Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 537, 2024 г.

А. А. Скворцов

ОЦЕНКИ В ЗАДАЧЕ ОБ ИДЕАЛАХ АЛГЕБРЫ H^∞

Введение

Теорема Карлесона о короне, особенно после нескольких упрощений ее доказательства, открыла ряд вопросов в комплексном анализе, связанных с идеалами ограниченных аналитических функций в единичном круге. В простой постановке вопрос звучит следующим образом: даны функции $f_1, f_2, \dots f_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ и функция $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Требуется узнать, какими будут необходимые и достаточные условия существования функций $g_1, g_2, \dots g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$, для которых будет выполняться следующее равенство

$$\sum_i f_i(z) g_i(z) \equiv h(z).$$

Теорема Карлесона о короне утверждает, что если $h(z) \equiv 1$, то необходимым и достаточным условием является требование $\inf\limits_{z\in\mathbb{D}} \sum_i |f_i(z)|^2 > 0$, однако в общем случае необходимое и достаточное условие неизвестно. Более подробно об истории вопроса можно узнать из статьи [3]. Данная статья развивает несколько результатов оттуда, и “смешивает” их с несколькими другими результатами. Также тут содержатся несколько уточнений результатов других авторов по задаче об идеалах алгебры $H^\infty(\mathbb{D})$.

§1. Нестепенные оценки в задаче об идеалах

Как и во введении, рассмотрим функции $f_1, f_2, \dots \in H^\infty(\mathbb{D})$ и функцию $h \in H^\infty(\mathbb{D})$.

С одной стороны, давно известно (смотри [5]), что достаточное условие для существования функций $g_1, g_2, \dots \in H^\infty(\mathbb{D})$ со свойством

$$\sum_i f_i(z) g_i(z) \equiv h(z)$$

Ключевые слова: теорема о короне, идеалы алгебры H^∞, классы Харди.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда 23-11-00171, `https://rscf.ru/project/23-11-001717/`.

можно сформулировать в виде

$$\sum_i |f_i(z)|^2 \leqslant 1$$

и $|h(z)| \leqslant \phi(\sqrt{\sum_i |f_i(z)|^2})$. Оба неравенства должны выполняться при всех $z \in \mathbb{D}$; в дальнейшем это будет подразумеваться, если не сказано иного. В данном неравенстве ϕ должна быть возрастающей функцией, действующей из R_+ в себя (например, $\phi(x) = x^3$), и подчиненной некоторым условиям, которые будут описаны ниже. В таком случае мы можем даже утверждать, что будут существовать функции $g_1, g_2, \ldots \in H^\infty(\mathbb{D})$, подчиненные неравенству $\sum_i |g_i(z)|^2 \leqslant C_\phi$. В дальнейшем для удобства будем писать $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \ldots)$, $g(z) = (g_1(z), g_2(z), \ldots)$, а условия вроде $\sum_i |f_i(z)|^2 \leqslant 1$ будем записывать как $f \in H^\infty(\mathbb{D}, l^2)$ и $\|f\|_{H^\infty(\mathbb{D},l^2)} \leqslant 1$. Более подробно о классах Харди векторозначных функций можно прочитать в цитированных в [3] статьях. Мы лишь отметим, что результат из статьи [5] дает достаточное условие существования и оценки функции g для l^2-значной функции f. Функции f и h мы будем называть данными задачи об идеалах, функцию g ее решением.

С другой стороны, И. К. Злотникову (см. [4]) удалось установить существование и ограниченность функции g при других метрических условиях. Пусть $\infty > p \geqslant 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in H^\infty(\mathbb{D}, l^p)$, $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ и выполняются неравенства $\|f(z)\|_p \leqslant 1$ и $(\|f(z)\|_p)^\alpha \geqslant |h(z)|$ (при этом $\alpha > 2$ и $\alpha > p$). Тогда найдется функция $g \in H^\infty(\mathbb{D}, l^q)$, подчиненная требованиям $\langle f(z), g(z)\rangle = \sum_i f_i(z) g_i(z) \equiv h(z)$ и $\|g(z)\|_q \leqslant C(p, \alpha)$.

Автор заметки намеревался слить воедино эти два результата для обобщения теоремы И. К. Злотникова. Будем для краткости говорить, что возрастающая функция $\phi : R_+ \to R_+$ является функций типа Трейля, если найдется невозрастающая функция $\psi : R_+ \to R_+$ с $\int_0^\infty \psi(x)dx \leqslant \infty$, такая что $\phi(x) = x^2 \cdot \psi(\log(\frac{1}{x^2}))$. Как раз для таких функций ϕ верен упомянутый в начале раздела результат Трейля [5]. Важно отметить, что функция $\widetilde{\phi(x)} = a \cdot \phi(b \cdot x)$ также будет функцией типа Трейля.

Теперь перейдем к более общим формулировкам. Будем говорить, что для банаховой решетки последовательностей E разрешима ϕ-задача об идеалах, если из неравенств $\phi(\|f(z)\|_E) \geqslant |h(z)|$, $z \in \mathbb{D}$, и $\|f\|_{H^\infty(E)} \leqslant 1$ следует существование такой функции $g \in H^\infty(E')$, что

$\langle f, g\rangle = h$, $\|g\|_{H^\infty(E')} \leqslant C(\phi, E)$. Под E' мы подразумеваем порядково-сопряженную с E решетку последовательностей.

Таким образом, Трейль установил разрешимость ϕ-задачи об идеалах для большого класса функций ϕ, убывающих около нуля немного быстрее, чем x^2 (вероятно, этот класс покрывает все допустимые ϕ, смотри об этом в [5]), но рассматривал лишь $E = l^2$. Злотников в своих статьях (например, [4]) перенес этот результат на другие E с нетривиальной вогнутостью, но лишь в случае $\phi = x^\alpha$. Первая теорема этой заметки немного углубляет результат Злотникова.

Теорема 1. *Если E — q-вогнутая решетка со свойством Фату для $1 \leqslant q \leqslant 2$, то задача об идеалах для E разрешима для функций типа Трейля ϕ. Для $2 \leqslant q < \infty$ задача об идеалах разрешима с $\phi \circ x^{\frac{q}{2}}$, где ϕ снова типа Трейля.*

Замечание про функции со вторым непрерывным аргументом. Итак, мы знаем некоторые достаточные условия разрешимости задачи об идеалах для данных h и f, когда $f(z)$ является вектором в банаховых пространствах последовательностей. Однако во многих случаях интересна более общая постановка задачи. В ней мы возьмем функцию $f \in H^\infty(\mathbb{D}, U)$, где U - некое банахово пространство, и попробуем отыскать функцию $g \in H^\infty(\mathbb{D}, U^*)$ со свойством $\langle f(z), g(z)\rangle = h(z)$. Автору не были известны какие-то позитивные результаты о разрешимости для более общих банаховых пространств, в связи с чем сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $U = L^p$ и для пространства $E = l^p$ разрешима ϕ-задача об идеалах. Тогда она разрешима и для U.*

Доказательство данной теоремы явно дает понять, что таких пространств U намного больше. Вероятно, к ним относятся все симметричные решетки функций на отрезке $(0, 1)$.

§2. Более грубые оценки решений

В это разделе мы попробуем объединить результат Злотникова о разрешимости задачи об идеалах при оценке данных в разных метриках с результатом Джорди Пау (Jordi Pau) [2], содержащим совершенно иной подход к достаточным условиям в задаче об идеалах. Дело в том, что для существования решения задачи в пространстве H^∞ между функциями f и h должно быть поточечное неравенство; результат

Пау предлагает отвергнуть поточечное неравенство и посмотреть, что можно требовать от решений в такой ситуации. Нашей целью (кроме ознакомления) все еще будет внедрить в его теорему оценки в других метриках с помощью техники неподвижной точки.

Результат Пау требует некоторых предварительных объяснений. Для начала, выберем произвольное число $\alpha > 0$ и определим область $\Gamma_\alpha(\theta) = \{z \in \mathbb{D} : |e^{i\theta} - z| \leqslant (1+\alpha)(1-|z|)\}$. Данная область исключает точки, из которых к $e^{i\theta}$ можно было бы провести прямые, слишком близкие к касательным к единичной окружности.

Рассмотрим новый вид функций, чем-то аналогичный функциям Трейля. Для удобства будем звать их функциями типа Пау.

Для того, чтобы ϕ имела тип Пау, необходима функция k с условием принадлежности пространству $\in L^1((0,1), \frac{|\log x| dx}{x})$ (то есть должен сходиться интеграл $\int_0^1 \frac{k(x)|\log x| dx}{x}$), также k должна быть неубывающей функцией.

Теперь мы можем определить функцию ψ равенством $\psi(x)^2 = k(x) \cdot \int_0^x \frac{k(t)|\log t| dt}{t}$, после чего наконец определим $\phi(x) = x^2 \cdot \psi(x^2)$.

Помимо этого нам необходимо определить для функции f (заданной на $\mathbb{D}$) некасательную максимальную функцию

$$M_\alpha f(e^{i\theta}) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(e^{i\theta})} \{|f(z)|\}.$$

Теперь сформулируем теорему Пау.

Теорема 3. *Пусть $f \in H^\infty(l^2), \|f(z)\|_2 \leqslant 1$. Пусть также $h \in H^\infty$ и для некоего $\alpha > 0$ и функции ϕ типа Пау верно $M_\alpha[\frac{h}{\phi(\|f\|_2)}] \in L^p(\mathbb{T})$. Тогда существует функция $g \in H^p(l^2)$ с условиями $\|g\|_{H^p(l^2)} \leqslant C, \langle f(z), g(z) \rangle = h(z)$.*

Данная теорема идет несколько вразрез с рассуждением в работе [3] о том, что решения имеет смысл искать лишь в $H^\infty(l^2)$, однако позволяет обобщить теорему оттуда (о чем мы поговорим позже).

Теперь мы попробуем техникой Злотникова обобщить эту теорему на отличные от l^2 пространства "данных".

Теорема 4. *Пусть E, F, EF - банаховы решетки последовательностей, удовлетворяющие условию Фату. Предположим, что для каждой функции $f \in H^\infty(E)$ и функции $h \in H^\infty$, для которых верны утверждения $\|f(z)\|_E \leqslant 1$ и $M_\alpha[\frac{h}{\phi(\|f\|_E)}] \in L^p(\mathbb{T})$, можно найти* *функцию* $g \in H^p(E')$ *со свойствами* $\|g\|_{H^p(E')} \leqslant C$ *и* $\langle f(z), g(z)\rangle = h(z)$. *Тогда тем же свойством обладает и EF.*

Из этой теоремы легко вывести, что аналог теоремы Пау верен для всех q-вогнутых банаховых пространств Кёте последовательностей со свойством Фату. Более подробно это будет рассказано в разделе о доказательствах.

Таким образом, мы “приспособили” теорему Пау к случаю q-вогнутых решетки последовательностей. Рассуждения, аналогичные использованным в доказательстве теоремы 2, позволяют обобщить ее и на L^s-значные аналитические функции. Сформулируем все это в виде теоремы, похожей на теорему 1.

Теорема 5. *Пусть* E — q*-вогнутая банахова решетка последовательностей со свойством Фату либо* E *является* q*-вогнутым пространством* L^p *с* $1 \leqslant p < \infty$. *Если нам дано число* $\alpha > 0$, *возрастающая положительная функция* ϕ *(при* $1 \leqslant q \leqslant 2$ *функция* ϕ *должна быть типа Пау, при* $q > 2$ *нужно равенство* $\phi = \psi \circ x^{\frac{q}{2}}$, *где функция* ψ *должна быть типа Пау) и функции* $f \in H^\infty(E)$ *и* $h \in H^\infty$ *обладают свойством* $M_\alpha[\frac{h(\cdot)}{\phi(\|f(\cdot)\|)}] \in L^s(\mathbb{T})$, *то будет существовать аналитическая* E'*-значная функция* g, *обладающая свойством* $\langle f(z), g(z)\rangle \equiv h(z)$.

При этом $g \in H^s(E')$ *и* $\|g\|_{H^s(E')} \leqslant C(\phi, E, \|M_\alpha[\frac{h(\cdot)}{\phi(\|f(\cdot)\|)}]\|_{L^s(\mathbb{T})})$.

§3. Отказ от ограниченности

Итак, мы уже отказывались от поточечных неравенств для данных функций f и h, и отказывались от требования $g \in H^\infty(E')$. Однако почему бы не пойти еще дальше, и не отказаться от принадлежности пространству H^∞ даже и для f? Этому вопросу была посвящена одна из теорем в работе [3]. Опуская некоторые детали, в той статье удалось установить следующий факт.

Теорема 6. *Допустим, что* U *– банахово пространство,* X *– пространство Кёте заданных на окружности функций (например,* $X = L^p(\mathbb{T})$*) и* $\beta > 1$. *Определим решетки* $Y = X^{\beta-1}$ *и* $Z = X^\beta$, *и потребуем чтобы* X, Y, Z *были банаховыми. Тогда возможность по данным функциям* $f \in X_A(U)$, $h \in Z_A$, *связанных условиями* $|h(z)| \leqslant \|f(z)\|_U$ *и* $\|f\|_{X_A(U)} \leqslant 1$, *найти решение задачи об идеалах – функцию* $g \in Y_A(U^*)$ *с условиями* $\|g\| \leqslant C(U)$ *и* $\langle f(z), g(z)\rangle \equiv h(z)$ *не зависит от* X.

В той работе было сформулировано несколько требований к решетке X (позволяющих брать там аналитическую часть решетки и рассматривать внешние функции), и подходящие пространства X назывались "правильными". В дальнейшем в этой работе X тоже будет считаться "правильным", если не сказано иное. Пространство V будет считаться имеющим предсопряженное, чтобы не было вопросов о существовании слабых граничных значений аналитических функций.

Мы хотим объединить результат Пау и в эту теорему тоже. При этом некоторую проблему в данном вопросе представляет то, что функция ϕ не обязательно является функцией вида x^α. В случае x^α условия $f \in X$ и $|h| \leqslant |f|^\alpha$ означают $h \in X^\alpha$, но можно ли разумно определить $\phi(X)$ для решетки X, не настолько очевидно. Подобное кажется достаточно интересной задачей, позволяющей добавить в формулировки теорем нечто вроде пространств Орлича. Например, если ограничиться случаем $X = L^p$ и брать ϕ с условием удвоения в нуле, то все вполне ясно и сводится к пространствам Орлича. Тем не менее, ограничимся пока степенными функциями ϕ.

Замечание. У такого ограничения может быть недостаток, так как если у нас есть принадлежность функции $M_\theta[\frac{h}{\|f\|_V^\alpha}]$ какому-нибудь из пространств L^s, то иногда можно просто-напросто уменьшить α и получить поточечное неравенство.

Для объединения результатов, мы по аналогии с [3] *сформулируем* $S_{X,s,p}$ *задачу об идеалах для пространства* V *следующим образом.*

Для произвольной функции $f \in X_A(\mathbb{D}, V)$ и функции $h \in Y_A(\mathbb{D})$, $Y = X^s$, со свойствами $\|f\|_{X_A(V)} \leqslant 1$ и $\|M_a(\frac{h}{\|f\|_{V^*}^s})\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant 1$ должно найтись решение $g \in Z_A(V^*)$ со свойствами $\|g\|_{Z_A} \leqslant C(V)$ и $\langle f(z), g(z)\rangle = h(z)$.

По определению $S_{t,s,p}$-задачей является $S_{L^t,s,p}$-задача.

В работе [3] было $Z = X^{s-1}$ и требовалось $s \geqslant 1$, но в данной постановке естественно ожидать зависимость Z от p. Как и в той работе, нам хочется установить независимость разрешимости от вида решетки X. Довольно ясно, что самое жесткое условие накладывает вариант $X = L^\infty$, так как с помощью техники внешних функций из него легко вывести все остальные, и содержательным представляется движение в обратную сторону.

Теорема 7. *Пусть решетки* $X, Y = X^s$ *и* $Z = L^p \cdot X^{s-1}$ *являются банаховыми. Тогда из разрешимости* $S_{\infty,s,p}$*-следует разрешимость*

S_X, s, p-задачи для произвольного X. Из разрешимости $S_{X,s,p}$-задачи следует разрешимость $S_{r,s,p}$ задачи при $r \geqslant s$. В случае, если V сопряжено с сепарабельным пространством, из разрешимости $S_{s,s,p}$-задачи следует разрешимость $S_{\infty,s,p}$-задачи.

§4. Доказательства

Доказательство теоремы 1.

Это доказательство во многом повторяет рассуждения И.К. Злотникова в работе [4] и упрощения его рассуждений с помощью обобщения теоремы Ки Фана–Какутани из работы [1], так что лишь наметим основные его моменты.

Идея заключается в том, что q-вогнутую банахову решетку последовательностей E можно представить в виде $l^q F$, где F - некая банахова решетка последовательностей, также со свойством Фату (доказательство есть в цитированных выше работах, не останавливаемся на нем). Более того, если $q \leqslant 2$, то $l^q = l^2 l^t$ для некоего $t \geqslant 1$. Таким образом, нам достаточно установить следующий результат.

Пусть даны функции $f \in H^\infty(EF), h \in H^\infty$, при этом $|h(z)| \leqslant \|f(z)\|, z \in \mathbb{D}$. E, F, EF в данном случае являются банаховыми решетками последовательностей, обладающими свойством Фату. Предположим, что для решетки E разрешима ϕ-задача об идеалах, тогда она разрешима и для EF.

Не умаляя общности, $\|f\|_{H^\infty(EF)} \leqslant 1$. Предположим сначала, что носитель фунции f совпадает с $\mathbb{D} \times \{1, 2, \ldots n\}$, то есть

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), 0, 0, \ldots).$$

Сделаем измеримое разложение функции f на окружности, $f = uv, u \in L^\infty(E), v \in L^\infty(F), \|u\|_{L^\infty(E)} \leqslant 1, \|v\|_{L^\infty(F)} \leqslant 1$. Сделать его можно с помощью приближения функций ступенчатыми и перехода к пределу (конечномерные банаховы решетки автоматически обладают свойством Фату). При этом $\log u, \log v \in L^1$.

Далее наша цель – хорошая факторизация функции f, основанная на обобщении теоремы Ки Фана–Какутани (описанном в [1]). Мы хотим представить f в виде $f = a \cdot \frac{f}{a}$ с $\frac{f}{a} \in H^\infty(E)$, затем найти для этой дроби решение g задачи об идеалах (то есть получить $\langle \frac{f}{a}, g(z)\rangle \equiv h(z)$), и при этом так, чтобы $\frac{g}{a} \in H^\infty((EF)')$.

Рассмотрим выпуклый компакт $B = \{\log w \,|\, v \leqslant w, \|w\|_F \leqslant 2\}$ со слабой топологией пространства L^1 (компактность следует из теоремы

Данфорда–Петтиса). По функции w оттуда построим покоординатную внешнюю функцию $\widetilde{w} = \exp[\log w + iH\log w]$ и рассмотрим функцию $\frac{f}{\widetilde{w}}$ вместе с h как данные ϕ-задачи об идеалах для решетки E. Так как $|h(z)| \leqslant \phi(2\cdot\|f(z)\|) = \widetilde{\phi}(\|f(z)\|)$, то мы можем рассмотреть всевозможные решения $g \in H^\infty(E') = H^\infty((EF)'F)$ этой задачи об идеалах. Все они удовлетворяют условию $\langle \frac{f(z)}{\widetilde{w}(z)}, g(z)\rangle = h(z)$. Наша цель в том, чтобы скинуть множитель на g и не сильно увеличить его норму, чтобы не "вылететь" из H^∞.

Для этого мы рассмотрим всевозможные функции $\log b \in B$ со следующим свойством: $\|\frac{g}{b}\|_{L^\infty((EF)')} \leqslant (1+\varepsilon)$ (их существование следует из формулы сопряженного к произведению решеток).

Мы получили композицию из двух многозначных отображений, действующих из B в себя. То, что эти отображения имеют выпуклые образы точек и замкнутый график, можно установить точно так же, как и в аналогичной теореме в [1]. Благодаря этому, с помощью упомянутого обобщения теоремы Ки Фана–Какутани мы получаем неподвижную точку $b = w$, то есть $\|\frac{g(z)}{\widetilde{w}(z)}\| \leqslant (1+\varepsilon)$. Более подробно обоснование применения указанной теоремы можно найти в [1]. Используя компактность множества B, можно убрать ε.

Итак, мы получили нужный результат в случае конечного носителя функции f. Давайте откажемся от этого предположения. Напомним, что q-вогнутость решетки X эквивалентна неравенству $(\sum_i \|x_i\|_X^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant M\|(\sum_i |x_i|^q)^{\frac{1}{q}}\|_X$. Мы хотим установить, что для банаховой решетки поледовательностей X разрешима ϕ-задача об идеалах, если она разрешима с равномерными оценками для функций $f \in H^\infty(\mathbb{D}, X)$ с носителем в $\mathbb{D} \times \{1, \dots n\}$.

Снова поступаем как в [4]. Возьмем функцию $f(z) \in H^\infty(X)$ с не обязательно конечным носителем и рассмотрим функции $f_n(z) = f(z)\cdot\chi_{\{1,2,\dots n\}}$. Сузим их на диск $\nu\cdot\mathbb{D}, \nu < 1$. Так как q-вогнутые решетки обладают порядковой непрерывностью нормы, мы можем считать, что $\|f_n(z)\|_X \leqslant \|f(z)\|_X \leqslant \|f_n(z)\|_X(1-\delta)$ где число δ мы выберем позже (надо взять ν достаточно близким к единице, а n достаточно большим). Далее, для достаточно малого ε рассмотрим отдельно точки, где $|h(z)| \leqslant \varepsilon$ и где $|h(z)| > \varepsilon$. Возьмем теперь

$$\widetilde{f_n}(z) = \Big(f_1(z), \dots f_n(z), \frac{\varepsilon}{\|e_{n+1}\|}, 0, 0, \dots\Big).$$

Тогда $M\|\widetilde{f_n}(z)\| \geqslant (\|f_n(z)\|_X^q + \varepsilon^q)^{\frac{1}{q}}$. Тогда для точек, где $\|h(z)\| \leqslant \varepsilon$, неравенство $\phi(M\cdot\|\widetilde{f_n}(z)\|_X) \geqslant |h(z)|$ заведомо выполнено, а для остальных z оно выполнено при правильном выборе числа δ (в зависимости от ε), тогда найдется $g \in H^\infty(X')$, $\|g\|_{H^\infty(X')} \leqslant C, \langle\widetilde{f_n}(z), g(z)\rangle = h(z)$. Тогда функция $\langle f_n(z), g(z)\rangle$ близка к $h(z)$ в H^∞-норме. Устремляя n к бесконечности, а ν к единице и выбирая среди решений g сходящуюся равномерно на компактах подпоследовательность, мы получим решение.

Теорема 1 почти доказана, но мы упустили рассуждение, позволяющие перейти от l^2 к l^p с $p > 2$. Делается это совсем несложно: пусть имеются данные f и h и условие $\phi(\|f(z)\|_p) \geqslant |h(z)|$. Используем внешне-внутреннюю факторизацию: $f = f_{\text{inner}} \cdot f_{\text{outer}}$, точнее $(f_1, f_2, \ldots) = (f_{\text{inner},1} \cdot f_{\text{outer},1}, f_{\text{inner},2} \cdot f_{\text{outer},2}, \ldots)$.

Тогда распишем неравенство

$$|h(z)| \leqslant \phi(\|f(z)\|_p) = \phi\Big(\Big(\sum_k |f_k(z)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) = \phi\Big(\Big(\sum_k |f_{\text{inner,k}} \cdot f_{\text{outer,k}}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)$$
$$\leqslant \phi\Big(\Big(\sum_k (|f_{\text{inner,k}} \cdot f_{\text{outer,k}}^{\frac{p}{2}}|)^2\Big)^{\frac{1}{p}}\Big).$$

Мы можем рассмотреть функцию $f_{\text{inner}} \cdot f_{\text{outer}}^{\frac{p}{2}} \in H^\infty(l^2)$, решить для нее и h задачу об идеалах с функцией $\widetilde{\phi} = \phi \circ x^{\frac{2}{p}}$. Получим $\langle(f_{\text{inner}} \cdot f_{\text{outer}}^{\frac{p}{2}}, g\rangle = h$, то есть

$$\langle f, g \cdot f_{\text{outer}}^{\frac{p-2}{2}}\rangle = h.$$

С помощью неравенства Гёльдера легко убедиться, что это решение имеет нужную оценку в метрике l^q.

Доказательство теоремы 2. Возьмем функцию $f \in H^\infty(L^p)$ и функцию h с условиями $\|f\|_{H^\infty(L^p)} \leqslant 1, \|f(z)\|_p \leqslant 1$, $\phi(\|f(z)\|_p) \geqslant |h(z)|$. Далее рассмотрим последовательные диадические разбиения отрезка $(0,1)$ на множества $E_0^k, E_1^k, \ldots E_{2^k-1}^k, k \geqslant 1$, и построим последовательность f_k, полученную при каждом z усреднением по соответствующему диадическому интервалу. Легко понять, что $f_k(z) \to f(z)$ в L^p при каждом z.

С такой конструкцией функции f_k начинают действовать уже в решетку $l_n^p \subset l^p$; в таком случае “допишем” к вектору $f_{k,0}(z), f_{k,1}(z)$, $\ldots f_{k,2^k-1}(z)$ компоненту δ, получим $\widetilde{f} = f_{k,0}(z), f_{k,1}(z), \ldots f_{k,2^k-1}(z), \delta$.

Далее вместо круга $\mathbb{D}$ будем рассматривать более узкий круг $r \cdot \mathbb{D}$ (пересадим функции с помощью замены z на $r \cdot z$). В этом круге, как нетрудно понять, $\|f_k - f\|_p \to 0$ равномерно по z. Ясно, что $\|\widetilde{f(z)}\| = \|f(z)\| + \varepsilon(z,\delta)$, причем $\inf_{z \in \mathbb{D}} \varepsilon(z,\delta) > 0$ и $\sup_{z \in \mathbb{D}} \varepsilon(z,\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теперь мы можем для этих "расширенных" векторов выбрать функции $g_{k,r} \in H^\infty(L^q)$ (как обычно, q сопряженный для p показатель), постоянные на отрезках диадического разбиения и со свойствами $\|g_{k,r}(z)\|_q \leqslant C, z \in \mathbb{D}$ и $\langle \widetilde{f(z)} \cdot, g_{k,r}(z,\cdot)\rangle = h(z)$. Далее мы устремим r к единице, а δ к нулю. Так как шар пространства $H^\infty(L^q)$ w^*-компактен (объяснения есть, например, в [**?**]) и топология там совпадает с топологией равномерной сходимости на компатах в круге, мы можем считать, что $g_{k,r} \to g$ равномерно на компактах. Теперь мы фиксируем любую точку z внутри круга, и с помощью предельного перехода получаем $\langle f(z,\cdot), g(z,\cdot) = h(z)$. □

Любопытно заметить, что требование $U = L^p$ явно избыточно.

Доказательство теоремы 4. Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства теоремы 1, так что мы обрисуем его лишь в очень общих чертах.

Мы снова сначала рассмотрим лишь функции f с конечным носителем (это не обязательно, но позволит меньше беспокоиться о типах сходимости) и с помощью усиленной теоремы Ки Фана–Какутани факторизуем ее таким образом, чтобы одно из решений задачи об идеалах для одного из множителей позволило получить решение для функции f. От допущения конечного носителя снова можно отказаться с помощью приближения такими функциями и выбора слабой предельной точки последовательности решений. □

Доказательство теоремы 5. Для доказательства первой части теоремы снова используем то, что q-вогнутая решетка является произведением решетки l^q и некоей другой, так что по теореме 4 мы можем ограничиться лишь решетками l^q. Для $1 \leqslant q \leqslant 2$ результат прямо следует из теорем 3 и 4.

Для пространств l^s с $\infty > s > 2$ применим уже известные нам рассуждения: берем $f \in H^\infty(l^s)$ и делаем внешне-внутреннюю векторную факторизацию функции f. Наша цель – показать, что $\psi \circ x^s$ будет подходящей функцией, при условии, что ψ – функция типа Пау.

Из $M_\alpha[\frac{h}{\psi(\|f\|_s^{\frac{s}{2}})}] \in L^p(\mathbb{T})$ следует $M_\alpha[\frac{h}{\psi(\|f_{\text{inner}}\cdot f_{\text{outer}}^{\frac{s}{2}}\|_2)}] \in L^s(\mathbb{T})$. Используя теорему 3, мы можем взять решение $g \in H^p(l^2)$ задачи об идеалах с данными $f_{\text{inner}} \cdot f_{\text{outer}}^{\frac{s}{2}}$ и h.

Так как g – решение, мы имеем равенство $\langle f_{\text{inner}} \cdot f_{\text{outer}}^{\frac{s}{2}}, g(z)\rangle = h(z)$, тогда $\langle f, g(z) \cdot f_{\text{outer}}^{\frac{s}{2}-1}\rangle = h(z)$. Данная функция лежит в пространстве $H^p(l^{s'})$ в силу неравенства Гёльдера.

Во второй части теоремы нужно перейти к непрерывным аналогам пространств. Это нетрудно сделать с помощью приближений усреднениями, аналогично теореме 2. □

Доказательство теоремы 7. Мы только наметим доказательство теоремы 7, так как оно в основном аналогично рассуждению из теоремы 3 работы [3].

1) Давайте перейдем от разрешимости задачи S_∞, s, p к разрешимости задачи S_X, s, p.

Пусть нам даны функции $f \in X_A(V)$ и $h \in Y_A(\mathbb{T})$.

Построим для функции f “скалярную внешнюю функцию” (подробнее о них рассказывается в цитированной работе) f_o. Рассмотрим теперь задачу об идеалах для данных $\frac{f}{f_o}$ и $\frac{h}{f_o^s}$. По условию S_∞, s, p, она является разрешимой.

Возьмем решение задачи с такими данными $g \in H^p(V^*)$. Чтобы получить решение задачи $S_{X,s,p}$ с исходными данными, возьмем функцию $g \cdot f_o^{s-1}$. Легко понять, что она нам подходит, ведь из равенства $\langle \frac{f}{f_o}, g\rangle = \frac{h}{f_o^s}$ очевидно следует равенство $\langle f, g \cdot f_o^{s-1}\rangle = h$.

Условие $g \cdot f_o^{s-1} \in (X^{s-1} \cdot L^p)_A$. также проверяется без всякого труда.

2) Теперь перейдем от разрешимости $S_{X,s,p}$ к $S_{r,s,p}$, при условии $r \geqslant s$. Берем данные f, h и используем известный приём с теоремой Лозановского – пусть $\|f\|_{V^*}^r = uv, u \in X, v \in X'$, рассмотрим $\widetilde{v}$ – построенную по v внешнюю функцию.

Рассмотрим теперь как данные для $S_{X,s,p}$ функции $\frac{f}{\widetilde{v}^{\frac{1}{r}}}$ и $\frac{h}{v^{\frac{s}{r}}}$. Берем решение этой задачи $g \in (L^p \cdot X^{s-1})_A$, для которого $\langle \frac{f}{\widetilde{v}^{\frac{1}{r}}}, g\rangle = \frac{h}{v^{\frac{s}{r}}}$ и тогда $\langle f, g \cdot v^{\frac{s-1}{r}}\rangle = h$.

3) Почти дословно повторяет рассуждения в третьем пункте теоремы 3 работы [3]. □

Список литературы

1. С. В. Кисляков, А. А. Скворцов, *Теоремы о неподвижной точке и классы Харди.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **512** (2022), 95–115.
2. Jordi Pau, *On a generalized corona problem on the unit disc.* — Proceedings of the American Mathematical Society **133** (2005), 167–174.
3. С. В. Кисляков, А. А. Скворцов, *Различные метрики в задаче об идеалах алгебры H^∞.* — Алгебра и анализ **35**, No. 5 (2023), 99–116.
4. И. К. Злотников, *Задача об идеалах алгебры H^∞ в случае некоторых пространств последовательностей.* — Алгебра и анализ **29**, No. 5 (2017), 51–67.
5. S. Treil, *The problem of ideals of H^∞: Beyond the exponent 3/2.* — J. Funct. Analysis **253** (2007), 220–240.

Skvortsov A. A. Estimates in the ideal problem for the algebra H^∞.

Previous results by the author and S. V. Kisliakov (Algebra i Analiz, **35**, No. 5 (2023), 99–116) about the independence of the solvability of the ideal problem on the nature of spaces in which it is posed are extended to incorporate the context of the work by S. R. Triel (J. Funct. Analysis, **253** (2007), 220–240) and J. Pau (Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 167–174).

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
набережная реки Фонтанки 27,
191023, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: anonimus8x8@gmail.com

Поступило 28 ноября 2024 г.