УДК 517.51, 519.216.8

Некоторые экстремальные задачи для мартингальных преобразований. II. Васюнин В. И. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 5–39.

Данная статья является непосредственным продолжением работы с тем же названием (В. И. Васюнин, П. Б. Затицкий, *Некоторые экстремальные задачи для мартингальных преобразований.* I. Зап. Научн. Сем. ПОМИ, **527** (2023), 5–53), поэтому ни вводная часть работы, ни список литературы здесь не дублируются. Однако для удобства читателя те формулы из первой статьи, на которые есть ссылки, приводятся в специальном добавлении в конце статьи под своими исходными номерами.

В данной работе исследуются две новые локальные фолиации: малые карманы и прямоугольники. Появление таких локальных фолиаций иллюстрируется дальнейшим разбором примеров, когда граничные значения являются полиномами третьей степени.

Библ. – 1 назв.

УДК 517.5

Критерий ограниченности усреднений в пространствах Лебега с переменным показателем на периоде. Виноградов О. Л. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 40–63.

В работе получен критерий равномерной ограниченности семейства средних Стеклова в пространствах Лебега с переменным показателем, состоящих из периодических функций. Этот критерий совпадает с известным локальным аналогом условия Макенхаупта. Ранее ограниченность средних Стеклова была известна при условии Дини–Липшица. Получены явные оценки норм усредняющих операторов.

Библ. – 19 назв.

УДК 517.51

Новая беллмановская индукция и ослабленная версия нормы BMO. Добронравов Е. П., Затицкий П. Б., Столяров Д. М. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 64–93.

Работа расширяет область применения к оценкам в духе Джона и Ниренберга так называемой беллмановской индукции, отказываясь от определённых предположений о выпуклости. В качестве приложения рассмотрена численная характеристика функции, которая существенно меньше нормы в пространстве BMO, но конечность которой влечёт экспоненциальную интегрируемость исходной функции.

Библ. – 29 назв.

УДК 517.51

Об абсолютно расходящихся рядах Фурье. Кисляков С. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 94–103.

Описан метод построения рядов, упомянутых в заглавии. Он дает функции от нескольких переменных с гладкостью, несколько более высокой, чем $C^{(d/2)}(\mathbb{T}^d)$ и основан на аналоге теоремы де Леу–Кацнельсона–Кахана для классов $C^{(l)}(\mathbb{T}^d)$.

Библ. – 9 назв.

УДК 517.574

Обратная теорема приближения целыми функциями экспоненциального типа. Сильванович О. В., Широков Н. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 104–115.

Пусть $I_k = (a_k, b_k)$, $J_k = [b_k, a_{k+1}]$, $b_k < a_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, – отрезки на вещественной оси, сходящиеся к $+\infty$ и $-\infty$, удовлетворяющие условиям:

$|I_k| = 2^{-n\alpha}$, если $I_k \subset [2^n, 2^{n+1}]$ или $I_k \subset [-2^{n+1}, -2^n]$ с некоторым $\alpha > 0$ при $n \geqslant n_0$, $2^{n_0} \cdot 2^{-n\alpha} \leqslant |J_k| \leqslant c_1 2^{n_0} \cdot 2^{-n\alpha}$ с некоторой постоянной c_1, если $J_k \subset [2^n, 2^{n+1}]$ или $J_k \subset [-2^{n+1}, -2^n]$, $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} J_k$.

Пусть $f_{E,1}(z)$ – субгармоническая на всей плоскости $\mathbb{C}$ функция, удовлетворяющая условиям $f_{E,1}(x) = 0$ при $x \in E$, $f_{E,1}(z)$ гармонична в $\mathbb{C} \setminus E$, $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{f_{E,1}(z)}{|z|} = 1$ и для любой функции g, удовлетворяющей условиям $g(x) \leqslant 0,\ x \in E$, и $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{g(z)}{|z|} \leqslant 1$, имеется неравенство $g(z) \leqslant f_{E,1}(z),\ z \in \mathbb{C}$.

Для $t > 0$ положим $L_t(E) = \{z \in \mathbb{C} : f_{E,1}(z) = t\}$, $\rho_t(x) = \mathrm{dist}(x, L_t(E)),\ x \in E$. Пусть T_σ – множество целых функций F_σ экспоненциального типа, удовлетворяющих условию

$$|F_\sigma(z)| \leqslant c_{F_\sigma} \exp(\sigma|\mathrm{Im} z|)$$

при $z \in \mathbb{C}$, $\Lambda^s(E)$ – функции из класса Гёльдера порядка $s,\ 0 < s < 1$, ограниченные на E.

В статье доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что для функции f, заданной на E, при любом $\sigma \geqslant 1$ найдется функция $F_\sigma \in T_\sigma$ такая, что имеется оценка*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leqslant c_f \rho^s_{\frac{1}{\sigma}}(x), \quad x \in E.$$

Тогда $f \in \Lambda^s(E)$.

Библ. – 7 назв.

УДК 517.51

Оценки функций в задаче об идеалах алгебры H^∞. Скворцов А. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 116–127.

Недавние результаты автора и С. В. Кислякова (Алгебра и анализ, **35**, No. 5 (2023), 99–116) о независимости разрешимости задачи об идеалах от типа пространств, в которых она ставится, распространены так, чтобы охватить контекст работы С. Р. Трейля (J. Funct. Analysis, **253** (2007), 220–240) и Дж. Пау (Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 167–174).

Библ. – 5 назв.

УДК 517.5

Ф-неравенства Мазьи на областях. Столяров Д. М. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 128–150.

Найдены необходимые и достаточные условия на функцию Φ для выполнения неравенства

$$\Big|\int_\Omega \Phi(K * f)\Big| \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)}.$$

Здесь K – положительно однородное ядро порядка $\alpha - d$, возможно, векторнозначное, Φ – положительно p-однородная функция, и $p = d/(d-\alpha)$. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ либо ограничена и имеет $C^{1,\beta}$ гладкую границу для некоторого $\beta > 0$, либо является полупространством в $\mathbb{R}^d$. Как следствие, мы описываем положительно однородные порядка $d/(d-1)$ функции $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, допускающие равномерную оценку

$$\Big|\int_\Omega \Phi(\nabla u)\Big| \lesssim \int_\Omega |\Delta u|.$$

Библ. – 16 назв.

УДК 517.547

Обратная теорема полиномиального приближения на эллиптической кривой. Шагай М. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 52. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 537), СПб., 2024, с. 151–177.

Пусть $\wp(z)$ – двояко-периодическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$, Q – параллелограмм с вершинами $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2(\omega_1+\omega_2)$, $s_k, 1 \leqslant k \leqslant m$, – попарно дизъюнктные отрезки, $s_k = [a_k, b_k] \subset Q, 1 \leqslant k \leqslant m$. Числа $\varepsilon_{kn} > 0$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{kn}^2 < \infty$. Обозначим через $g(z)$ функцию Грина области $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$ с логарифмическим вычетом в бесконечности, и пусть $L_h = \{z \in Q \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k : g(z) = h\}$, $0 < h < \max\limits_{z\in\overline{Q}} g(z), \rho_h(z) = \operatorname{dist}(z, L_h)$. Пусть $T(z) = (\wp(z), \wp'(z)), z \in Q$,

$$d_{kn}(z) = 1 + \frac{1}{2^n\sqrt{\delta(T(z), T(a_k)) \cdot \delta(T(z), T(b_k))}}, \quad z \in s_k, \text{ где}$$

$$\delta((\zeta, w), (\zeta', w')) = \sqrt{|\zeta - \zeta'|^2 + |w - w'|^2}.$$

В работе доказана следующая теорема.

Теорема $1'$**.** *Пусть* $2 \leqslant p_k < \infty, 1 \leqslant k \leqslant m, f_k \in C(s_k)$ *и предположим, что найдутся полиномы* $\mathsf{P}_{2^n}(u,v), \deg \mathsf{P}_{2^n} \leqslant 2^n$ *и постоянная* C_* *такие, что при* $n = 1, 2, \ldots$ *выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(z) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{kn} \rho_{2^{-n}}(z)} \right|^{p_k} d_{kn}(z)|dz| \leqslant C_*.$$

Тогда $f_k'(z) \in L^{p_k}(s_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Библ. – 4 назв.