{w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\quad \{p_4w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{3a}^{4a-1},\quad \{p_1^rw_4z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rw_3'z_0^{3a}\}_{r=0}^{s-1},\quad p_3w_2z_0^{3a}$$

(их количество равно $14a+k+s+4$).

Мономы степени $12a+4$:

$$\{tw_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\quad \{u_3w_2v_1^{6a-2i}z_0^i\}_{i=0}^{3a},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{3a+1}^{4a},\quad \{w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+2}^{4a+1},\quad \{z_1w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{3a}^{4a},$$
$$\{p_1^rz_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-1},\quad \{p_2^rz_0^{3a+1}\}_{r=1}^{s-1},\quad p_3z_0^{3a+1},\quad p_4z_0^{3a+1}$$

(их количество равно $14a+k+s+5$).

Мономы степени $12a+5$:

$$\{tw_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},\quad \{w_2v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a},\quad \{w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{3a+1}^{4a},$$
$$\{p_1^ru_4z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^ru_2'z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-1},\quad p_3u_1z_0^{3a+1}$$

(их количество равно $14a+k+s+7$).

Мономы степени $12a+6$:

$$\{tw_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{v_1^{6a-2i+3}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1},\quad \{u_3w_2v_1^{6a-2i+1}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{3a+1}^{4a},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a},$$
$$\{p_1^rv_2z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rv_3z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-2},\quad p_2^{s-1}v_3z_0^{3a+1}\ \text{при}\ \theta_s=0,$$
$$(u_2')^2z_0^{3a+1}\ \text{при}\ \theta_s=1,\ v_4z_0^{3a+1},\ v_6z_0^{3a+1}$$

(их количество равно $14a+k+s+8$).

Мономы степени $12a+7$:

$$\{tw_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+3}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1},\quad \{w_2v_1^{6a-2i+2}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{3a+1}^{4a},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},$$
$$\{p_1^rw_4z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rw_3'z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-1},\quad p_3w_2z_0^{3a+1}$$

(их количество равно $14a+k+s+8$).

Мономы степени $12a+8$:

$$\{tw_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{v_1^{6a-2i+4}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1},\quad \{u_3w_2v_1^{6a-2i+2}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{3a+1}^{4a+1},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},\quad \{w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+1}^{4a+1},$$
$$\{p_1^rz_0^{3a+2}\}_{r=1}^{k-1},\quad \{p_2^rz_0^{3a+2}\}_{r=1}^{s-1},\quad p_3z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+10$).

Мономы степени $12a+9$:

$$\{tw_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+1}^{4a+1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+4}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+2},\quad \{w_2v_1^{6a-2i+3}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{3a+1}^{4a+1},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},$$
$$\{p_1^ru_4z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^ru_2'z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{s-1},\quad p_3u_1z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+12$).

Мономы степени $12a+10$:

$$\{tw_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{v_1^{6a-2i+5}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+2},\quad \{u_3w_2v_1^{6a-2i+3}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{3a+2}^{4a+1},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_1^rv_2z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rv_3z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{s-2},\quad p_2^{s-1}v_3z_0^{3a+2}\ \text{при}\ \theta_s=0,$$
$$(u_2')^2z_0^{3a+2}\ \text{при}\ \theta_s=1,\ v_4z_0^{3a+2},\ v_6z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+12$).

Мономы степени $12a+11$:

$$\{tw_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},\quad \{v_5w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+5}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+2},\quad \{w_2v_1^{6a-2i+4}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+2},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{u_1z_1w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{3a+3}^{4a+2},\quad \{w_1^{4i-12a-11}z_0^{12a-3i+11}\}_{3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-11}z_0^{12a-3i+11}\}_{3a+3}^{4a+3},\quad \{z_1w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_1^rw_4z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-2},\quad \{p_2^rw_3'z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{s-1},\quad p_3w_2z_0^{3a+2}$$

(их количество равно $14a+k+s+13$).

Непосредственно проверяется, что все мономы в этом списке имеют нормальную форму. Используя описание размерностей $\dim_K \mathrm{HH}^n(R)$, приведённое в [6], отсюда получаем равенство (3.72). $\square$

Список литературы

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), № 6, 53–122.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. Матем., мех., астрономия. Вып. 1 (2010), 28–38.
4. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 67–104.
5. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* V. *Серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 74–102.
6. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VI. *Серия $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$.* — Алгебра и анализ **27** (2015), № 6, 89–116.
7. А. И. Генералов, М. А. Филиппов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VII. *Серия $D(3\mathcal{R})$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 53–81.
8. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VIII. *Алгебра когомологий для серии $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **470** (2018), 50–87.
9. А. И. Генералов, М. А. Качалова, П. А. Мостовский, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IX. *Алгебра когомологий для серии $D(3\mathcal{K})$ в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **513** (2022), 30–56.
10. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, В. А. Рогов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* X. *Исключительные локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **522** (2023), 60–83.
11. М. А. Качалова, *Алгебра когомологий Хохшильда исключительных локальных алгебр диэдрального типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **513** (2022), 85–109.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* XI. *Алгебра когомологий для некоторой серии исключительных алгебр.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **531** (2024), 71–100.
13. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin, Heidelberg, 1990.

Generalov A. I. Hochschild cohomology of algebras of dihedral type. XII. Cohomology algebra for a family of exceptional algebras with two simple modules.

In the recent paper of the author published in “Zapiski nauchn. semin. POMI”, vol. 531 (2024), 71–100, the Hochschild cohomology algebra is described in terms of generators and relations for a subfamily of the family $D(2\mathcal{B})$ of algebras of dihedral type for which the natural parameters included in the defining relations take odd values. In the present work, the such

description of the cohomology algebra is given for algebras from mentioned family in remaining cases, except small values of the parameters.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 5 ноября 2024 г.