Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 537, 2024 г.

М. А. Шагай

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Пусть $E = \{(\zeta, w) \in \mathbb{C} : w^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3\}$ – эллиптическая кривая в $\mathbb{C}^2$. Предположим, что её можно параметризовать с помощью двоякопериодической функции Вейерштрасса $\wp(z)$ и её производной $\wp'(z)$,

$$T(z) = (\wp(z), \wp'(z)) : Q \to E, \tag{1}$$

Q – параллелограмм периодов функции $\wp(z)$ с вершинами

$$0,\ 2\omega_1,\ 2\omega_2,\ 2\omega_3 \overset{\text{def}}{=} 2(\omega_1 + \omega_2),$$

$\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, и отображение T взаимно однозначно.

Пусть $s_k, 1 \leqslant k \leqslant m, m \geqslant 1,$ – попарно дизъюнктные отрезки в Q, $\sigma_k = T(s_k) \subset E$. Для $0 < t < 1$ положим $Q_t = \omega_3 + t \cdot (Q - \omega_3)$. Предположим, что на множестве $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \sigma_k$ задана функция F, $F|_{\sigma_k} \overset{\text{def}}{=} F_k$, удовлетворяющая условию $\frac{dF_k}{dl_k} \in L^{p_k}(\sigma_k)$, где $1 < p_k < \infty$, $\dfrac{dF_k}{dl_k}$ – производная по длине дуги в σ_k. Определим функции $\widetilde{\rho_h}(\zeta, w)$ для $h > 0$, $(\zeta, w) \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} \sigma_k$ следующим образом: пусть $g(z)$ – функция Грина для области $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$ с логарифмическим полюсом в бесконечности,

$L_h = \{z \in Q \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k : g(z) = h\}$, $0 < h < \max\limits_{z \in \overline{Q}} g(z) \overset{\text{def}}{=} h_0$; $\rho_h(z) = \operatorname{dist}(z, L_h), z \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$, $\widetilde{\rho_h}(\zeta, w) \overset{\text{def}}{=} \rho_h(T^{-1}(\zeta, w))$, если $0 < h \leqslant h_0$, $\widetilde{\rho_h}(\zeta, w) \equiv 1$ при $h > h_0$.

В работе [1] была доказана теорема о приближении функции $f(z) \overset{\text{def}}{=} F(T(z))$ полиномами от функций $\wp(z), \wp'(z)$, при этом было отмечено, что её формулировка при переходе на эллиптическую кривую E использует полиномиальные приближения. Приведём второй вариант этой формулировки.

Ключевые слова: двояко-периодические функции Вейерштрасса, аппроксимация в среднем, обратные теоремы.

Теорема A. *Пусть множество* $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \sigma_k$ *и функции* $F(\zeta, w)$ *и* $\widetilde{\rho_h}(\zeta, w)$ *определены выше. Существует постоянная* C*, не зависящая от* n*, такая, что для* $n = 1, 2, \dots$ *существуют полиномы* $\mathsf{P}_n(\zeta, w)$*,* $\deg \mathsf{P}_n \leqslant n$*, для которых справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\sigma_k} \left| \frac{F(\zeta, w) - \mathsf{P}_n(\zeta, w)}{\widetilde{\rho}_{\frac{1}{n}}(\zeta, w)} \right|^{p_k} dl_k \leqslant C, \tag{2}$$

dl_k *в* (2) *означает длину дуги на* σ_k*.*

Настоящая работа посвящена обратному утверждению к теореме A. Потребуются более сильные условия, чем соотношение (2), но будут использоваться только полиномы P_{2^n}, $\deg \mathsf{P}_{2^n} \leqslant 2^n$.

§1. Определения и формулировки

Предполагаем, что $2 \leqslant p_k < \infty$, $k = 1, \dots, m$. Эллиптическая кривая $E \subset \mathbb{C}^2$ и связанные с ней двояко-периодические функции Вейерштрасса определены ранее, отображение T задано в (1), сегменты s_k и кривые $\sigma_k = T(s_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и параллелограмм Q также заданы ранее. Обозначим $s_k = [a_k, b_k]$, $T(a_k) = (\zeta'_k, w'_k), T(b_k) = (\zeta''_k, w''_k)$. Предположим, что числа $\varepsilon_{kn} > 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $n \geqslant 1$, удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{kn}^2 < \infty. \tag{3}$$

Обозначим через $d_{kn}(\zeta, w)$ следующую функцию:

$$d_{kn}(\zeta, w) = 1 + \frac{1}{2^n \sqrt{\delta((\zeta, w), (\zeta'_k, w'_k)) \cdot \delta((\zeta, w), (\zeta''_k, w''_k))}}, \tag{3$'$}$$

$$\text{где } \delta((\zeta, w), (\widetilde{\zeta}, \widetilde{w})) = \sqrt{|\zeta - \widetilde{\zeta}|^2 + |w - \widetilde{w}|^2}. \tag{3$''$}$$

Пусть $F_k \in C(\sigma_k)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что для* $n = 1, 2, \dots$ *найдутся полиномы* $\mathsf{P}_{2^n}(\zeta, \omega)$*,* $\deg \mathsf{P}_{2^n} \leqslant 2^n$*, и постоянная* C_0*, не зависящая от* n*, такие, что справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\sigma_k} \left| \frac{F_k(\zeta, w) - \mathsf{P}_{2^n}(\zeta, w)}{\varepsilon_{kn} \widetilde{\rho}_{2^{-n}}(\zeta, w)} \right|^{p_k} d_{kn}(\zeta, w) dl_k(\zeta, w) \leqslant C_0. \tag{4}$$

Тогда
$$\frac{dF_k}{dl_k} \in L^{p_k}(\sigma_k). \tag{5}$$

Учитывая оценки функции $\widetilde{\rho}_{2^{-n}}(\zeta, w)$, которые будут получены в дальнейшем, из теоремы 1 можно вывести следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\frac{1}{2} < q_k < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant m$. *Предположим, что для любого* $n = 1, 2, \dots,$ *найдутся полиномы* $\mathsf{P}_{2^n}(\zeta, w)$, $\deg \mathsf{P}_{2^n} \leqslant 2^n$, *и постоянная* C_0', *не зависящая от* n, *такие, что справедливо соотношение*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\sigma_k} \left| \frac{F_k(\zeta, w) - \mathsf{P}_{2^n}(\zeta, w)}{\widetilde{\rho}_{2^{-n}}(\zeta, w) \left(\log \left(\frac{1}{\widetilde{\rho}_{2^{-n}}(\zeta, w)} + 1 \right) \right)^{-q_k}} \right| d_{kn}(\zeta, w) dl_k(\zeta, w) \leqslant C_0'. \tag{6}$$

Тогда
$$\frac{dF_k}{dl_k} \in L^{p_k}(\sigma_k). \tag{7}$$

Доказательства теорем 1 и 2 будут проведены с использованием отображения $T(z)$.

Пусть $f_k(z) = F_k(T(z))$, $z \in s_k, 1 \leqslant k \leqslant m$. Теорема 1 эквивалентна следующему утверждению.

Теорема $1'$. *Предположим, что найдутся полиномы* $\mathsf{P}_{2^n}(\zeta, \omega)$, $\deg \mathsf{P}_{2^n} \leqslant 2^n, n = 1, 2, \dots,$ *и постоянная* C_*, *не зависящие от* n, *такие, что справедливо соотношение*
$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(z) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{kn} \rho_{2^{-n}}(z)} \right|^{p_k} d_{kn}(T(z)) |dz| \leqslant C_*. \tag{4$'$}$$

Тогда
$$\left| \frac{df_k}{|dz|} \right| \in L^{p_k}(s_k). \tag{5$'$}$$

В (5$'$) $\dfrac{df_k(z)}{|dz|} \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{f_k(z + \delta e^{i\theta_k}) - f_k(z)}{\delta}$, где $z \in s_k = [a_k, b_k]$ и $\theta_k = \arg(b_k - a_k)$.

Аналогично переформулируется теорема 2 с заменой знаменателя в (6) на $\rho_{2^{-n}}(z) \left(\log \left(\dfrac{1}{\rho_{2^{-n}}(z)} + 1 \right) \right)^{-q_k}$.

§2. Предварительные результаты

Предположим, что $m \geqslant 2$. Обозначим через $g_k(z)$ функцию Грина области $\mathbb{C}\backslash s_k$ с логарифмическим полюсом в бесконечности, и пусть $L_{hk} = \{z \in \mathbb{C}\backslash s_k : g_k(z) = h\}, h > 0$. Выберем $h_1 > 0$ так, чтобы $L_{h_1k} \cap s_l = \varnothing, k \neq l$, и чтобы внутри эллипса L_{h_1k} лежал отрезок s_k, а любой отрезок $s_l, l \neq k$, лежал вне его, $1 \leqslant k \leqslant m$. Пусть

$$d = \min_{z \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} L_{h_1k}} g(z), \quad d > 0.$$

Тогда для z, лежащих внутри L_{h_1k} и $z \notin s_k$ справедливы соотношения

$$g(z) \leqslant g_k(z) \leqslant \frac{h_1}{d} g(z). \tag{8}$$

Из оценок (8) находим, что при $0 < h \leqslant h_2, h_2 = \min(h_0, h_1, d)$, при $z \in s_k$ выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(z, L_{hk}) \leqslant \operatorname{dist}(z, L_h) \leqslant \operatorname{dist}(z, L_{\frac{dh}{h_1},k}), \quad z \in s_k. \tag{9}$$

Положим $\rho_{hk}(z) = \operatorname{dist}(z, L_{hk})$ при $0 < h \leqslant h_1$, $\rho_{hk}(z) = 1$ при $h > h_1$. Соотношение (9) влечёт, что с постоянными $\widetilde{c} > 0, \widetilde{c}' > 0$, не зависящими от h, выполнено соотношение

$$\widetilde{c}\rho_{hk}(z) \leqslant \rho_h(z) \leqslant \widetilde{c}' \rho_{hk}(z), \quad z \in s_k. \tag{10}$$

Из неравенств (10) и (4′) находим, что

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(z) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{kn} \rho_{2^{-n},k}(z)} \right|^{p_k} d_{kn}(T(z))|dz| \leqslant \widetilde{C_*}. \tag{11}$$

Пусть $A_k(\xi) = \alpha_k \xi + \beta_k$ – такое отображение, что $A_k([-1,1]) = s_k$. Положим $\wp_k(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \wp(A_k(\xi))$, тогда $\wp'_k(\xi) = \alpha_k \wp'(A_k(\xi))$. Определим $\mathsf{P}_{02^n}(\wp_k(\xi), \wp'_k(\xi)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}_{2^n}(\wp(A_k(\xi)), \wp'(A_k(\xi)))$, $f_{0k}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f_k(A_k(\xi))$.

Тогда

$$\int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(z) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{kn} \rho_{2^{-n},k}(z)} \right|^{p_k} d_{kn}(T(z))|dz|$$
$$= |\alpha_k| \int\limits_{-1}^{1} \left| \frac{f_{0k}(\xi) - \mathsf{P}_{02^n}(\wp_k(\xi), \wp'_k(\xi))}{\varepsilon_{kn} \rho_{2^{-n},k}(A_k(\xi))} \right|^{p_k} d_{kn}(T(A_k(\xi)))d\xi. \tag{12}$$

Пусть $g_0(\xi) = \log|\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}|$ – функция Грина области $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ с логарифмическим полюсом в бесконечности, $L_{h0} = \{\xi \in \mathbb{C} \setminus [-1,1] : g_0(\xi) = h\}, \rho_{h0}(\xi) = \operatorname{dist}(\xi, L_{h0}), \xi \in [-1,1]$.

Тогда $g_k(z) = g_k(A_k(\xi)) = g_0(\xi)$ и $L_{hk} = A_k(L_{h0})$, поэтому $\rho_{hk}(A_k(\xi)) = |\alpha_k|\rho_{h0}(\xi)$. Из этого равенства и соотношений (11) и (12) следует, что существует постоянная $\widetilde{c_k}$, не зависящая от n, такая, что при $k = 1, \ldots, m$ справедлива оценка

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f_{0k}(\xi) - \mathsf{P}_{02^n}(\wp_k(z), \wp_k'(z))}{\varepsilon_{kn}\rho_{2^{-n},0}(\xi)} \right|^{p_k} d_{kn}(T(A_k(\xi)))d\xi \leqslant \widetilde{c_k}. \qquad (13)$$

Поскольку включение $\frac{df_k}{dt_k} \in L^{p_k}(s_k)$ эквивалентно соотношению $f_{0k}'(\xi) \in L^{p_k}([-1,1])$, достаточно проверить, что из (13) следует последнее соотношение.

Функция $\wp_k(\xi) = \wp(A_k(\xi))$ – двояко-периодическая функция. Поскольку дальнейшие рассуждения будут проведены при любом k, мы упростим обозначения: вместо $\wp_k$ пишем Ψ, вместо f_{0k} пишем $f, f : [-1,1] \to \mathbb{C}$, вместо P_{02^n} пишем P_{2^n}, вместо ρ_{h0} пишем ρ_h, вместо аргумента ξ пишем x.

§3. Доказательство теоремы 1

Пусть Z – множество полюсов функции $\wp_k(z)$, $2\delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{x\in[-1,1]} \operatorname{dist}(x, z)$. Обозначим через $s(x)$, $x \in [-1,1]$, следующее множество:

$$s(x) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1] : \operatorname{dist}(z, [-1,1]) \geqslant \frac{1}{2}|z - x| \text{ и } |z - x| \leqslant \delta_0\}. \quad (14)$$

Нам понадобится следующий результат Е. М. Дынькина [2].

Теорема В. *Пусть* $f \in C([-1,1]), 1 < p < \infty$. *Для того, чтобы* $f' \in L^p([-1,1])$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало продолжение* F *функции* f *на всю плоскость* $\mathbb{C}$ *со свойствами*

$$F\,|_{[-1,1]} = f, \quad F \in C^1(\mathbb{C} \setminus [-1,1]), \qquad (15)$$

$$\int_{-1}^{1} \left| \int_{s(x)} \left| \frac{F'_{\overline{z}}(z)}{\operatorname{dist}(z, [-1,1])} \right|^2 dA(z) \right|^{\frac{p}{2}} dx < \infty. \qquad (16)$$

Во внутреннем интеграле $dA(z)$ *означает двумерную меру Лебега.*

Целью дальнейших рассуждений является построение продолжения для функции f, удовлетворяющего условию (16). Обозначим $B_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$, $\Omega_h = \{z \in \mathbb{C} : h \leqslant g_0(z) \leqslant 2h\}$. Существует абсолютная постоянная $c_0, 0 < c_0 \leqslant \frac{1}{4}$, такая, что для $z_0 \in \Omega_h$ и $d_0(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} c_0 \operatorname{dist}(z_0, [-1,1])$ выполняется соотношение: либо $\overline{B}_{d_0(z_0)}(z_0) \subset \Omega_h$, либо $\overline{B}_{d_0(z_0)}(z_0) \subset \Omega_h \bigcup \Omega_{\frac{h}{2}}$, либо $\overline{B}_{d_0(z_0)}(z_0) \subset \Omega_h \bigcup \Omega_{2h}$, то есть $\overline{B}_{d_0(z_0)}(z_0)$ пересекает не более двух из множеств $\Omega_{\frac{h}{2}}, \Omega_h, \Omega_{2h}$.

Положим

$$K_0(z) = \begin{cases} \beta e^{-\frac{1}{1-|z|^2}}, & |z| < 1 \\ 0, & z \geqslant 1, \end{cases} \qquad \int\limits_{\mathbb{C}} K_0(z) dA(z) = 1. \tag{17}$$

Соотношение (17) задаёт β. Пусть

$$K(z,w) = \frac{1}{d_0^2(z)} K_0\left(\frac{|w-z|}{d_0(z)}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1], \quad w \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{C}} K(z,w) dA(w) = \int\limits_{\mathbb{C}} K_0(|w-z|) dA(w) = 1. \tag{19}$$

Определения (17) и (18) влекут, что для любой функции $q(z)$, аналитичной в окрестности круга $\overline{B}_{d_0(z_0)}(z_0)$, справедливо равенство

$$q(z_0) = \int\limits_{B_{d_0(z_0)}(z_0)} q(w) K(z_0, w) dA(w) = \int\limits_{\mathbb{C}} q(w) K(z_0, w) dA(w). \tag{20}$$

Заметим, что существует число $n_0 \geqslant 0$ такое, что $\Omega_{2^{-n_0}} \subset A_k(\overline{Q}_t)$. Определим функции F_1 и F следующим образом:

$$F_1(z) = \begin{cases} \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z)), & \text{если } \ z \in \Omega_{2^{-n}}, \ z \notin \Omega_{2^{-n+1}}, \ n \geqslant n_0, \\ 0, & \text{если } \ z \notin \bigcup\limits_{n \geqslant n_0} \Omega_{2^{-n}}, \end{cases} \tag{21}$$

$$F(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} F_1(w) K(z,w) dA(w). \tag{22}$$

Лемма. *Функция F, определённая в* (21) *и* (22), *является непрерывным продолжением функции f на $\mathbb{C}$.*

Предположим далее, что утверждение леммы выполнено. Доказательство леммы слегка отложим. После нижеследующих оценок функции $F'_{\overline{z}}(z)$ мы применим теорему B и получаем доказательство теоремы 1.

Пусть $z \in \Omega_{2^{-n}}$. Обозначим $T_n(z) = \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z))$. Из соотношения (20) находим, что

$$0 = T'_{n\overline{z}}(z) = \left(\int\limits_{\mathbb{C}} T_n(w) K(z,w) dA(w)\right)'_{\overline{z}} = \int\limits_{\mathbb{C}} T_n(w) K'_{\overline{z}}(z,w) dA(w). \quad (23)$$

Теперь для $z \in \Omega_{2^{-n}}$ из (21) и (22) заключаем, что

$$|F'_{\overline{z}}(z)| = |(F - T_n)'_{\overline{z}}(z)| = \left|\int\limits_{\mathbb{C}} F_1(w) K'_{\overline{z}}(z,w) dA(w) - \int\limits_{\mathbb{C}} T_n(w) K'_{\overline{z}}(z,w) dA(w)\right|$$

$$= \left|\int\limits_{\mathbb{C}} (F_1(w) - T_n(w)) K'_{\overline{z}}(z,w) dA(w)\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} |F_1(w) - T_n(w)| \operatorname{grad}_z K(z,w) dA(w)$$

$$= \int\limits_{\overline{B}_{d_0(z)}(z)} |F_1(w) - T_n(w)| \operatorname{grad}_z K(z,w) dA(w). \quad (24)$$

Заметим, что $\operatorname{grad} d_0(z) \leqslant c, z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Тогда (17) и (18) влекут при

$$w \in \overline{B}_{d_0(z)}(z), z = x + iy:$$

$$\begin{aligned} K'_x(z,w) &= \left(\frac{1}{d_0^2(z)} K_0\left(\frac{|w-z|}{d_0(z)}\right)\right)'_x \\ &= -\frac{2d'_{0x}(z)}{d_0^3(z)} K_0\left(\frac{|w-z|}{d_0(z)}\right) + \frac{1}{d_0^2(z)} K'_0\left(\frac{|w-z|}{d_0(z)}\right) \cdot \left(\frac{|w-z|}{d_0(z)}\right)'_x \\ &= -\frac{2d'_{0x}(z)}{d_0^3(z)} K_0\left(\frac{|w-z|}{d_0(z)}\right)\left(\frac{|w-z|}{d_0(z)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{d_0^2(z)} K'_0\left(\frac{|w-z|'_x}{d_0(z)} - \frac{|w-z|}{d_0^2(z)} d'_{0x}(z)\right), \end{aligned}$$

поэтому, учитывая, что $\dfrac{|w-z|}{d_0^2(z)} \geqslant c\dfrac{1}{d_0(z)}$, находим оценку $|K'_x(z,w)| \leqslant \dfrac{c}{d_0^3(z)}$ и аналогично $\left|K'_y(z,w)\right| \leqslant \dfrac{c}{d_0^3(z)}$. Поэтому $\operatorname{grad}_z K(z,w) \leqslant \dfrac{c}{d_0^3(z)}$

при $w \in \overline{B}_{\overline{d_0(z)}}(z)$ и $\operatorname{grad}_z K(z,w) = 0$ при $w \notin \overline{B}_{d_0(z)}(z)$. Следовательно, формула (24) влечёт неравенство

$$|F'_{\overline{z}}(z)| \leqslant \frac{c}{d_0^3(z)} \int\limits_{B_{d_0(z)}(z)} |F_1(w) - T_n(w)| dA(w). \tag{25}$$

При $z \in \Omega_{2^{-n}}$ в силу выбора постоянной c_0 имеем включение

$$\overline{B}_{d_0(z)}(z) \subset \Omega_{2^{-n-1}} \bigcup \Omega_{2^{-n}} \bigcup \Omega_{2^{n+1}},$$

поэтому при $w \in \overline{B}_{d_0(z)}(z)$ величина $F_1(w)$ может принимать одно из значений $T_{n-1}(w), T_n(w), T_{n+1}(w), 0$. Если $F_1(w) = 0$, то $z \in \Omega_{2^{-n_0}}$, и оценка (25) влечёт $|F'_{\overline{z}}| \leqslant \text{const}$. Поэтому далее полагаем, что $F_1(w)$ принимает одно из значений $T_{n-1}(w), T_n(w), T_{n+1}(w)$. Положим $q_n \stackrel{\text{def}}{=} T_{n+1} - T_n$.

Из оценки (25) при $n > n_0$ получаем неравенство

$$|F'_{\overline{z}}(z)| \leqslant \frac{c}{\operatorname{dist}^3(z, [-1,1])} \int\limits_{B_{d_0(z)}(z)} (|q_n(w)| + |q_{n-1}(w)|) dA(w). \tag{26}$$

Из геометрических соображений и выбора числа c_0 следует, что существует такая абсолютная постоянная c_1, что при $z \in \Omega_{2^{-n}} \cap s(x_0)$, $x_0 \in [-1,1]$ выполнено соотношение $\operatorname{dist}(z, [-1,1]) \geqslant c_1 |z - x_0|$. Обозначим через $G_n(x_0)$, $x_0 \in [-1,1]$, $n \geqslant n_0$, следующее множество:

$$G_n(x_0) = \{z \in \Omega_{2^{-n-1}} \cup \Omega_{2^{-n}} \cup \Omega_{2^{-n+1}} : \operatorname{dist}(z, [-1,1]) \geqslant c_1 |z - x_0|\}. \tag{27}$$

Построение (27) множества $G_n(x_0)$ показывает, что при $z \in \Omega_{2^{-n}} \cap s(x_0), x_0 \in [-1,1]$ имеется включение $\overline{B}_{d_0(z)}(z) \subset G_n(x_0)$. Тогда соотношение (26) для таких z влечёт оценку

$$|F'_{\overline{z}}(z)| \leqslant \frac{c}{\operatorname{dist}^3(z, [-1,1])} \int\limits_{G_n(x_0)} (|q_n(w)| + |q_{n-1}(w)|) dA(w). \tag{28}$$

Далее, при $z \in \Omega_{2^{-n}} \cap s(x_0)$ и $w \in G_n(x_0)$ выполнено соотношение $\operatorname{dist}(z, [-1,1]) \asymp \operatorname{dist}(w, [-1,1])$, поэтому из неравенства (28) находим, что при $z \in \Omega_{2^{-n}} \cap s(x_0)$ выполняется оценка

$$\left| \frac{F'_{\overline{z}}(z)}{\operatorname{dist}(z, [-1,1])} \right| \leqslant c \int\limits_{G_n(x_0)} \left(\frac{|q_n(w)|}{\operatorname{dist}^4(w, [-1,1])} + \frac{|q_{n-1}(w)|}{\operatorname{dist}^4(w, [-1,1])} \right) dA(w). \tag{29}$$

Из (29) получаем соотношение

$$\int\limits_{\Omega_{2^{-n}}\cap s(x_0)} \left(\frac{F'_{\overline{z}}(z)}{\operatorname{dist}(z,[-1,1])}\right)^2 dA(z)$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_{G_n(x_0)} \frac{|q_n(w)|+|q_{n-1}(w)|}{\operatorname{dist}^4(w,[-1,1])}dA(w)\right)^2 \int\limits_{\Omega_{2^{-n}}\cap s(x_0)} 1dA(z)$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_{G_n(x_0)} \frac{|q_n(w)|+|q_{n-1}(w)|}{\operatorname{dist}^4(w,[-1,1])}dA(w)\right)^2 \cdot \operatorname{dist}^2(z_0,[-1,1])$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_{G_n(x_0)} \frac{|q_n(w)|+|q_{n-1}(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^2 \overset{\text{def}}{=} c\Phi_n(x_0). \qquad (30)$$

В (30) число $z_0 = z_0^{(n)}(x_0) \in \Omega_{2^{-n}} \cap s(x_0)$ наиболее близко к $[-1,1]$. Также мы воспользовались тем обстоятельством, что при $w \in G_n(x_0)$ имеется соотношение $\operatorname{dist}(w,[-1,1]) \asymp \operatorname{dist}(z_0,[-1,1])$. Из оценки (30) находим, что

$$\int\limits_{s(x_0)} \left|\frac{F'_{\overline{z}}(z)}{\operatorname{dist}(z,[-1,1])}\right|^2 dA(z) = \sum_{n=n_0-1}^{\infty} \int\limits_{s(x_0)\bigcap\Omega_{2^{-n}}} \left|\frac{F'_{\overline{z}}(z)}{\operatorname{dist}(z,[-1,1])}\right|^2 dA(z)$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0-1}^{\infty} \Phi_n(x_0). \qquad (31)$$

Применяя к соотношению (31) неравенство Минковского, получаем оценку

$$\left(\int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{s(x)} \left|\frac{F'_{\overline{z}}(z)}{\operatorname{dist}(z,[-1,1])}\right|^2 dA(z)\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant c\left(\int\limits_{-1}^{1}\left(\sum_{n=n_0-1}^{\infty}\Phi_n(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\leqslant c\sum_{n=n_0-1}^{\infty}\left(\int\limits_{-1}^{1}\left(\Phi_n(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{2}{p}}. \qquad (32)$$

Далее находим соотношения

$$\left(\int_{-1}^{1}(\Phi_n(x))^{\frac{p}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{p}} = \left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|+|q_{n-1}(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^p dx\right)^{\frac{2}{p}}$$
$$\leqslant c\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^p dx\right)^{\frac{2}{p}}$$
$$+\,c\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{G_n(x)}\frac{|q_{n-1}(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^p dx\right)^{\frac{2}{p}}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} cI_{n_1}+cI_{n_2}. \quad (33)$$

Оценки величин I_{n_1} и I_{n_2} проходят аналогично и дают одну и ту же границу сверху, поэтому ограничимся оценкой величины I_{n_1}. Применяя неравенство Гёльдера, получим неравенство

$$\left(\int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^p$$
$$\leqslant \int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|^p}{\operatorname{dist}^{3p}(w,[-1,1])}dA(w)\cdot\left(\int_{G_n(x)}1dA(w)\right)^{p-1}$$
$$\leqslant c(\operatorname{dist}^2(z_0^{(n)}(x),[-1,1]))^{p-1}\cdot\int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|^p dA(w)}{\operatorname{dist}^{3p}(w,[-1,1])}$$
$$\leqslant c\int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|^p}{\operatorname{dist}^{p+2}(w,[-1,1])}dA(w)\stackrel{\text{def}}{=} cU_n^*(x). \quad (34)$$

В (34) $z_0^{(n)}(x)\in G_n(x), \operatorname{dist}(z_0^{(n)}(x),[-1,1]) = \min\limits_{z\in G_n(x)}\operatorname{dist}(z,[-1,1])$. Введём обозначение $\zeta=\varphi(z)=z+\sqrt{z^2-1}, z\in\mathbb{C}\setminus[-1,1], z=\psi(\zeta)=$

$\frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$. Пусть $T = \partial D$, где D – единичный круг. Имеем соотношение

$$2\int_{-1}^{1} U_n^*(x)dx = \int_T U_n^*(z(\zeta))|dz(\zeta)| = \int_T U_n^*(z(\zeta))|z'(\zeta)||d\zeta|$$
$$= \int_T U_n^*(z(\zeta)) \cdot \frac{1}{2}|1 - \frac{1}{\zeta^2}||d\zeta|. \quad (35)$$

Далее получаем

$$\int_{G_n(x)} \frac{|q_n(w)|^p}{\operatorname{dist}^{p+2}(w, [-1,1])} dA(w) = \int_{\varphi(G_n(x))} \frac{|q_n(\varphi(\zeta))|^p |\varphi'(\zeta)|^2}{\operatorname{dist}^{p+2}(\psi(\zeta), [-1,1])} dA(\zeta). \quad (36)$$

Согласно [3, глава 1], имеется эквивалентность

$$\operatorname{dist}(\psi(\zeta), [-1,1]) \asymp |\psi'(\zeta)| \cdot \operatorname{dist}(\zeta, T), \quad (37)$$

поэтому, учитывая, что при $\zeta \in \varphi(G_n(x))$ выполнено соотношение $\operatorname{dist}(\zeta, T) \asymp 2^{-n}$, и используя формулу (37), получаем неравенство

$$\int_{\varphi(G_n(x))} \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{\operatorname{dist}^{p+2}(\psi(\zeta), [-1,1])} |\psi'(\zeta)|^2 dA(\zeta)$$
$$\leqslant c \int_{\varphi(G_n(x))} \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\zeta)|^{p+2}} |\psi'(\zeta)|^2 dA(\zeta)$$
$$= c \int_{\varphi(G_n(x))} \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\zeta)|^p} dA(\zeta). \quad (38)$$

Мы проводим рассуждения, предполагая, что для какого-то k выполнено соотношение $A_k(s_k) = [-1,1]$. Для краткости далее полагаем $\varepsilon_n = \varepsilon_{kn}$ и пусть число $R = R_k > 1$ таково, что $\psi(R_k\overline{D}) \subset A_k(Q)$. В [1] было установлено, что существуют постоянные c_2 и c_2', не зависящие от n, такие, что при $z \in \psi(RT)$ справедливо неравенство

$$|q_n(z)| \leqslant c_2' e^{c_2 2^n}. \quad (38')$$

Пусть $\varphi_+(x) \in T$, $\varphi_-(x) \in T$, $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Im}\varphi_-(x) \leqslant 0$, $\operatorname{Im}\varphi_+(x) \geqslant 0$, $\psi(\varphi_-(x)) = x$, $\psi(\varphi_+(x)) = x$. Из определения функций φ и ψ следует, что существует постоянная $c_3 > 0$, не зависящая от x, такая, что для $\zeta \in \varphi(s(x))$, а также при $\psi(\varphi_-(x)) = x$, $\operatorname{Im}\varphi_-(x) \leqslant 0$ и $|\zeta - \varphi_-(x)| \geqslant$

$|\zeta-\varphi_+(x)|$ выполнено $\operatorname{dist}(\zeta,T)\geqslant c_3|\zeta-\varphi_-(x)|$, то есть существует $c_4>0$ такое, что для множества $\varphi(s(x))\cap R\overline{D}$ справедливо включение

$$\varphi(s(x))\cap R\overline{D}\subset\sigma_{c_4}(\zeta)\cup\sigma_{c_4}(\overline{\zeta}),\text{где } \psi(\zeta)=\psi(\overline{\zeta})=x \tag{39}$$

и

$$\sigma_{c_4}(\zeta_0)=\{\zeta\in R\overline{D}\setminus D:\operatorname{dist}(\zeta,T)\geqslant c_4|\zeta-\zeta_0|\}. \tag{40}$$

Предположим, не умаляя общности, что $\varphi(L_{2^{-n_0+1}})\subset R\overline{D}$.

Из включения (39) получается неравенство

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\varphi(G_n(x))}\frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\zeta)|^p}dA(\zeta)\\ &\qquad\leqslant\int\limits_{\sigma_{c_4}(\zeta)\cap\{\zeta:1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant1+2^{-n+1}\}}\frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\zeta)|^p}dA(\zeta)\\ &\qquad\quad+\int\limits_{\sigma_{c_4}(\overline{\zeta})\cap\{\overline{\zeta}:1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant1+2^{-n+1}\}}\frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\zeta)|^p}dA(\zeta).\end{aligned}\tag{41}$$

Из соотношений (37) и (41) заключаем, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_T\left(\int\limits_{\varphi(G_n(x(\zeta)))}\frac{|q_n(\psi(\xi))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\xi)|^p}dA(\xi)\right)\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\zeta^2|}\right)|d\zeta|\\ &\leqslant\int\limits_{\varphi(T)}\left(\int\limits_{\sigma_{c_4}(\zeta)\cap\{\zeta:1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant1+2^{-n+1}\}}\frac{|q_n(\psi(\xi))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\xi)|^p}dA(\xi)\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\zeta^2|}\right)|d\zeta|\\ &+\int\limits_T\left(\int\limits_{\sigma_{c_4}(\overline{\zeta})\cap\{\zeta:1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant1+2^{-n+1}\}}\frac{|q_n(\psi(\xi))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\xi)|^p}dA(\xi)\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\zeta^2|}\right)|d\zeta|\\ &=2\int\limits_T\left(\int\limits_{\sigma_{c_4}(\zeta)\cap\{\zeta:1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant1+2^{-n+1}\}}\frac{|q_n(\psi(\xi))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\xi)|^p}dA(\xi)\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\zeta^2|}\right)|d\zeta|\\ &=2\int\limits_T\left(\int\limits_{\sigma_{c_4}(\zeta)\cap\{\zeta:1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant1+2^{-n+1}\}}\frac{|q_n(\psi(\xi))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\xi)|^p}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{|\zeta^2|}\right)dA(\xi)\right)|d\zeta|.\end{aligned}\tag{42}$$

При $1 < |\xi| < R$, $\xi \in \sigma_{c_4}(\zeta)$ выполнено соотношение $\dfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right) \leqslant c|\psi'(\xi)|$, поэтому правая часть неравенства (42) не превосходит величины

$$c\int\limits_T \left(\int\limits_{\sigma_{c_4}(\zeta)\cap\{\zeta:1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant 1+2^{-n+1}\}} \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\zeta)|^{p-1}} dA(\zeta)\right)|d\zeta|$$
$$\leqslant c \int\limits_{1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant 1+2^{-n+1}} \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+2)}|\psi'(\zeta)|^{p-1}} \cdot 2^{-n} dA(\zeta)$$
$$= c \int\limits_{1+2^{-n-2}\leqslant|\zeta|\leqslant 1+2^{-n+1}} \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{2^{-n(p+1)}|\psi'(\zeta)|^{p-1}} \cdot dA(\zeta). \quad (43)$$

§4. Гармонические функции в кольце $D(1, R)$

Обозначим через $D(1, R)$ кольцо $\{\zeta \in \mathbb{C} : 1 < |\zeta| < R\}$ и определим следующие функции U_n и V_n, гармонические в $D(1, R)$ и непрерывные в $D(1, R)$, задавая их значения на границе $D(1, R)$:

$$U_n(\zeta) = \begin{cases} c_5 \cdot 2^n, & |\zeta| = R, \\ 0, & |\zeta| = 1, \end{cases} \quad (44)$$

$$V_n(\zeta) = \begin{cases} 0, & |\zeta| = R, \\ \log\left(\dfrac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}\right), & |\zeta| = 1. \end{cases} \quad (45)$$

Принимая во внимание оценку $(38')$, $|q_n(z)| \leqslant c_2' e^{c_2 \cdot 2^n}$ при $z \in RT$, в определении (44) выберем постоянную c_5, не зависящую от n, так, чтобы выполнялось соотношение

$$\log\left(\frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}\right) \leqslant c_5 \cdot 2^n, |\zeta| = R. \quad (46)$$

Теперь из определений (44) и (45), неравенства (46) и субгармоничности функции $\log\left(\dfrac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}\right)$ в кольце $D(1, R)$, получаем соотношение

$$\log\left(\frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}\right) \leqslant U_n(\zeta) + V_n(\zeta), \zeta \in D(1, R). \quad (47)$$

Далее, $U_n(\zeta) = (c_5 \cdot 2^n \log|\zeta|) \cdot \frac{1}{\log R}$, поэтому при $1 + 2^{-n-2} \leqslant |\zeta| \leqslant 1 + 2^{-n+1}$ с постоянной c_6, не зависящей от n, получаем неравенство

$$U_n(\zeta) \leqslant c_6, \tag{48}$$

и из (47) и (48) находим оценку

$$\log\left(\frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}\right) \leqslant V_n(\zeta) + c_6, 1 + 2^{-n-2} \leqslant |\zeta| \leqslant 1 + 2^{-n+1}. \tag{49}$$

Функция $q_n(z)$ аналитична в эллипсе с границей $\psi(RT)$, поэтому из (38′) получаем соотношение

$$|q_n(\psi(\zeta))| \leqslant c_2' e^{c_2 \cdot 2^n}, \quad |\zeta| = 1. \tag{50}$$

Обозначим через $v_n(\zeta) = \log|\Xi_n(\zeta)|$, где $\Xi_n(\zeta)$ – внешняя в $\mathbb{C} \setminus D$ функция, задаваемая формулой

$$|\Xi_n(\zeta)| = \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}, \quad |\zeta| = 1. \tag{51}$$

Постоянная c_5 в (46) выбрана так, что $\dfrac{c_2' \cdot e^{c_2 \cdot 2^n}}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}} \leqslant e^{c_5 \cdot 2^n}, n \geqslant 1, |\zeta| = R$, функция $\frac{1}{(\psi'(\zeta))^{p-1}}$ является внешней функцией в $\mathbb{C} \setminus D$, при $|\zeta| = R$ получаем соотношение с постоянной c_7, не зависящей от n:

$$v_n(\zeta) = \log|\Xi_n(\zeta)| \leqslant c_5 \cdot 2^n + c_7, |\zeta| = R, \tag{52}$$

то есть при $|\zeta| = R$ имеем оценку $v_n(\zeta) \leqslant U_n(\zeta) + c_7$. Определим функцию $\widetilde{U}_n(\zeta)$, гармоническую в $D(1, R)$ и непрерывную в $\overline{D(1, R)}$ следующим равенством на границе $D(1, R)$:

$$\widetilde{U}_n(\zeta) = \begin{cases} v_n(\zeta), & |\zeta| = R, \\ 0, & |\zeta| = 1. \end{cases} \tag{53}$$

Тогда для гармонической в $D(1, R)$ функции $v_n(\zeta) - V_n(\zeta)$ имеем соотношение

$$v_n(\zeta) - V_n(\zeta) = \begin{cases} v_n(\zeta), & |\zeta| = R, \\ 0, & |\zeta| = 1, \end{cases}$$

то есть $v_n(\zeta) - V_n(\zeta) = \widetilde{U}_n(\zeta)$ при $\zeta \in D(1, R)$.

Далее будем использовать для $a \in \mathbb{R}$ обозначение a_+, a_-,

$$a_+ = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

$$a_- = \begin{cases} a, & \text{если } a < 0, \\ 0, & \text{если } a \geqslant 0, \end{cases}$$

тогда $a = a_+ + a_-$. Применяя к эллипсу $\psi(RT)$ и субгармонической в нём функции $\log|q_n(z)|$ формулу с ядром Пуассона для эллипса, получаем неравенство

$$\log|q_n(z)| \leqslant \int\limits_{\varphi(RT)} \log|q_n(w)| P_e(z,w)|dw|. \tag{54}$$

Применяя свойства $P_e(z,w)$ [4], получаем, что существуют постоянные $c_7 > 0$ и $c_8 > 0$, не зависящие от z и n, такие, что при $z \in L_{2^{-n+1}}$ справедлива оценка

$$\log|q_n(z)| \leqslant c_7 \int\limits_{RT} \log_+ |q_n(\varphi(\zeta))||d\zeta| + c_8 \int\limits_{RT} \log_- |q_n(\varphi(\zeta))||d\zeta|. \tag{55}$$

Субгармоничность функции $\log|q_n(z)|$ влечёт, что оценка (55) справедлива и внутри эллипса $L_{2^{-n+1}}$.

§5. Окончание доказательства теоремы

Применяя оценку (38′), получаем соотношение

$$\log|q_n(z)| \leqslant 2\pi R \cdot c_7 \log(c_2' e^{c_2 \cdot 2^n}) + c_8 \int\limits_{RT} \log_- |q_n(\psi(\zeta))||dz|. \tag{56}$$

Из (56) следует, что для постоянной $c_9 < 0$, удовлетворяющей соотношению

$$2\pi R \cdot c_7 \cdot c_2 + c_8 \cdot c_9 = -1, \tag{57}$$

при условии

$$\int\limits_{RT} \log|q_n(\psi(t))||dt| \leqslant c_9 \cdot 2^n, \tag{58}$$

для $z \in L_{2^{-n+1}}$ будет выполняться неравенство $\log|q_n(z)| \leqslant 2\pi R \cdot c_7 \log c_2' - 2^n$, то есть в таком случае

$$|q_n(z)| \leqslant c \cdot e^{-2^n}. \tag{59}$$

Применяя соотношения (33), (34), (36), равенство (35) и оценки (41), (42), (43), (59), находим, что

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^p dx$$

$$\leqslant c\int_{1+2^{-n+1}\leqslant|\zeta|\leqslant 1+2^{-n-2}}\frac{e^{-2^n}}{2^{-n(p+1)}|\psi'(\zeta)|^{p-1}}dA(\zeta)$$

$$= ce^{-2^n}\cdot 2^{n(p+1)}\int_{1+2^{-n+1}}^{1+2^{-n-2}}tdt\int_{|\zeta|=t}\frac{|d\zeta|}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}$$

$$= ce^{-2^n}\cdot 2^{n(p+1)}\int_{1+2^{-n+1}}^{1+2^{-n-2}}tdt\int_{|\zeta|=t}\frac{|d\zeta|}{|\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)|^{p-1}}$$

$$\leqslant c\cdot e^{-2^n}\cdot 2^{n(p+1)}\cdot 2^{-n}\cdot 2^{n(p-2)} = c\cdot e^{-2^n}\cdot 2^{2n(p-1)}. \qquad (60)$$

Пусть $R_1=\sqrt{R}, 1<R_1<R$. Рассуждая аналогично проделанному при выводе формул (55)–(60), получаем, что существует постоянная $c_{10}<0$ такая, что в случае выполнения неравенства

$$\int_{R_1T}\log_-|q_n(\psi(t))||dt|\leqslant c_{10}\cdot 2^n \qquad (61)$$

будет выполняться оценка

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^p dx\leqslant c\cdot e^{-2^n}\cdot 2^{n(p-1)}. \qquad (62)$$

Предположим теперь, что неравенства (58) и (61) не выполняются, то есть справедливы соотношения

$$\int_{RT}\log_-|q_n(\psi(\zeta))||d\zeta|>c_9\cdot 2^n,\ \int_{R_1T}\log_-|q_n(\psi(\zeta))||d\zeta|>c_{10}\cdot 2^n. \qquad (63)$$

Пусть $\widetilde{v}_n(\zeta)$ – функция, гармоническая в кольце $D(1,R)$ с граничными значениями

$$\widetilde{v}_n(\zeta) = \log|q_n(\psi(\zeta))|, \quad |\zeta| = 1 \text{ или } |\zeta| = R. \tag{64}$$

Поскольку функция $\log|q_n(\psi(\zeta))|$ субгармонична в $D(1,R)$, справедливо соотношение $\log|q_n(\psi(\zeta))| \leqslant \widetilde{v}_n(\zeta), \zeta \in D(1,R)$, поэтому с учётом формулы (63) имеется оценка

$$\int\limits_{R_1T} \widetilde{v}_n(\zeta)|d\zeta| \geqslant \int\limits_{R_1T} \log|q_n(\psi(\zeta))||d\zeta| \geqslant \int\limits_{R_1T} \log_-|q_n(\psi(\zeta))||d\zeta| > c_{10} \cdot 2^n. \tag{65}$$

Применение ядра Пуассона для кольца $D(1,R)$ даёт равенство

$$\widetilde{v}_n(\zeta) = \int\limits_{T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)\widetilde{v}_n(t)|dt| + \int\limits_{RT} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)\widetilde{v}_n(t)|dt|$$
$$= \int\limits_{T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)\log|q_n(\psi(t))||dt| + \int\limits_{RT} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)\log|q_n(\psi(t))||dt|,$$

отсюда заключаем, что

$$\int\limits_{R_1T} \widetilde{v}_n(\zeta)|d\zeta| = \int\limits_{RT} \log|q_n(\psi(t))||dt| \left(\int\limits_{R_1T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|d\zeta|\right)$$
$$+ \int\limits_{T} \log|q_n(\psi(t))||dt| \left(\int\limits_{R_1T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|d\zeta|\right). \tag{66}$$

В силу формулы (66) и свойств ядра Пуассона $\mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)$ [4] имеется постоянная $\widetilde{c}_{11} > 0$ такая, что справедливы следующие оценки:

$$- \int\limits_{RT} \log|q_n(\psi(t))||dt| \left(\int\limits_{R_1T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|d\zeta|\right)$$
$$\geqslant - \int\limits_{RT} \log_+|q_n(\psi(t))||dt| \left(\int\limits_{R_1T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|d\zeta|\right)$$
$$\geqslant -\widetilde{c}_{11} \int\limits_{RT} \log_+|q_n(\psi(t))||dt| \geqslant -\widetilde{c}_{11} \cdot \log(c' e^{c_5' 2^n})$$

$$= -\widetilde{c}_{11} \cdot c_5' \cdot 2^n + c \stackrel{\text{def}}{=} -c_{11} \cdot 2^n + c, c_5' = \frac{1}{p} c_5. \quad (67)$$

Из (63) и (67) заключаем, что имеем соотношение

$$\int\limits_T \log |q_n(\psi(t))||dt| \left(\int\limits_{R_1 T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta, t)|d\zeta| \right) \geqslant -|c_{10}| \cdot 2^n - c_{11} \cdot 2^n - c$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} -c_{12} \cdot 2^n - c, c_{12} > 0. \quad (68)$$

Поскольку имеется равенство

$$\int\limits_T \log |\psi'(t)|^{p-1}|dt| = -2\pi(p-1)\log 2,$$

получаем

$$\int\limits_T |\log \frac{1}{|\psi'(t)|^{p-1}}||dt| \cdot \left(\int\limits_{R_1 T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta, t)|d\zeta| \right) \leqslant c,$$

тогда формула (68) влечёт

$$\int\limits_T \log \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}|dt| \left(\int\limits_{R_1 T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta, t)|d\zeta| \right) \geqslant -p \cdot c_{12} \cdot 2^n - c. \quad (69)$$

Из (46) следует неравенство $\log_+ \dfrac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}} \leqslant \log_+ \dfrac{2^{p-1} \cdot e^{c_5 \cdot 2^n}}{|\psi'(t)|^{p-1}}$.

Вновь применим свойства ядра $\mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta, t)$, получаем, что с некоторыми постоянными $c_{13} > 0$ и $c_{14} > 0$ выполняются неравенства

$$\int\limits_T |\log_+ \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}||dt| \left(\int\limits_{R_1 T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta, t)|d\zeta| \right)$$
$$\leqslant c_{13} \int\limits_T |\log_+ \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}||dt|, \quad (70)$$

$$\int\limits_T \log_- \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}|dt| \left(\int\limits_{R_1 T} \mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|d\zeta| \right) \leqslant c_{14} \int\limits_T \log_- \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}|dt|. \quad (71)$$

Оценки (46), (69), (70) и (71) влекут неравенство с постоянной $c_{15} > 0$:

$$\int\limits_T \log_- \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}|dt| \geqslant -c_{15} \cdot 2^n - c. \quad (72)$$

Из (72) заключаем, что

$$\int\limits_T \log \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}|dt| \geqslant \int\limits_T \log_- \frac{|q_n(\psi(t))|^p}{|\psi'(t)|^{p-1}}|dt| \geqslant -c_{15} \cdot 2^n - c. \quad (73)$$

Функция v_n гармонична в $\mathbb{C} \setminus D$, тогда формула (73) влечёт оценку

$$\int\limits_{RT} v_n(\zeta)|d\zeta| = R \int\limits_T v_n(\zeta)|d\zeta| = R \int\limits_T \log \frac{|q_n(\psi(\zeta))|^p}{|\psi'(\zeta)|^{p-1}}||d\zeta| \geqslant -Rc_{15} \cdot 2^n - c. \quad (74)$$

Применяя неравенство $(38')$ и пользуясь свойствами ядра Пуассона для области $\mathbb{C} \setminus D$, получаем, что с некоторой постоянной $c_{16} > 0$ справедливо неравенство

$$v_n(\zeta) \leqslant c_{16} \cdot 2^n, |\zeta| = R. \quad (75)$$

Тогда из (74) и (75) заключаем, что имеется соотношение

$$\int\limits_{RT} v_{n_-}(\zeta)|d\zeta| \geqslant -R \cdot c_{15} \cdot 2^n - c - \int\limits_{RT} v_{n_+}(\zeta)|d\zeta| \geqslant -c_{17} \cdot 2^n. \quad (76)$$

Применяя свойства ядра Пуассона для кольца $D(1,R)$, при $1 + 2^{-n-1} \leqslant |\zeta| \leqslant 1 + 2^{-n+2}$ для функции $\widetilde{U}_n(\zeta)$, определённой в (53), получаем оценку

$$\begin{aligned} -\widetilde{U}_n(\zeta) &= -\int\limits_{RT} \widetilde{U}_n(t)\mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|dt| \leqslant -\int\limits_{RT} \widetilde{U}_{n_-}(t)\mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|dt| \\ &= -\int\limits_{RT} v_{n_-}(t)\mathsf{P}_{D(1,R)}(\zeta,t)|dt| \leqslant -c_{18} \cdot 2^{-n} \int\limits_{RT} v_{n_-}(t)|dt| \\ &\leqslant c_{18} \cdot c_{17} \cdot 2^{-n} \cdot 2^n = c_{19}. \quad (77) \end{aligned}$$

Теперь из (77) для $1+2^{-n-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 1+2^{-n+2}$ находим

$$V_n(\zeta)=v_n(\zeta)-\widetilde{U}_n(\zeta)\leqslant v_n(\zeta)+c. \tag{78}$$

Применяя соотношения (36), (37), (38), (41)-(48), (51), (53), (78), получаем неравенства

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{G_n(x)}\frac{|q_n(w)|}{\operatorname{dist}^3(w,[-1,1])}dA(w)\right)^p dx \\
&\qquad\leqslant c\int\limits_{1+2^{-n-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 1+2^{-n+2}}\frac{e^{v_n(\zeta)}}{2^{-n(p+1)}}dA(w) \\
&=c\int\limits_{1+2^{-n-1}\leqslant|\zeta|\leqslant 1+2^{-n+2}}\frac{|\Xi_n(\zeta)|}{2^{-n(p+1)}}dA(\zeta)=c\int\limits_{1+2^{-n-1}}^{1+2^{-n+2}}tdt\left(\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{|\Xi_n(\zeta)|}{2^{-n(p+1)}}|d\zeta|\right) \\
&\quad\leqslant c\int\limits_{1+2^{-n-1}}^{1+2^{-n+2}}tdt\int\limits_{|\zeta|=1+2^{-n-1}}\frac{|\Xi_n(t)|}{2^{-n(p+1)}}|d\zeta|\leqslant c\int\limits_{|\zeta|=1+2^{-n-1}}\frac{|\Xi_n(t)|}{2^{-np}}|dt|.
\end{aligned}\tag{79}$$

В соотношениях (79) мы воспользовались свойством средних аналитических функций. Применяя определение (51) внешней в $\mathbb{C}\setminus D$ функции Ξ_n и определяя внешнюю в $\mathbb{C}\setminus D$ функцию $X_n(\zeta)$ равенством $|X_n(\zeta)|=|q_n(\psi(\zeta))|$ при $\zeta\in T$ и учитывая, что функция $\psi'(t)$ – внешняя в $\mathbb{C}\setminus D$, последний элемент в неравенствах (79) можно записать в виде

$$K_n\overset{\text{def}}{=}c\int\limits_{|\zeta|=1+2^{-n-1}}\frac{|X_n(\zeta)|^p}{2^{-np}|\psi'(\zeta)|^{p-1}}|d\zeta|.$$

Положим $\psi_n(\zeta)=\frac{1}{2}(\zeta-2^{-n}\frac{1}{\zeta})$, тогда при $|\zeta|=1+2^{-n-1}$ справедливо соотношение $|\psi'(\zeta)|\asymp|\psi_n'(\zeta)|$, поэтому, применяя свойство средних аналитических функций, получаем оценки

$$K_n \leqslant c \int\limits_{|\zeta|=1+2^{-n-1}} \frac{|X_n(\zeta)|^p}{2^{-np}|\psi_n'(\zeta)|^{p-1}}|d\zeta|$$

$$= c \int\limits_{|\zeta|=1+2^{-n-1}} \frac{1}{2^{-np}} \left|\frac{X_n(\zeta)}{(\psi_n'(\zeta))^{1-\frac{1}{p}}}\right|^p |d\zeta|$$

$$\leqslant c \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1}{2^{-np}} \left|\frac{X_n(\zeta)}{(\psi_n'(\zeta))^{1-\frac{1}{p}}}\right|^p |d\zeta| = c \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{|X_n(\zeta)|^p}{2^{-np}|\psi_n'(\zeta)|^{p-1}}|d\zeta|. \quad (80)$$

При $x \in [-1,1]$ выполняется соотношение

$$\left|\frac{\psi_n'(\varphi(x))}{\psi'(\varphi(x))}\right| \asymp 1 + \frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}},$$

поэтому формула (80) влечёт

$$c \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{|X_n(\zeta)|^p}{2^{-np}|\psi_n'(\zeta)|^{p-1}}|d\zeta| = c \int\limits_{|\zeta|=1} \left|\frac{X_n(\zeta)}{\psi_n'(\zeta)}\right|^p \cdot \frac{1}{2^{-np}} \cdot \left|\frac{\psi_n'(\zeta)}{\psi'(\zeta)}\right| \cdot |\psi'(\zeta)||d\zeta|$$

$$= c\int\limits_{-1}^{1} \frac{|q_n(\psi(\varphi(x)))|^p}{|2^{-n}\psi_n'(\varphi(x))|^p} \cdot \left|\frac{\psi_n'(\varphi(x))}{\psi'(\varphi(x))}\right| dx$$

$$\leqslant c\int\limits_{-1}^{1} \left|\frac{q_n(x)}{\rho_{2^{-n}(x)}}\right|^p \left(1 + \frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}}\right) dx. \quad (81)$$

Из определений $(3')$, $(3'')$ и соотношения (10) получаем формулу

$$d_{kn}(T(A_k(x))) \asymp 1 + \frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1]. \quad (81')$$

В оценках (81) мы воспользовались соотношением

$$2^{-n}\psi_n'(\varphi(x)) = 2^{-n-1}|1 + 2^{-n}\frac{1}{\varphi^2(x)}| \asymp \rho_{2^{-n}}(x).$$

Теперь из оценок (13), (33), (60), (81) и (81′) для случая, когда функция F, построенная в (21) и (22), является непрерывным продолжением на $\mathbb{C}$ функции f, получаем соотношение

$$\left(\int_{-1}^{1} (\Phi_n(x))^{\frac{p}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant c(2^{-\frac{2^{n+1}}{p}} \cdot 2^{4n\frac{p-1}{p}} + \varepsilon_{n-1}^2 + \varepsilon_n^2), \tag{82}$$

а тогда из (32), (33), (82) получаем, что

$$\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{s(x)}\left|\frac{F'_{\overline{z}}(z)}{\operatorname{dist}(z,[-1,1])}\right|^2 dA(z)\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon_n^2 + 2^{-\frac{2^{n+1}}{p}}\cdot 2^{4n\cdot\frac{p-1}{p}}) < \infty. \tag{83}$$

Таким образом, теорема 1′ в случае, когда функция F, построенная в (21) и (22), является непрерывным продолжением на $\mathbb{C}$ функции f, следует из (83) и теоремы B. Для завершения доказательства теоремы 1′ осталось доказать лемму.

§6. Доказательство леммы

Используя обозначения из (21) и (22), определим функции $F_{1n}(z)$ и $F_n(z)$ следующим образом:

$$F_{1n}(z) = \begin{cases} \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z)), & z \in A_k^{-1}\left(\bigcup\limits_{\nu=n}^{\infty}\Omega_\nu\right)\bigcup s_k, \\ \mathsf{P}_{2^\mu}(\wp(z), \wp'(z)), & z \in A_k^{-1}\left(\bigcup\limits_{\nu=n}^{\infty}\Omega_\mu\right),\ n_0-1 \leqslant \mu \leqslant n-1, \\ 0, & z \notin \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k^{-1}\left(\bigcup\limits_{\nu=n_0-1}^{\infty}\Omega_\mu\right). \end{cases} \tag{84}$$

Функцию $F_n(z)$ построим следующим образом: положим $\widetilde{F}_{1nk}(\zeta) = F_{1n}(A_k^{-1}(\zeta))$ и построим по функции $\widetilde{F}_{1nk}(\zeta)$ функцию $\widetilde{F}_{nk}(\zeta)$:

$$\widetilde{F}_{nk}(\zeta) = \int_{\mathbb{C}} \widetilde{F}_{1nk}(\zeta)K(\zeta, w)\,dA(w); \tag{85}$$

затем положим $F_n(z) = \widetilde{F}_{nk}(A_k(z)), z \in A_k^{-1}\left(\bigcup\limits_{\nu=n}^{\infty}\Omega_\nu\right)$.

Обозначим через $\omega_k(t)$ модуль непрерывности функции f_k на сегменте s_k. Пусть $z \in A_k^{-1}(\Omega_n)$, $z_0 \in s_k$, $|z_0 - z| \leqslant c_k \cdot 2^{-n}$ и пусть $z_* \in s_k, |z - z_*| = \mathrm{dist}(z, s_k)$. Тогда $|z - z_*| \leqslant |z - z_0| \leqslant c_k \cdot 2^{-n}$. Из определений (3′), (3″), соотношения (10) и определения отображений $A_k(\zeta)$ следует отношение

$$d_{kn}(T(z)) \asymp 1 + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{|z - a_k| \cdot |z - b_k|}}, z \in s_k. \tag{86}$$

Теперь из оценки (11) следует соотношение

$$\int\limits_{s_k} \left| \frac{\mathsf{P}_{2^\nu}(\wp(z), \wp'(z)) - \mathsf{P}_{2^{\nu-1}}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{k\nu}\rho_{2^{-\nu},k}(z)} \right|^{p_k} \times \left(1 + \frac{1}{2^\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{|z - a_k| \cdot |z - b_k|}}\right) |dz| \leqslant \widehat{c}_*. \tag{86′}$$

Напомним, что $L_{2^{-\nu},k} = A_k(L_{2^{-\nu}0})$. Аналогично тому, как ранее была получена оценка (81), из (86) находим соотношение

$$\begin{gathered}\int\limits_{L_{2^{-\nu+3},k}} \left| \frac{\mathsf{P}_{2^\nu}(\wp(z), \wp'(z)) - \mathsf{P}_{2^{\nu-1}}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{k\nu} \cdot \mathrm{dist}(z, s_k)} \right|^{p_k} |dz| \\ \leqslant c \int\limits_{s_k} \left| \frac{\mathsf{P}_{2^\nu}(\wp(z), \wp'(z)) - \mathsf{P}_{2^{\nu-1}}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{k\nu} \cdot \rho_{2^{-\nu},k}(z)} \right|^{p_k} \\ \times \left(1 + \frac{1}{2^\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{|z - a_k| \cdot |z - b_k|}}\right) |dz| \leqslant c \cdot \widehat{c}_* = \widehat{c}_{*1}. \end{gathered} \tag{87}$$

В соотношении (87) постоянные c и $\widehat{c}_*$ не зависят от k и ν. Положим $q_\nu(z) = \mathsf{P}_{2^\nu}(\wp(z), \wp'(z)) - \mathsf{P}_{2^{\nu-1}}(\wp(z), \wp'(z))$. Пусть z лежит внутри эллипса $L_{2^{-\nu+1},k}$. Тогда формула (87) влечёт соотношение (в котором $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k'} = 1$):

$$|q_\nu'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{2^{-\nu+3},k}} \frac{q_\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{L_{2^{-\nu+3},k}}\left|\frac{q_\nu(\zeta)}{\varepsilon_{k\nu}\cdot\operatorname{dist}(\zeta,s_k)}\right|^{p_k}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{p_k}}$$

$$\times\left(\int\limits_{L_{2^{-\nu+3},k}}\left|\frac{\varepsilon_{k\nu}\cdot\operatorname{dist}(\zeta,s_k)}{(\zeta-z)^2}\right|^{p'_k}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{p'k}}. \quad (88)$$

Теперь имеем оценку

$$\left(\int\limits_{L_{2^{-\nu+3},k}}\left|\frac{\varepsilon_{k\nu}\cdot\operatorname{dist}(\zeta,s_k)}{(\zeta-z)^2}\right|^{p'_k}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{p'_k}}=\varepsilon_{k\nu}\left(\int\limits_{L_{2^{-\nu+3},k}}\frac{\operatorname{dist}^{p'_k}(\zeta,s_k)}{|\zeta-z|^{2p'_k}}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{p'_k}}$$

$$\leqslant c\varepsilon_{k\nu}(\operatorname{dist}^{p'_k-1}(z,L_{2^{-\nu+3},k}))^{\frac{1}{p'_k}}=c\varepsilon_{k\nu}\operatorname{dist}^{\frac{1}{p_k}}(z,L_{2^{-\nu+3},k}). \quad (89)$$

Постоянная c_k выбрана так, чтобы точка z лежала внутри эллипса $L_{2^{-n+1},k}$. Пусть $\zeta\in[z,z_0]$. Тогда оценка (89) влечёт

$$|(\mathsf{P}_{2^n}(\wp(z_1),\wp'(z_1))'|_{z_1=\zeta}|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|q'_\nu(\zeta)|+|(\mathsf{P}_2(\wp(z_1),\wp'(z_1))'|_{z_1=\zeta}$$

$$\leqslant c\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varepsilon_{k\nu}}{\operatorname{dist}^{\frac{1}{p_k}}(\zeta,L_{2^{-\nu+3},k})}+c\leqslant c\frac{1}{\operatorname{dist}^{\frac{1}{p_k}}(\zeta,L_{2^{-n+3},k})}. \quad (90)$$

Геометрические свойства эллипсов $L_{2^{-n+3},k}$ и выбор точек z и z_0 дают соотношения

$$\operatorname{dist}(\zeta,L_{2^{-n+3},k})\asymp\operatorname{dist}(z_0,L_{2^{-n+3},k})\asymp\rho_{2^{-n+3},k}(z_0),\zeta\in[z_0,z]. \quad (91)$$

Поскольку $|z-z_0|\leqslant c\rho_{2^{-n+1},k}(z_0)\leqslant c\rho_{2^{-n+3},k}(z_0)$, формулы (88)–(91) влекут оценку

$$|(\mathsf{P}_{2^n}(\wp(z),\wp'(z))-\mathsf{P}_{2^n}(\wp(z_0),\wp'(z_0))|=\left|\int\limits_{z_0}^{z}(\mathsf{P}_{2^n}(\wp(\zeta),\wp'(\zeta)))'d\zeta\right|$$

$$\leqslant c\cdot\rho_{2^{-n+3},k}(z_0)\cdot\rho_{2^{-n+3},k}^{-\frac{1}{p_k}}(z_0)=c\rho_{2^{-n+3},k}^{-\frac{1}{p'_k}}(z_0). \quad (92)$$

Поскольку $|z_* - z_0| \leqslant |z_* - z| + |z - z_0| \leqslant |z_* - z| + c\rho_{2^{-n+1},k}(z_0)$, определение (84) и оценка (92) влекут

$$
\begin{aligned}
|F_{1n}(z) - f_k(z_*)| &\leqslant |F_{1n}(z) - F_{1n}(z_0)| + |F_{1n}(z_0) - f_k(z_*)| \leqslant \\
&\leqslant c\rho_{2^{-n+3},k}^{\frac{1}{p_k'}}(z_0) + |F_{1n}(z_0) - f_k(z_0)| + |f_k(z_0) - f_k(z_*)| \\
&\leqslant c\rho_{2^{-n+3},k}^{\frac{1}{p_k'}}(z_0) + \omega_k(|z_* - z| + c\rho_{2^{-n+1},k}(z_0)) + |F_{1n}(z_0) - f_k(z_0)|.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Рассмотрим промежуток $I_{kn}(z_0) \subset s_k$ такой, что $z_0 \in I_{kn}(z_0)$ и $|I_{kn}(z_0)| = \rho_{2^{-n+1},k}(z_0)$. В силу соотношений (12) и (13) получаем неравенство

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{I_{kn}(z_0)} \left| \frac{f_k(\zeta) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(\zeta), \wp'(\zeta))}{\varepsilon_{kn}\rho_{2^{-n},k}(\zeta)} \right|^{p_k} d_{kn}(\zeta)|d\zeta| \\
&\qquad\qquad \leqslant \int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(\zeta) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(\zeta), \wp'(\zeta))}{\varepsilon_{kn}\rho_{2^{-n},k}(\zeta)} \right|^{p_k} d_{kn}(\zeta)|d\zeta| \leqslant c.
\end{aligned}
\tag{94}
$$

Так как $d_{kn}(\zeta) \geqslant 1$, то (94) влечёт существование точки $\widetilde{z}_* \in I_{kn}(z_0)$ такой, что

$$
\rho_{2^{-n+1},k}(z_0) \left| \frac{f_k(\widetilde{z}_*) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(\widetilde{z}_*), \wp'(\widetilde{z}_*))}{\varepsilon_{kn}\rho_{2^{-n},k}(\widetilde{z}_*)} \right|^{p_k} \leqslant c. \tag{95}
$$

Так как при $\zeta \in I_{kn}(z_0)$ справедливо соотношение

$$
\rho_{2^{-n},k}(\zeta) \asymp \rho_{2^{-n},k}(z_0),
$$

то формула (95) даёт оценку

$$
|f_k(\widetilde{z}_*) - F_{1n}(\widetilde{z}_*)| \leqslant c\varepsilon_{kn}\rho_{2^{-n+1},k}^{\frac{1}{p_k'}}(z_0). \tag{96}
$$

Построение функции F_n показывает, что при $z \in s_k$ имеем $F_{1n}(z) = F_n(z)$, а для функции F_n в силу её определения лемма выполняется, поэтому для F_n справедлива доказанная часть теоремы $1'$, значит, верно соотношение $F_n' \in L^{p_k}(s_k)$, тогда формула (96) влечёт

$$|F_{1n}(\widetilde{z}_*) - F_{1n}(z_0)| = |F_n(\widetilde{z}_*) - F_n(z_0)| \leqslant \left(\int\limits_{[\widetilde{z}_*, z_0]} \left| \frac{dF_n(\zeta)}{d\zeta} \right|^{p_k} |d\zeta| \right)^{\frac{1}{p_k}}$$

$$\times |\widetilde{z}_* - z_0|^{\frac{1}{p_k'}} \leqslant |\widetilde{z}_* - z_0|^{\frac{1}{p_k'}} \leqslant c\rho_{2^{-n+1},k}^{\frac{1}{p_k'}}(z_0), \quad (97)$$

поэтому

$$|F_{1n}(z_0) - f_k(z_0)| \leqslant |F_{1n}(z_0) - F_{1n}(\widetilde{z}_*)| + |F_{1n}(\widetilde{z}_*) - f_k(\widetilde{z}_*)| + |f_k(\widetilde{z}_*) - f_k(z_0)|$$

$$\leqslant c\rho_{2^{-n+1},k}^{\frac{1}{p_k'}}(z_0) + c\varepsilon_{kn}\rho_{2^{-n+1},k}^{\frac{1}{p_k'}}(z_0) + \omega_k(\rho_{2^{-n+1},k}(z_0)). \quad (98)$$

Теперь из (93), (97) и (98) получаем, что $F_{1n}(z) \underset{z \to z_*}{\rightarrow} f_k(z_*)$, а тогда и $F(z) \underset{z \to z_*}{\rightarrow} f_k(z_*)$. Лемма и теоремы 1 и $1'$ доказаны.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Широкову Николаю Алексеевичу за оказанную помощь при проведении исследования и написании статьи.

Список литературы

1. М. А. Шагай, Н. А. Широков, *Приближение полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса на дизъюнктных отрезках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **527** (2023), 242–255.
2. Е. М. Дынькин, *Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова.* — Труды МИАН СССР **155** (1981), 41-76.
3. Ch. Pommerenke, *Univalent Functions, Studia Mathematica/ Mathematische Lehrbucher*, Band XXV, Vandenhoeck Ruprecht, Gottingen (1975).
4. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, “Наука”, Москва (1970).

Shagay M. A. Inverse theorem of polynomial approximation on an elliptic curve.

Let $\wp(z)$ be a doubly periodic Weierstrass function with periods $2\omega_1$, $2\omega_2$, let Q be a parallelogram with vertexes $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2(\omega_1 + \omega_2)$, and let s_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, be pairwise disjoint segments, $s_k = [a_k, b_k] \subset Q$, $1 \leqslant k \leqslant m$. We choose numbers $\varepsilon_{kn} > 0$ satisfying the condition $\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{kn}^2 < \infty$.

We denote by $g(z)$ the Green functions of the region $\mathbb{C}\setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$ with the logarithmic pole at ∞ and put $L_h = \{z \in Q\setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k : g(z) = h\}$, $0 < h < \max\limits_{z\in\overline{Q}} g(z), \rho_h(z) = \mathrm{dist}(z, L_h)$. Let $T(z) = (\wp(z), \wp'(z)), z \in Q$,

$$d_{kn}(z) = 1 + \frac{1}{2^n\sqrt{\delta(T(z), T(a_k)) \cdot \delta(T(z), T(b_k))}}, \quad z \in s_k,$$

$$\delta((\zeta, w), (\zeta', w')) = \sqrt{|\zeta - \zeta'|^2 + |w - w'|^2}.$$

We prove the following claim.

Theorem 1′. *Suppose that* $2 \leqslant p_k < \infty, 1 \leqslant k \leqslant m, f_k \in C(s_k)$. *Assume that there exist polynomials* $\mathsf{P}_{2^n}(u, v), \deg \mathsf{P}_{2^n} \leqslant 2^n$, *and a constant* C_* *such that for* $n = 1, 2, ...$ *one has the estimate*

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{s_k} \left| \frac{f_k(z) - \mathsf{P}_{2^n}(\wp(z), \wp'(z))}{\varepsilon_{kn}\rho_{2^{-n}}(z)} \right|^{p_k} d_{kn}(z)|dz| \leqslant C_*.$$

Then $f_k'(z) \in L^{p_k}(s_k), 1 \leqslant k \leqslant m$.

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
СПб, Кантемировская ул.3
Санкт-Петербург 194100, Россия
E-mail: `shagay.masha@mail.ru`

Поступило 16 июня 2024 г.