Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 537, 2024 г.

Д. Столяров

Φ-НЕРАВЕНСТВА МАЗЬИ НА ОБЛАСТЯХ

§1. Введение

Статья посвящена развитию теории Φ-неравенств Мазьи, предложенной в работах [9] и [10]. Об этих неравенствах можно думать как об исправлениях неверного предельного случая в неравенстве Харди–Литтлвуда–Соболева

$$\| \mathrm{I}_\alpha[f]\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}, \qquad p = \frac{d}{d-\alpha}. \tag{1.1}$$

Символом I_α здесь обозначен потенциал Рисса порядка α:

$$\mathrm{I}_\alpha[f] = c_{d,\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}\, dy, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{1.2}$$

Неравенство Харди–Литтлвуда–Соболева появилось в работе [15], современное изложение см. в подразделе VIII.4.2 книги [8]. Контрпример к неравенству (1.1) даётся последовательностью функций f, аппроксимирующей дельта-меру. Линейные исправления неравенства Харди–Литтлвуда–Соболева иногда называют неравенствами Бургейна–Брезиса. Обычно добавляют инвариантные относительно сдвигов и растяжений условия на функцию f, исключающие дельта-меры из рассмотрения. Отсылаем читателя к пионерской работе [1] и более современным исследованиям [3, 12, 16], а также обзорам [7] и [13].

В работе [4] В. Г. Мазья предложил версию исправления неравенства Харди–Литтлвуда–Соболева в случае $p = 1$, допускающую подстановку дельта-меры (см. также задачу 5.1 в сборнике проблем [5]): неравенство

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi(\nabla u(x))\, dx \Big| \lesssim \|\Delta u\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}^{d/(d-1)} \tag{1.3}$$

Ключевые слова: теоремы вложения Соболева, неравенства Бургейна-—Брезиса, дробное интегрирование.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда No. 19-71-10023, `https://rscf.ru/project/19-71-10023`.

справедливо для всех гладких функций u с компактным носителем с равномерной константой, если положительно $d/(d-1)$-однородная функция $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию сокращения

$$\int\limits_{S^{d-1}} \Phi(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0. \tag{1.4}$$

Символом σ здесь обозначена мера Хаусдорфа на единичной сфере. Необходимость указанного условия следует из подстановки функции u, похожей на фундаментальное решение уравнения Лапласа. Иными словами, функция Δu похожа на дельта-меру (см. детали рассуждений такого типа в разделе 2 ниже). Под положительно q-однородной функцией мы понимаем такую функцию Ψ, определённую на евклидовом пространстве, что соотношение $\Psi(\lambda y) = \lambda^q \Psi(y)$ выполнено для всех точек y и всех скаляров $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Отметим нелинейность неравенства (1.3); также нет в нём и намёков на выпуклость. Случай $p = 2$ и квадратичной формы Φ был рассмотрен в статье [6], также была найдена точная константа в соответствующем неравенстве. Гипотеза Мазьи была доказана в работе [9], процитируем её основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть d и ℓ – натуральные числа, и пусть $\alpha \in (0, d)$. Предположим, что ядро $K\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$ положительно $(\alpha-d)$-однородно и липшицево при сужении на единичную сферу. Предположим, что функция $\Phi\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ положительно p-однородна, $p = d/(d-\alpha)$, и липшицева в сужении на единичную сферу. Неравенство*

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi\Big(K * f(x)\Big)\, dx\Big| \lesssim \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}^p \tag{1.5}$$

справедливо для всех гладких функций f с компактным носителем и нулевым интегралом тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{S^{d-1}} \Phi(K(\zeta))\, d\sigma(\zeta) = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{S^{d-1}} \Phi(-K(\zeta))\, d\sigma(\zeta) = 0. \tag{1.6}$$

Теорема 1.1 влечёт гипотезу Мазьи (1.3) посредством представления

$$\nabla u(x) = c_d \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{(x-y)\Delta u(y)}{|x-y|^d}\, dy, \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{1.7}$$

символ c_d обозначает определённую постоянную. Классические теоремы вложения Соболева верны и для функций, заданных на областях.

Так как родственные неравенства Бургейна–Брезиса были приспособлены к постановкам такого вида в работах [2] и [3], желательно найти аналоги Ф-неравенства Мазьи для функций на областях. Приведём формулировки основных результатов. В этих теоремах мы считаем, что функции $K\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\ell$ и $\Phi\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ липшицевы в сужении на единичную сферу и положительно однородны степеней $(\alpha - d)$ и p, соответственно. Всегда подразумевается соотношение однородности $p = d/(d-\alpha)$. Число β принадлежит отрезку $(0,1)$.

Теорема 1.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей гладкости $C^{1,\beta}$. Неравенство*

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \Phi\Big(K * f(x)\Big)\,dx\Big| \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)} \tag{1.8}$$

справедливо для всякой ограниченной функции f с компактным носителем в пространстве $\mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда для всякого вектора $\xi \in S^{d-1}$ имеют место соотношения

$$\int\limits_{\substack{\zeta\in S^{d-1},\\ \langle\zeta,\xi\rangle>0}} \Phi(K(\zeta))\,d\sigma(\zeta) = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\substack{\zeta\in S^{d-1},\\ \langle\zeta,\xi\rangle>0}} \Phi(-K(\zeta))\,d\sigma(\zeta) = 0. \tag{1.9}$$

Отметим, что новое условие сокращения (1.9) влечёт старое условие (1.6). Основное отличие Ф-неравенств от классических оценок в духе вложений Соболева состоит в отсутствии монотонности оцениваемой величины относительно расширения/сужения области. Иными словами, совсем неясно, как оценить величину $|\int_\Omega \Phi(K*f)|$ величиной $|\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(K*f)|$; по-видимому, это просто невозможно. В классическом случае $\int_\Omega |f|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p$.

Также нами будет рассмотрен случай, когда Ω — полупространство.

Теорема 1.3. *Зафиксируем точку $\xi \in S^{d-1}$ и положим $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, \xi\rangle > 0\}$. Оценка*

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \Phi\Big(K * f(x)\Big)\,dx\Big| \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)} \tag{1.10}$$

справедлива для всех ограниченных функций $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ с компактным носителем и нулевым интегралом тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.6) *и* (1.9) (*выполнение последнего условия требуется только для рассматриваемого вектора ξ*).

Поясним требование $C^{1,\beta}$-гладкости границы области Ω в теореме 1.2. Мы предполагаем, что в окрестности всякой граничной точки область Ω совпадает с надграфиком дифференцируемой функции, градиент которой удовлетворяет β-условию Гёльдера. В частности, если мы выберем координаты таким образом, что в окрестности начала координат справедливо соотношение

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_d \geqslant h(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})\}, \quad h(0) = 0 \text{ и } \nabla h(0) = 0, \tag{1.11}$$

то верно и неравенство

$$|h(y)| \leqslant C|y|^{1+\beta} \tag{1.12}$$

для всех достаточно близких к началу координат точек $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ и абсолютной постоянной $C = C(\Omega)$.

Предположение о том, что интеграл функции f равен нулю, появляющееся в теоремах 1.1 и 1.3, необходимо, так как в его отсутствие функция $K * f$ убывает на бесконечности как $|x|^{\alpha-d}$, и без должной регуляризации интеграла в левой части неравенства желаемые оценки невозможны; об этом требовании можно думать как об условии компактности носителя в классических неравенствах Соболева. Доказательства двух приведённых выше теорем опираются на круг идей, развитый в работах [9] и [10] и формируют, в некотором смысле, естественное продолжение тех работ. Приведём также следствия в духе исходной постановки Мазьи (1.3).

Следствие 1.1. *Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — положительно однородная степени $d/(d-1)$ функция, сужение которой на единичную сферу липшицево. Предположим, что для всякой точки $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ выполнено условие сокращения*

$$\int\limits_{\substack{\zeta \in S^{d-1},\\ \langle \zeta, \xi\rangle > 0}} \Phi(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0. \tag{1.13}$$

Тогда для всякой ограниченной области Ω с гладкой границей и всякой гладкой функции $u\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(\nabla u(x))\, dx\Big| \lesssim \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)}, \tag{1.14}$$

мультипликативная константа в неравенстве равномерна по выбору функции.

Мы использовали обозначение $\bar{\Omega}$ для замыкания области Ω. Границу $\partial\Omega$ снабдили мерой Хаусдорфа размерности $d-1$. Второе слагаемое в правой части формулы (1.14) необходимо, например, потому, что функция u может быть гармонической.

Следствие 1.2. *Пусть* $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *— положительно однородная функция степени* $d/(d-1)$*, сужение которой на единичную сферу липшицево. Зафиксируем точку* $\xi \in S^{d-1}$*. Предположим выполнение условия сокращения*

$$\int\limits_{\substack{\zeta \in S^{d-1},\\ \langle \zeta,\xi\rangle > 0}} \Phi(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0. \tag{1.15}$$

В таком случае, равномерная по функции оценка

$$\Bigl|\int\limits_{\Omega} \Phi(\nabla u(x))\, dx\Bigr| \lesssim \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Bigl\|\frac{\partial u}{\partial n}\Bigr\|_{L_1(\partial\Omega)} \tag{1.16}$$

также имеет место для всех гладких функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *с компактным носителем, где* Ω *— полупространство* $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, \xi\rangle > 0\}$.

Замечание 1.3. Предполагаемые в следствиях условия сокращения не только достаточные, но и необходимые. Доказательство необходимости подобно доказательствам необходимости в теоремах 1.2 и 1.3, приведённым в разделе 2.

Замечание 1.4. Предположения о гладкости границы области Ω в следствии 1.1 кажутся избыточными. Так как наше доказательство использует теорию псевдодифференциальных операторов, непонятно, как легко от них избавиться.

В то время как следствие 1.2 выводится из теоремы 1.3 почти мгновенно, вывод следствия 1.1 из теоремы 1.2 потребует определённых усилий. Идея состоит в продолжении u до функции с компактным носителем в пространстве $\mathbb{R}^d$ таким образом, что норма лапласиана продолженной функции в пространстве L_1 контролируется правой частью неравенства (1.14), что позволяет применить теорему 1.2 вместе с представлением (1.7). Подобная стратегия использовалась в работе [3] в контексте более классических неравенств Бургейна–Брезиса. Нам же понадобится специальная теорема о продолжении, см. предложение 5.1.

В следующем разделе 2 мы докажем необходимость условий сокращения в теоремах 1.2 и 1.3. Раздел 3 посвящён сведению интересующих нас неравенств к более специальной теореме 3.1; о ней можно неформально думать как о версии неравенств Мазьи в духе норм Бесова. Раздел 4 содержит доказательство этой последней теоремы. В заключительным разделе 5 завершаются доказательства теорем 1.2 и 1.3 и дан вывод следствий 1.1 и 1.2 из этих теорем.

Я благодарен В. Г. Мазье за постановку вопроса, ставшего отправной точкой исследования (вопрос состоял в том, в каких условиях справедливо следствие 1.1). Я также признателен А. И. Назарову, М. И. Новикову, Б. Райце и А. И. Тюленеву за обсуждения вопросов продолжения гладких функций (результаты вокруг предложения 5.1).

§2. Необходимость

Сначала покажем необходимость условия (1.9) в теореме 1.2, после чего объясним, как поправить приведённое рассуждение, чтобы получить необходимость условий теоремы 1.3.

Пусть $\xi \in S^{d-1}$. Рассмотрим такую точку $z_\xi \in \partial\Omega$, что внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega$ в точке z_ξ равна ξ. Например, точку z_ξ можно построить следующим образом: это точка $z \in \bar{\Omega}$, минимизирующая функционал $\langle z, \xi\rangle$ при условии $z \in \bar{\Omega}$. При необходимости, вращая и сдвигая область Ω, можем, не умаляя общности, добиться того, что $\xi = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ и точка z_ξ — начало координат.

Пусть f — гладкая функция с носителем в единичном шаре и единичным интегралом. Рассмотрим её растяжения f_n:

$$f_n(x) = n^d f(nx), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Нам будет полезно следующее соотношение однородности:

$$K * f_n(x) = n^{d-\alpha} K * f(nx), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.2}$$

а также асимптотическая формула

$$K * f(x) = K(x) + O(|x|^{\alpha-d-1}), \qquad x \to \infty. \tag{2.3}$$

Эту последнюю формулу можно вывести из соотношения однородности и предположений о гладкости ядра K. Напомним лемму 6.5 работы [9]:

$$\bigl|\Phi(a+b)-\Phi(a)\bigr| \lesssim |a|^{p-1}|b|, \quad \text{коль скоро} \quad 2|b| \leqslant |a|, \quad a, b \in \mathbb{R}^\ell. \tag{2.4}$$

В таком случае, асимптотическая формула (2.3) и оценка (2.4) влекут соотношение

$$\begin{aligned}\Phi(K * f(x)) &= \Phi(K(x)) + O\Big(|K(x)|^{p-1}|x|^{\alpha-d-1}\Big)\\ &= \Phi(K(x)) + O\Big(|x|^{-d-1}\Big), \qquad x\to\infty.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставим функцию $x \mapsto f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, x_d - 2/n)$ в неравенство (1.8); отметим, что носитель подставляемой функции лежит в области Ω, если число n достаточно велико. В таком случае, согласно формуле (2.2), левая часть неравенства (1.8) равна

$$\Big|\int\limits_{n\Omega} \Phi\big(K * f(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, x_d - 2)\big)\,dx\Big|. \tag{2.6}$$

Обозначим символом $B_r(x)$ открытый евклидов шар радиуса r с центром в точке x. Отметим непрерывность функции $K * f$. Благодаря асимптотической формуле (2.5), интеграл (2.6) отличается на равномерно (относительно параметра n) ограниченную величину от

$$\Big|\int\limits_{n\Omega\setminus B_4(0)} \Phi(K(x))\,dx\Big|. \tag{2.7}$$

Положим

$$\mathrm{I} = \int\limits_{\substack{\zeta\in S^{d-1}\\ \zeta_d>0}} \Phi(K(\zeta))\,d\sigma(\zeta); \qquad \mathrm{M} = \int\limits_{\zeta\in S^{d-1}} \Big|\Phi(K(\zeta))\Big|\,d\sigma(\zeta). \tag{2.8}$$

Мы хотим доказать, что $\mathrm{I} = 0$. Это равенство выражает первое условие в формуле (1.9) (необходимость второго получается подстановкой функции f_n, порождённой подобной функцией f, интеграл которой равен -1). Перепишем формулу (2.7), используя замену переменных и однородность:

$$\begin{aligned}\int\limits_{n\Omega\setminus B_4(0)} \Phi(K(x))\,dx &= \int\limits_4^\infty r^{d-1} \int\limits_{S^{d-1}\cap\frac{n}{r}\Omega} \Phi(K(r\zeta))\,d\sigma(\zeta)\,dr\\ &= \int\limits_4^\infty r^{-1} \int\limits_{S^{d-1}\cap\frac{n}{r}\Omega} \Phi(K(\zeta))\,d\sigma(\zeta)\,dr.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Отметим, что на самом деле область интегрирования во внешнем интеграле ограничена величиной $n\,\mathrm{diam}\,\Omega$, это замечание будет полезно в дальнейшем. Пусть

$$\Psi(\rho) = \int\limits_{S^{d-1}\cap\rho^{-1}\Omega} \Phi(K(\zeta))\,d\sigma(\zeta), \qquad \rho \in (0,\infty). \tag{2.10}$$

Эта функция удовлетворяет оценкам

$$|\Psi(\rho)| \leqslant \mathrm{M}; \tag{2.11}$$

$$\Psi(\rho) = \mathrm{I} + O(\rho^{\beta}), \tag{2.12}$$

при всех $\rho \in (0,\infty)$; второе соотношение — следствие требования (1.12). Введём параметр $\gamma \in (0,1)$ и перепишем выражение (2.9) в виде

$$\int\limits_4^{\infty} r^{-1}\Psi(r/n)\,dr = \int\limits_4^{n^\gamma} r^{-1}\Psi(r/n)\,dr + \int\limits_{n^\gamma}^{O(n)} r^{-1}\Psi(r/n)\,dr. \tag{2.13}$$

Модуль второго интеграла ограничен величиной $\mathrm{M}(1-\gamma)\log n + O(1)$ согласно формуле (2.11), а первый интеграл равняется $\mathrm{I}\,\gamma\log n + O(1 + n^{(\gamma-1)\beta})$ по формуле (2.12). Если $\mathrm{I} \neq 0$, можно выбрать параметр γ таким образом, что весь интеграл стремится к бесконечности при $n \to \infty$, что противоречит исходному неравенству. Необходимость в теореме 1.2 доказана.

Доказать необходимость в теореме 1.3 можно подобным образом. Не умаляя общности, можем предполагать, что $\xi = (0,0,\dots,1)$, и подставить функцию

$$x \mapsto f_n(x_1,x_2,\dots,x_{d-1},x_d - 1/n) - f(x_1,x_2,\dots,x_{d-1},x_d - 1) \tag{2.14}$$

в неравенство (1.10). Необходимость вычитания второго члена обусловлена требованием нулевого среднего функции. Применяя приёмы, использованные при переходе от неравенства (1.8) к равномерной оценке (2.7), чтобы избавиться от вклада второго слагаемого в левую часть неравенства, приходим к интегралу

$$\Bigl|\int\limits_{\substack{|x|<n\\ x_d>0}} \Phi(K(x))\,dx\Bigr|. \tag{2.15}$$

Равномерная (по параметру n) ограниченность этого интеграла влечёт равенство (1.9) посредством той же замены переменных.

Необходимость условия (1.6) в теореме 1.3 можно получить, рассматривая функцию

$$x \mapsto f_n(x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d - 1) - f(x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d - 1). \tag{2.16}$$

§3. Предварительные оценки

Разобьём ядро на части:

$$K_n(x) = \begin{cases} K(x), & |x| \in [2^{-n-1}, 2^{-n}), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

В таком случае, $K = \sum_n K_n$ и $K_n(x) = 2^{(d-\alpha)n} K_0(2^n x)$. Мы также будем пользоваться обозначениями

$$K_{\leqslant n}(x) = \sum_{k \leqslant n} K_k(x). \tag{3.2}$$

Условие сокращения (1.6) влечёт

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi(K_n(x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi(-K_n(x))\,dx = 0, \tag{3.3}$$

в то время как из условия (1.9) следует, что

$$\int\limits_{\langle x,\xi\rangle \geqslant 0} \Phi(K_n(x))\,dx = \int\limits_{\langle x,\xi\rangle \geqslant 0} \Phi(-K_n(x))\,dx = 0. \tag{3.4}$$

Приведённая ниже лемма — упрощённая версия леммы 2.4 в работе [9].

Лемма 3.1. *Пусть $p \in [1, \infty)$. Если область Ω ограничена, то*

$$\int\limits_{\Omega} |K_{\leqslant 0} * f(x)|^p\,dx \lesssim \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}^p, \qquad f \in L_1(\mathbb{R}^d). \tag{3.5}$$

Доказательство. Оценка следует из цепочки неравенств

$$\|K_{\leqslant 0} * f\|_{L_\infty} \leqslant \|K_{\leqslant 0}\|_{L_\infty} \|f\|_{L_1} \lesssim \|f\|_{L_1} \tag{3.6}$$

и ограниченности области Ω. □

Функция $\mathcal{M}_p\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, предложенная в данном контексте в работе [10] и сыгравшая важную роль в работе [9] (см. формулы (2.17) и (5.4) той работы), задана формулой

$$\mathcal{M}_p(x,y) = \begin{cases} \min(x^{p-1}y, xy^{p-1}), & p \in (1,2]; \\ \frac{1}{2}(x^{p-1}y + xy^{p-1}), & p \in (2, \infty), \end{cases} \qquad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Следующая лемма полностью аналогична лемме 2.6 работы [9], её доказательство мы опустим.

Лемма 3.2. *Неравенство*

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\leqslant n+1} * f) - \Phi(K_{\leqslant n} * f)\Big| \lesssim \Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(K_{n+1} * f)\Big| + \int\limits_{\Omega} \mathcal{M}_p\Big(|K_{\leqslant n} * f|, |K_{n+1} * f|\Big) \tag{3.8}$$

справедливо для всякой ограниченной функции f с компактным носителем и всякого числа $n \in \mathbb{N}$.

Ввиду неотрицательности функции $\mathcal{M}_p$, оценка

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\Omega} \mathcal{M}_p\Big(|K_{\leqslant n} * f|, |K_{n+1} * f|\Big) \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)} \tag{3.9}$$

следует из теоремы 2.3 работы [9]. Остающаяся оценка, в свою очередь, не может быть сведена к теореме 2.2 работы [9], так как для справедливости соответствующего неравенства требуются более ограничительные условия сокращения ядра K.

Теорема 3.1. *Пусть Ω — ограниченная область с границей гладкости $C^{1,\beta}$, и пусть выполнено условие* (1.9). *В таком случае,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(K_n * f(x))\,dx\Big| \lesssim \|f\|^p_{L_1} \tag{3.10}$$

для всякой ограниченной функции f с компактным носителем.

§4. Достаточность: доказательство теоремы 3.1

Пусть $\{Q_{k,j}\}$ — диадические кубы:

$$Q_{k,j} = \prod_{i=1}^{d} \big[2^{-k} j_i, 2^{-k}(j_i+1)\big), \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Для всякого куба Q символ $c(Q)$ обозначает его центр, $\ell(Q)$ — длину стороны, а λQ — куб с тем же центром $c(Q)$ и длиной стороны $\lambda\ell(Q)$, $\lambda > 0$.

Определение 4.1. *Куб Q назовём граничным, если $(d+2)Q \cap \partial\Omega \neq \varnothing$. Множество всех граничных кубов обозначим символом $\mathfrak{B}$.*

Лемма 4.2. *Пусть Q — диадический куб поколения n, $Q \notin \mathfrak{B}$. Рассмотрим суммируемую функцию f с носителем в кубе Q. Справедлива оценка*

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(K_n * f(x))\,dx\Big| \lesssim 2^n \|f\|_{L_1(Q)}^{p-1} \inf_{c\in Q} \int\limits_{Q} |x-c||f(x)|\,dx. \tag{4.2}$$

Доказательство. Носитель функции $K_n * f$ содержится в кубе $(d+2)Q$. Так как $Q \notin \mathfrak{B}$, либо $(d+2)Q \cap \Omega = \varnothing$, либо $(d+2)Q \subset \Omega$. В первом случае интеграл в левой части неравенства (4.2) просто обнуляется. Во втором случае справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(K_n * f(x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi(K_n * f(x))\,dx. \tag{4.3}$$

Ввиду него, желаемое неравенство можно вывести из следствия 3.2 работы [9] и наблюдения, что

$$\inf_{c\in Q} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |x-c||f(x)|\,dx = \inf_{c\in \mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |x-c||f(x)|\,dx, \tag{4.4}$$

так как $\operatorname{supp} f \subset Q$. □

Лемма 4.3. *Пусть Q — граничный диадический куб поколения $n \geqslant 0$. Рассмотрим функцию f с носителем в кубе Q. Справедлива оценка*

$$\Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(K_n * f(x))\,dx\Big| \lesssim 2^n \|f\|_{L_1(Q)}^{p-1} \inf_{c\in \partial\Omega} \int\limits_{Q} |x-c||f(x)|\,dx + 2^{-\beta n}\|f\|_{L_1(Q)}^{p}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть $y \in \partial\Omega$ — произвольная точка. Тогда

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(K_n * f(x))\,dx\Big| &\leqslant \Big|\int\limits_{\Omega} \Phi(K_n * f(x))\,dx - \int\limits_{\Omega} \Phi\Big(K_n(x-y)\cdot \int f\Big)\,dx\Big| \\ &\quad + \Big|\int\limits_{\Omega} \Phi\Big(K_n(x-y)\cdot \int f\Big)\,dx\Big|.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для некоторой точки $y \in \partial\Omega$, первое слагаемое ограничено величиной

$$2^n \|f\|_{L_1(Q)}^{p-1} \inf_{c \in \partial\Omega} \int_Q |x - c||f(x)|\, dx$$

по аналогии с доказательством леммы 3.1 в работе [9], и нам требуется лишь доказать неравенство

$$\sup_{y \in \partial\Omega} \Big| \int\limits_{\Omega} \Phi(K_n(x - y))\, dx \Big| \lesssim 2^{-\beta n}. \tag{4.7}$$

Зафиксируем точку $y \in \partial\Omega$ и рассмотрим вектор $\xi = \vec{\mathrm{n}}_y$ — внутреннюю нормаль к поверхности $\partial\Omega$ в точке y. Тогда

$$\Big| \int\limits_{\Omega} \Phi(K_n(x - y))\, dx \Big| \leqslant \Big| \int\limits_{\substack{x\,:\,\langle x-y,\xi\rangle \\ \geqslant 0}} \Phi(K_n(x - y))\, dx \Big| + \int\limits_{\substack{x \notin \Omega, \\ \langle x-y,\xi\rangle \geqslant 0}} |K_n(x - y)|^p\, dx$$
$$+ \int\limits_{\substack{x \in \Omega, \\ \langle x-y,\xi\rangle \leqslant 0}} |K_n(x - y)|^p\, dx. \tag{4.8}$$

Первое слагаемое обнуляется по условию (3.4). Чтобы ограничить второе и третье, воспользуемся оценкой (1.12) и отметим, что объём области интегрирования оценивается величиной $O(2^{-(d+\beta)n})$, в то время как подынтегральное выражение по модулю не превосходит $2^{p(d-\alpha)n}$. Следовательно, второе и третье слагаемые действительно не превосходят величины $O(2^{-\beta n})$, что и требовалось доказать. □

Сформулируем аналог теоремы 3.1 работы [9].

Теорема 4.1. *Неравенство*

$$\Big| \int\limits_{\Omega} \Phi(K_{n+1} * f) \Big| \lesssim 2^n \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^d \\ 3Q_{n,j} \notin \mathfrak{B}}} \|f\|_{L_1(3Q_{n,j})}^{p-1} \inf_{c_{n,j}} \int\limits_{3Q_{n,j}} |x - c_{n,j}||f(x)|\, dx$$
$$+2^n \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^d \\ 3Q_{n,j} \in \mathfrak{B}}} \|f\|_{L_1(3Q_{n,j})}^{p-1} \inf_{c_{n,j} \in \partial\Omega} \int\limits_{3Q_{n,j}} |x - c_{n,j}||f(x)|\, dx + 2^{-\beta n} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^d \\ 3Q_{n,j} \in \mathfrak{B}}} \|f\|_{L_1(3Q_{n,j})}^{p} \tag{4.9}$$

справедливо для всякого числа $n \geqslant 0$.

Теорему 4.1 можно вывести из лемм 4.2 и 4.3 таким же образом, как теорема 3.1 работы [9] выведена из леммы 3.1 той же статьи. Приведём это рассуждение с небольшим упрощением.

Доказательство теоремы 4.1. Напомним, что носитель функции K_{n+1} лежит в шаре радиуса 2^{-n-1}. Разобьём всё пространство на полосы

$$\Pi_j = \Big\{x \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, x_1 \in [2^{-n}j, 2^{-n}(j+1))\Big\}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.10}$$

Положим $f_j = f\chi_{\Pi_j}$. Подметим полезное тождество

$$\Phi(K_{n+1} * f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi(K_{n+1} * (f_j + f_{j+1})) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi(K_{n+1} * f_j), \tag{4.11}$$

влекущее оценку

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_\Omega \Phi(K_{n+1} * f)\Big| &\\ \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big|\int\limits_\Omega \Phi(K_{n+1} * (f_j + f_{j+1}))\Big| &+ \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big|\int\limits_\Omega \Phi(K_{n+1} * f_j)\Big|.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Выполняя подобную «разбивающую» процедуру относительно остальных $(d-1)$ координат, оценим интеграл в левой части формулы (4.9) величиной

$$\sum \Big|\int\limits_\Omega \Phi(K_{n+1} * \tilde{f})\Big|, \tag{4.13}$$

носитель каждой функции $\tilde{f}$ в которой лежит в кубе $3Q_{n,j}$ для некоторого индекса j, и каждый куб $3Q_{n,j}$ «выбирается» не более чем 2^d функциями $\tilde{f}$. Отметим также, что любая из функций $\tilde{f}$ — результат умножения функции f на характеристическую функцию некоторого параллелепипеда. Таким образом, желаемая оценка действительно следует из лемм 4.2 и 4.3. $\square$

Стало быть, теорема 3.1 естественным образом распадается на три оценки:

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ 3Q_{n,j}\notin\mathfrak{B}}} \|f\|^{p-1}_{L_1(3Q_{n,j})} \inf_{c_{n,j}} \int\limits_{3Q_{n,j}} |x-c_{n,j}||f(x)|\,dx \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)}; \tag{4.14}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ 3Q_{n,j}\in\mathfrak{B}}} \|f\|^{p-1}_{L_1(3Q_{n,j})} \inf_{c_{n,j}\in\partial\Omega} \int\limits_{3Q_{n,j}} |x-c_{n,j}||f(x)|\,dx \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)}; \tag{4.15}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^{-\beta n} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ 3Q_{n,j}\in\mathfrak{B}}} \|f\|^{p}_{L_1(3Q_{n,j})} \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.16}$$

Неравенство (4.14) было доказано в работе [9], см. формулу (4.11) той работы. Доказательство оценки (4.16) сравнительно просто:

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^{-\beta n} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ 3Q_{n,j}\in\mathfrak{B}}} \|f\|^{p}_{L_1(3Q_{n,j})} \lesssim \sum_{n\geqslant 0} 2^{-\beta n}\|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.17}$$

Остаётся обосновать неравенство (4.15). Если Q — произвольный куб в $\mathbb{R}^d$, то символ $\mathbb{D}_m(Q)$ обозначает набор всех его диадических подкубов поколения m (сам куб Q принадлежит нулевому поколению). Рассмотрим величину

$$\mathrm{E}^{\boldsymbol{b}}_{Q,m}[f] = \sum_{\substack{Q'\in\mathfrak{B}\\ Q'\in\mathbb{D}_m(Q)}} \Big(\int\limits_{Q'} |f(x)|\,dx\Big)^p, \tag{4.18}$$

о которой можно думать как о граничной версии величины

$$\mathrm{E}_{Q,m}[f] = \sum_{Q'\in\mathbb{D}_m(Q)} \Big(\int\limits_{Q'} |f(x)|\,dx\Big)^p, \tag{4.19}$$

сыгравшей важную роль в работе [9]. Отметим, что $\mathrm{E}^{\boldsymbol{b}}_{Q',1}[f] \leqslant \mathrm{E}^{\boldsymbol{b}}_{Q',0}[f]$ для всякого куба Q'; мы использовали тот факт, что родитель граничного куба — тоже граничный куб. В частности, $\mathrm{E}^{\boldsymbol{b}}_{Q,m+1}[f] \leqslant \mathrm{E}^{\boldsymbol{b}}_{Q,m}[f]$ для всякого числа $m \geqslant 0$. Следовательно,

$$\sum_{m\geqslant 0} \big(\mathrm{E}^{\boldsymbol{b}}_{Q,m}[f] - \mathrm{E}^{\boldsymbol{b}}_{Q,m+1}[f]\big) \leqslant \|f\|^p_{L_1(Q)}, \tag{4.20}$$

и все слагаемые в этой сумме неотрицательны.

Лемма 4.4. *Зафиксируем число* $\varepsilon \in (0, 1/2)$. *Пусть* Q *— граничный куб. В таком случае,*

$$\frac{\|f\|_{L_1(Q)}^{p-1}}{\ell(Q)} \inf_{c \in \partial\Omega} \int\limits_Q |x-c||f(x)|\,dx \lesssim \sum_{m \geqslant 0} (1-\varepsilon)^m \Big(\mathrm{E}_{Q,m}^{\boldsymbol{b}}[f] - \mathrm{E}_{Q,m+1}^{\boldsymbol{b}}[f]\Big). \tag{4.21}$$

Эта лемма подобна лемме 4.2 в работе [9], доказательство также подобно. Приведём его для полноты изложения. Лемма 6.6 работы [9] гласит

$$\Big(\sum_{j=1}^n z_j\Big)^p - \sum_{j=1}^n z_j^p \gtrsim \Big(\sum_{j=1}^n z_j\Big)^{p-1} \min_i \sum_{j \ne i} z_j \tag{4.22}$$

для всякого набора неотрицательных чисел z_j. Нам понадобится небольшое улучшение этой леммы.

Лемма 4.5. *Пусть числа* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *и* Z *неотрицательны. В таком случае,*

$$\Big(Z + \sum_{j=1}^n z_j\Big)^p - \sum_{j=1}^n z_j^p \gtrsim \Big(Z + \sum_{j=1}^n z_j\Big)^{p-1} \Big(Z + \min_i \sum_{j \ne i} z_j\Big). \tag{4.23}$$

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать число z_1 наибольшим из всех чисел z_j. Рассмотрим два случая: $z_1 \geqslant Z$ и $Z > z_1$.

В первом случае желаемое неравенство следует из оценки (4.22) (применённой к числам $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и Z):

$$\begin{aligned} \Big(Z + \sum_{j=1}^n z_j\Big)^{p-1} \Big(Z + \min_i \sum_{j \ne i} z_j\Big) &\lesssim \Big(Z + \sum_{j=1}^n z_j\Big)^p - \sum_{j=1}^n z_j^p - Z^p \\ &\leqslant \Big(Z + \sum_{j=1}^n z_j\Big)^p - \sum_{j=1}^n z_j^p. \end{aligned} \tag{4.24}$$

При рассмотрении второго случая, можем, пользуясь однородностью доказываемого неравенства, предположить, не умаляя общности, что $Z = 1$. Следовательно, $z_j \leqslant 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Отметим, что в таком случае левая часть неравенства (4.23) — хотя бы 1 (по неравенству Гёльдера), в то время как правая часть не превосходит $(n+1)^p$. $\square$

Доказательство леммы 4.4. Построим последовательность кубов R_m, начиная с куба $R_0 = Q$. Предположим, что кубы $R_0, R_1, \ldots, R_m$ уже построены. Выберем куб R_{m+1} согласно правилам

$$R_{m+1} \in \mathbb{D}_1(R_m),\ \ R_{m+1} \in \mathfrak{B},\qquad \int\limits_{R_{m+1}} |f(x)|\,dx = \max_{R\in\mathbb{D}_1(R_m)\cap\mathfrak{B}} \int\limits_{R} |f(x)|\,dx. \tag{4.25}$$

Иными словами, если у граничного куба R_m есть потомки, тоже являющиеся граничными, то выберем среди них обладающего большей «массой». Отметим, что в наборе $\mathbb{D}_1(R_m)$ может и не быть граничных кубов. В таком случае, процесс заканчивается (в частности это означает, что исходный куб Q не пересекает границу множества Ω). Обозначим символом c_0 общую точку кубов R_m в случае, если их последовательность бесконечна, или ближайшую к наименьшему из этих кубов точку множества $\partial\Omega$, если последовательность R_m конечна. В таком случае,

$$\forall m \quad \forall x \in R_m \qquad |x - c_0| \lesssim 2^{-m}\ell(Q). \tag{4.26}$$

Пусть δ — малое число, точное значение которого мы укажем впоследствие. Обозначим символом M наименьшее среди всех таких неотрицательных чисел m, что

$$\int\limits_{R_{m+1}} |f(x)|\,dx < (1-\delta) \int\limits_{R_m} |f(x)|\,dx. \tag{4.27}$$

Если таких чисел m не существует, положим $M = \infty$. Оценим

$$\int\limits_{Q} \frac{|x-c_0|}{\ell(Q)}|f(x)|\,dx \overset{(4.26)}{\lesssim} \int\limits_{R_{M+1}} 2^{-M-1}|f(x)|\,dx + \sum_{m=0}^{M} \int\limits_{R_m\setminus R_{m+1}} 2^{-m}|f(x)|\,dx. \tag{4.28}$$

Выбор числа M позволяет пренебречь первым слагаемым, потому что оно ограничено вторым (мультипликативная постоянная порядка $O(1/\delta)$, однако, это не имеет значения, так как параметр δ зависит лишь от ε и скоро будет зафиксирован). Согласно выбору числа M,

$$\|f\|_{L_1(Q)} \leqslant (1-\delta)^{-m}\|f\|_{L_1(R_m)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{4.29}$$

Таким образом,

$$\frac{\|f\|_{L_1(Q)}^{p-1}}{\ell(Q)}\inf_{c\in\partial\Omega}\int\limits_{Q}|x-c||f(x)|\,dx$$
$$\overset{(4.28),(4.29)}{\lesssim}\sum_{m=0}^{M}(1-\delta)^{-m(p-1)}\|f\|_{L_1(R_m)}^{p-1}\int\limits_{R_m\setminus R_{m+1}}2^{-m}|f(x)|\,dx. \qquad (4.30)$$

Пусть $R_1', R_2', \ldots, R_n'$ — все потомки куба R_m, являющиеся граничными кубами; пусть также $R_{m+1} = R_1'$. Применим лемму 4.5 с $Z = \int_{R_m\setminus\cup_j R_j'}|f|$ и $z_j = \int_{R_j'}|f|$. В таком случае, правая часть в формуле (4.30) ограничена величиной

$$\sum_{m=0}^{M}2^{-m}(1-\delta)^{-m(p-1)}\big(\mathrm{E}_{R_m,0}^{\boldsymbol{b}}[f]-\mathrm{E}_{R_m,1}^{\boldsymbol{b}}[f]\big)$$
$$\leqslant\sum_{m\geqslant 0}(1-\varepsilon)^m\Big(\mathrm{E}_{Q,m}^{\boldsymbol{b}}[f]-\mathrm{E}_{Q,m+1}^{\boldsymbol{b}}[f]\Big), \qquad (4.31)$$

коль скоро $(1-\varepsilon)\geqslant\frac{1}{2}(1-\delta)^{-(p-1)}$ (это определяет выбор числа δ). □

Доказательство теоремы 3.1. По теореме 4.1, достаточно доказать неравенства (4.14), (4.15) и (4.16), из которых пока не обосновано только (4.15). Не умаляя общности, предположим, что область Ω лежит внутри диадического куба Q нулевого поколения. Теорема о трёх решётках (см. объяснение в работе [9] сразу после формулы (4.11)) гласит, что в таких оценках кубы $3Q_{n,j}$ правомочно заменить просто кубами $Q_{n,j}$. Применим лемму 4.4 к каждому из диадических кубов в левой части формулы (4.15) и получим

$$\sum_{n\geqslant 0}2^n\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ Q_{n,j}\in\mathfrak{B}}}\|f\|_{L_1(Q_{n,j})}^{p-1}\inf_{c_{n,j}\in\partial\Omega}\int\limits_{Q_{n,j}}|x-c_{n,j}||f(x)|\,dx$$
$$\lesssim\sum_{n\geqslant 0}\sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}^d\\ Q_{n,j}\in\mathfrak{B}}}\sum_{m\geqslant 0}(1-\varepsilon)^m\big(\mathrm{E}_{Q_{n,j},m}^{\boldsymbol{b}}[f]-\mathrm{E}_{Q_{n,j},m+1}^{\boldsymbol{b}}[f]\big)$$
$$=\sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{l\leqslant k}(1-\varepsilon)^l\Big)\big(\mathrm{E}_{Q,k}^{\boldsymbol{b}}[f]-\mathrm{E}_{Q,k+1}^{\boldsymbol{b}}[f]\big)\overset{(5.1)}{\lesssim}\|f\|_{L_1(Q)}^p. \quad \square \qquad (4.32)$$

§5. Завершение доказательств

Доказательство теоремы 1.2. Необходимость условия (1.9) уже доказана (см. раздел 2). Предположим теперь, что равенство (1.9) выполнено. В таком случае, справедливо и условие (1.6). Мы же хотим получить оценку (1.8). Зафиксируем функцию f, удовлетворяющую предположениям теоремы. Начнём с неравенства

$$\Big|\int\limits_{\Omega}\Phi(K*f)\Big|\leqslant\sum_{n\geqslant 0}\Big|\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\leqslant n+1}*f)-\Phi(K_{\leqslant n}*f)\Big|+\Big|\int\limits_{\Omega}\Phi(K_{\leqslant 0}*f)\Big|, \tag{5.1}$$

которое справедливо ввиду поточечной сходимости $\Phi(K_{\leqslant n+1}*f)\to\Phi(K*f)$ и равномерной ограниченности соответствующей последовательности функций (напомним, что функция f — ограниченная с компактным носителем). Второе слагаемое в правой части приведённого выше неравенства может быть оценено при помощи леммы 3.1. Ряд в первом слагаемом ограничен ввиду леммы 3.2, неравенства (3.9) и теоремы 3.1. □

Доказательство теоремы 1.3. Мы уже доказали необходимость условия (1.9) (см. раздел 2). Докажем достаточность. Не умаляя общности, $\xi=(0,0,,\ldots,0,1)$ и условие (1.9) справедливо при этом конкретном значении ξ, а также выполнено и требование (1.6). Пользуясь инвариантностью задачи относительно растяжений, можем предполагать, что носитель функции f лежит в единичном шаре. Применим приём с телескопической суммой, подобный приёму в (5.1).

В данном случае мы можем воспользоваться условием $\int f=0$ для оценки второго слагаемого в формуле (5.1); это можно сделать при помощи леммы 2.4 работы [9]. Чтобы оценить ряд, применим лемму 3.2, воспользуемся оценкой (3.9), и нам лишь остаётся проверить версию теоремы 3.1 для случая, когда Ω — полупространство. Точнее, нам нужно доказать оценку

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\int\limits_{\{x_d>0\}}\Phi(K_n*f(x))\,dx\Big|\lesssim\|f\|^p_{L_1(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.2}$$

По сути, доказательство в этом случае такое же, как и в случае ограниченной области Ω (напомним, что носитель функции f лежит в единичном шаре, а носители функций $f*K_n$ лежат в шаре радиуса два с центром в начале координат), однако, при доказательстве аналога леммы 4.3 мы будем использовать условие (1.9) лишь с $\xi = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, так как это единственный нормальный вектор к рассматриваемой поверхности. $\square$

Доказательство следствия 1.2. Не умаляя общности, будем считать, что $\xi = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Рассмотрим симметричное продолжение функции u:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x_d \geqslant 0; \\ u(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, -x_d), & x_d < 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

В таком случае, носитель функции $\tilde{u}$ компактен и её обобщённый градиент удовлетворяет соотношению

$$\begin{split} &\|\Delta\tilde{u}\|_{\mathbb{M}} \\ &\leqslant 2\Big(\int\limits_{\Omega}\big|\Delta u(x)\big|\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_d}(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, 0)\Big|\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{d-1}\Big). \end{split} \tag{5.4}$$

Здесь символом $\|\cdot\|_{\mathbb{M}}$ обозначена полная вариация меры со знаком. Применим теорему 1.3 к функции $\Delta\tilde{u}$ в роли f (мы оставляем читателю разбор подробностей, касающихся подстановки меры вместо суммируемой функции в теорему 1.3; отметим лишь, что функция $\nabla\tilde{u}$ равномерно ограничена). Точнее, мы используем формулу (1.7) и представляем функцию $\nabla\tilde{u}$ в виде $K*f$, где $K(\zeta) = c_d\zeta$, $\zeta \in S^{d-1}$, а $f = \Delta\tilde{u}$. Остаётся заметить, что условие сокращения (1.9) в этом случае сводится к (1.15). $\square$

Доказательство следствия 1.1 основано на нескольких фактах о гармонических функциях. Несмотря на их кажущуюся фольклорность, автор не смог подобрать точные ссылки и поэтому приводит доказательства.

Предложение 5.1. *Пусть Ω — ограниченная подобласть пространства $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей. Для всякой гладкой функции u на множестве $\bar{\Omega}$ существует такая непрерывная функция $v\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, что $\nabla v = \nabla u$ на множестве Ω и*

$$\|\Delta v\|_{\mathbb{M}} \lesssim \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)}; \tag{5.5}$$

неявная мультипликативная постоянная в приведённом неравенстве не зависит от выбора функции u.

Лемма 5.2. *Пусть $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — гармоническая непрерывная вплоть до границы функция, а f — её граничные значения. Пусть $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — другая функция с теми же граничными значениями f. В таком случае,*

$$\Big\|\frac{\partial F}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)} \leqslant \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Зафиксируем малое число $\varepsilon > 0$. Пусть φ — такая гладкая на множестве $\partial\Omega$ функция, что $\|\varphi\|_{L_\infty} \leqslant 1$ и

$$\Big\|\frac{\partial F}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)} \leqslant (1+\varepsilon)\int\limits_{\partial\Omega} \varphi\,\frac{\partial F}{\partial n}. \tag{5.7}$$

Символом $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ обозначим решение задачи Дирихле с граничными данными φ. По формуле Грина,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varphi\,\frac{\partial F}{\partial n} = -\int\limits_{\partial\Omega} f\,\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\int\limits_{\partial\Omega} \varphi\,\frac{\partial u}{\partial n} + \int\limits_{\Omega} \Delta u\,\Phi. \tag{5.8}$$

Согласно принципу максимума, $\|\Phi\|_{L_\infty} \leqslant 1$. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varphi\,\frac{\partial F}{\partial n} \leqslant \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)}. \tag{5.9}$$

Остаётся выбрать число ε произвольно малым. $\square$

Доказательство предложения 5.1. Рассмотрим задачу Дирихле на области $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ с граничными данными $u|_{\partial\Omega}$ (см. §23 и §26 книги [14] о правильных условиях на бесконечности). Обозначим её решение символом U. Отметим, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Big|\frac{\partial U}{\partial n}\Big| \lesssim \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)}. \tag{5.10}$$

Автор надеется, что одинаковые обозначения для внутренней и внешней нормалей не приведут к путанице. Пока примем на веру эту оценку и построим желаемую функцию v. Пусть $\Omega \subset B_{R/2}(0)$. Символом $\mathcal{R}$ обозначим шаровой слой $B_{2R}(0) \setminus B_R(0)$. Нам потребуется стандартная оценка

$$\|\nabla U\|_{L_\infty(\mathcal{R})} \lesssim \int\limits_{\partial\Omega} \Big|\frac{\partial U}{\partial n}\Big|. \tag{5.11}$$

Пусть Ψ — гладкая функция, равная 1 на множестве $B_R(0)$ и нулю вне $B_{2R}(0)$; положим

$$W(x) = \begin{cases} U(x), & x \notin \Omega; \\ u(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.12}$$

и, наконец, определим функцию v по правилу

$$v(x) = (W(x) - W(x_0))\Psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.13}$$

где x_0 — произвольная точка множества $\mathcal{R}$. В таком случае,

$$\Delta v(x) = (W(x) - W(x_0))\Delta\Psi(x) + 2\langle\nabla W(x), \nabla\Psi(x)\rangle + \Delta W(x)\Psi(x). \tag{5.14}$$

Оценим полную вариацию каждого слагаемого по отдельности:

1)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |W(x) - W(x_0)||\Delta\Psi(x)|\,dx &\lesssim \int\limits_{\mathcal{R}} |W(x) - W(x_0)|\,dx \lesssim \int\limits_{\mathcal{R}} |\nabla U(x)|\,dx \\ &\overset{(5.11),(5.10)}{\lesssim} \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)};\end{aligned} \tag{5.15}$$

2)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|\langle\nabla W(x), \nabla\Psi(x)\rangle\Big|\,dx \lesssim \int\limits_{\mathcal{R}} |\nabla U(x)|\,dx \lesssim \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)}; \tag{5.16}$$

3)

$$\begin{aligned}\big\|\Psi\Delta W\big\|_{\mathbb{M}} &\leqslant \int\limits_{\Omega} |\Delta u(x)|\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \Big|\frac{\partial u}{\partial n}\Big| + \int\limits_{\partial\Omega} \Big|\frac{\partial U}{\partial n}\Big| \\ &\lesssim \|\Delta u\|_{L_1(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{L_1(\partial\Omega)}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Таким образом, остаётся доказать оценку (5.10). Пусть $\mathrm{DN}_{\mathrm{out}}$ и $\mathrm{DN}_{\mathrm{in}}$ — соответственно внутренний и внешний операторы Дирихле–Неймана. Согласно подразделу 7.10 книги [11], оба этих оператора — псевдодифференциальные эллиптические операторы порядка 1; их главные символы равны $\sqrt{\Delta_{\partial\Omega}}$, здесь $\Delta_{\partial\Omega}$ — (положительный) лапласиан на многообразии $\partial\Omega$ (например, оператор Лапласа–Бельтрами). В свете леммы 5.2, неравенство (5.10) можно переформулировать в виде

$$\|\operatorname{DN}_{\mathrm{out}} f\|_{L_1(\partial\Omega)} \lesssim \|\operatorname{DN}_{\mathrm{in}} f\|_{L_1(\partial\Omega)}, \quad \text{где } f = u|_{\partial\Omega}. \tag{5.18}$$

Из приведённых выше сведений следует, в частности, что оператор $\mathrm{DN}_{\mathrm{in}}$ допускает левый параметрикс, главный символ которого равен $(\sqrt{\Delta_{\partial\Omega}})^{-1}$. Согласно стандартному исчислению псевдодифференциальных операторов (см. подразделы 7.3 и 7.4 в книге [11]), отсюда следует формула

$$\operatorname{DN}_{\mathrm{out}} f = \operatorname{DN}_{\mathrm{in}} f + \operatorname{Er}\operatorname{DN}_{\mathrm{in}} f, \tag{5.19}$$

где Er — псевдодифференциальный оператор порядка -1; так как многообразие $\partial\Omega$ компактно, этот оператор отображает пространство L_1 в себя. Неравенство (5.10) доказано. □

Доказательство следствия 1.1. Применим предложение 5.1 и построим функцию v. В таком случае из формулы (1.7) следует, что

$$\nabla u(x) = K * \Delta v(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

где $K(\zeta) = c_d\zeta$, $\zeta \in S^{d-1}$. Остаётся применить теорему 1.2. □

Список литературы

1. J. Bourgain, H. Brezis, *New estimates for the Laplacian, the div-curl, and related Hodge systems.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338**, No. 7 (2004), 539–543.
2. F. Gmeineder, B. Raiţă, *Embeddings for $\mathbb{A}$-weakly differentiable functions on domains.* — J. Funct. Anal. **277**, No. 12 (2019), 108278, 33.
3. F. Gmeineder, B. Raiţă, J. Van Schaftingen, *Boundary ellipticity and limiting L^1-estimates on halfspaces.* — Adv. Math. **439** (2024), Paper No. 109490, 25.
4. V. Maz'ya, *Estimates for differential operators of vector analysis involving L^1-norm.* — J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12**, No. 1 (2010), 221–240.
5. V. Maz'ya, *Seventy five (thousand) unsolved problems in analysis and partial differential equations.* — Integral Equations Operator Theory **90**, No. 2 (2018), Paper No. 25, 44.
6. V. Maz'ya, T. Shaposhnikova, *A collection of sharp dilation invariant integral inequalities for differentiable functions.* — Sobolev spaces in mathematics. I **8** (2009), Springer, New York, 223–247.
7. D. Spector, *New directions in harmonic analysis on L^1.* — Nonlinear Anal. **192** (2020), 111685, 20.
8. Elias M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* — Princeton Mathematical Series **43** (1993), xiv+695.

9. D. Stolyarov, *Fractional integration of measures: Maz'ya's Φ-inequalities.* — `https://arxiv.org/abs/2109.08014`, to appear in Annali della Scuola normale superiore di Pisa.
10. D. Stolyarov, *On Maz'ya's Φ-inequalities for martingale fractional integration and their Bellman functions.* — Michigan Math. J. **74**, No. 3 (2024), 509–526.
11. M. E. Taylor, *Partial Differential Equations.* II, Applied Mathematical Sciences **116**, Springer-Verlag, New York (1996).
12. J. Van Schaftingen, *Limiting Sobolev inequalities for vector fields and canceling linear differential operators.* — J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15**, No. 3 (2013), 877–921.
13. J. Van Schaftingen, *Limiting Bourgain-Brezis estimates for systems of linear differential equations: theme and variations.* — J. Fixed Point Theory Appl. **15**, No. 2 (2014), 273–297.
14. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука (1971).
15. С. Соболев, *Об одной теореме функционального анализа.* — Матем сб. **4(46)** (1938), 471–497.
16. Д. М. Столяров, *Неравенство Харди–Литтлвуда–Соболева в случае* $p = 1$. — Матем сб. **213**, No. 6 (2022), 125–174.

Stolyarov D. Maz'ya's Φ-inequalities on domains.

We find necessary and sufficient conditions on the function Φ for the inequality

$$\Big|\int_\Omega \Phi(K * f)\Big| \lesssim \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}^p$$

to be true. Here K is a (possibly vector valued) kernel positive homogeneous of degree $\alpha - d$, Φ is a p-homogeneous function, and $p = d/(d-\alpha)$. The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is either bounded with $C^{1,\beta}$ smooth boundary for some $\beta > 0$ or a halfspace in $\mathbb{R}^d$. As a corollary, we describe the functions $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ positive homogeneous of order $d/(d-1)$ that are suitable for the bound

$$\Big|\int_\Omega \Phi(\nabla u)\Big| \lesssim \int_\Omega |\Delta u|.$$

Санкт-Петербургский
Государственный Университет,
Факультет Математики и Компьютерных Наук
E-mail: `d.m.stolyarov@spbu.ru`

Поступило 15 апреля 2024 г.