Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 537, 2024 г.

О. В. Сильванович, Н. А. Широков

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Пусть E – счётное множество попарно дизъюнктных сегментов вещественной оси, сходящееся к $+\infty$ и к $-\infty$, $H^s(E)$ – класс Гёльдера комплекснозначных функций, заданных на E, $0 < s < 1$, $f \in H^s(E) \Leftrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant c_f|x_2 - x_1|^s$, при $x_1, x_2 \in E$. Через $\Lambda^s(E)$ обозначим подпространство функций из $H^s(E)$, ограниченных на $E, f \in \Lambda^s(E)$, если $f \in H^s(E)$ и существует постоянная c'_f такая, что $|f(x)| \leqslant c'_f, x \in E$. Через T_σ обозначим множество целых функций экспоненциального типа не выше σ, ограниченных на оси $\mathbb{R}$,

$$F_\sigma \in T_\sigma \Leftrightarrow |F_\sigma(x+iy)| \leqslant c_{F_\sigma} e^{\sigma|y|}.$$

В случае, когда длины отрезков из множества E и длины дополнительных к ним интервалов были соизмеримы, класс $\Lambda^s(E)$ и более общие классы были охарактеризованы в терминах скорости приближения функции $f \in \Lambda^s(E)$ на множестве E функциями из классов T_σ при возрастании σ в работах [1–4]. Шкала приближения оказывалась неравномерной, у концов отрезков приближение должно быть лучше, чем в окрестности середин отрезков для того, чтобы прямые теоремы приближения согласовывались с обратными. Выражение для скорости приближения задавалось с помощью функции, определённой Б. Я. Левиным в работах [5, 6], которую далее мы будем обозначать символом $f_{E,\sigma}(z)$. Получение оценки приближения функциями из класса T_σ в работах [1–3] и доказательство обратной теоремы в [4] потребовали выяснения поведения функции Б. Я. Левина $f_{E,\sigma}(z)$ в окрестностях отрезков из множества E в случае соизмеримости этих отрезков и дополнительных к ним интервалов.

В работе [7] поведение функции Б. Я. Левина $f_{E,\sigma}(z)$ было исследовано для некоторых типов множеств E, являющихся объединением дизъюнктных отрезков вещественной оси, длины которых стремятся

Ключевые слова: целые функции экспоненциального типа, классы Гёльдера, аппроксимация.

Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда 23-11-00171, `https://rscf.ru/project/23-11-00171/`.

к нулю на бесконечности. В настоящей работе мы показываем, что обратная теорема приближения целыми функциями экспоненциального типа из классов T_σ, шкала аппроксимации в которых построена с помощью функции Б. Я. Левина $f_{E,\sigma}(z)$, так же, как в статьях [1–4], может задавать класс $\Lambda^s(E)$.

1. Определения и формулировки. Опишем класс множеств E, которые будут фигурировать в формулировках. Далее $a_k < b_k < a_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, $I_k = (a_k, b_k)$, $J_k = [b_k, a_{k+1}]$, $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} J_k$. Зададим $\alpha > 0$, предполагаем, что если $\bar{I}_k \subset [2^m, 2^{m+1}]$ или $\bar{I}_k \subset [-2^{m+1}, -2^m]$, то $|I_k| = 2^{-m\alpha}$. Число n_0 зависит от α, при увеличении величины α число n_0 возрастает. Предполагаем, что задана постоянная $c_1 > 1$ такая, что при $J_k \subset [2^m, 2^{m+1}]$ или $J_k \subset [-2^{m+1}, -2^m]$ выполняется соотношение $2^{n_0} \cdot 2^{-m\alpha} \leqslant |J_k| \leqslant c_1 \cdot 2^{n_0} \cdot 2^{-m\alpha}$.

Предполагаем далее, что при $n \geqslant n_0$ числа 2^n совпадают с каким-то a_k, а числа -2^n совпадают с каким-то $b_l, b_{-1} = -2^{n_0}, a_0 = -1, b_0 = 1, a_1 = 2^{n_0}$.

Функция Б. Я. Левина обладает следующими свойствами [5, 6]:

$f_{E,\sigma}(z)$ субгармонична на всей плоскости $\mathbb{C}$, гармонична в $\mathbb{C} \setminus E$;

$f_{E,\sigma}(z) > 0, z \in \mathbb{C} \setminus E, f_{E,\sigma}(x) = 0, x \in E; f_{E,\sigma}(\bar{z}) = f_{E,\sigma}(z)$ и $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{f_{E,\sigma}(z)}{|z|} = \sigma$.

Для любой функции g, субгармонической на $\mathbb{C}$ и удовлетворяющей условиям $g(x) \leqslant 0, x \in E$, и $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{g(z)}{|z|} \leqslant \sigma$, справедливо соотношение $g(z) \leqslant f_{E,\sigma}(z), z \in \mathbb{C}$.

Конструктивное описание класса $H^s(E)$ для рассматриваемого класса множеств E с помощью приближений целыми функциями из классов T_σ может быть получено с применением шкалы приближения, построенной по функции Б. Я. Левина $f_{E,\sigma}(z)$. Для $h > 0$ положим

$$L_h = \{z \in \mathbb{C} : f_{E,1}(z) = h\}$$

и пусть $\rho_t(z) = \operatorname{dist}(z, L_t)$. В [7] была доказана следующая теорема.

Теорема А. *Существует постоянная $\nu(\alpha) > 0$ такая, что при $n_0 \geqslant \nu(\alpha)$ найдутся постоянные c_j, $c'_j : j = 2, 3$, и c^*_4, зависящие от α и E*

такие, что при $x \in J_k$, $0 < t \leqslant c_4^*|I_k|$, $k \in \mathbb{Z}$, *справедливы оценки*

$$c_2\left(\sqrt{l_k^2-(x-\xi_k)^2}+t\right)\cdot\frac{t}{|I_k|}\leqslant \rho_t(x)\leqslant c_3\left(\sqrt{l_k^2-(x-\xi_k)^2}+t\right)\cdot\frac{t}{|I_k|}, \tag{1}$$

и при $c_4^*|I_k| < t \leqslant 1$ *выполнено соотношение*

$$c_2\prime\cdot t\leqslant \rho_t(x)\leqslant c_3\prime\cdot t. \tag{2}$$

В формуле (1) $l_k = \frac{1}{2}|J_k|$, $J_k = [b_k, a_{k+1}]$, $\xi_k = \frac{1}{2}(b_k + a_{k+1})$.

В настоящей работе мы установим следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть для функции* $f : E \to \mathbb{C}$ *для любого* $\sigma \geqslant 1$ *найдется функция* $F_\sigma \in T_\sigma$ *такая, что с постоянной* $\tilde{c}_f$, *не зависящей от* σ, *справедлива оценка*

$$|f(x)-F_\sigma(x)|\leqslant \tilde{c}_f\rho^s_{\frac{1}{\sigma}}(x),\ x\in E. \tag{3}$$

Тогда $f \in \Lambda^s(E)$.

Доказывать теорему 1 будем по методу С. Н. Бернштейна. Для этого понадобится аналог неравенства С. Н. Бернштейна, который мы выведем из следующего результата.

Теорема 2. *Пусть* $F_\sigma \in T_\sigma$ *и* $F_\sigma(x) \leqslant \rho^s_{\frac{1}{\sigma}}(x)$, $x \in E$. *Тогда с некоторой постоянной* $\hat{c}$, *не зависящей от* σ *и* x, *справедлива оценка*

$$|F_\sigma(z)|\leqslant \hat{c}\rho^s_{\frac{1}{\sigma}}(x),\ z\in\mathbb{C},\ |z-x|\leqslant \rho_{\frac{1}{\sigma}}(x),\ x\in E. \tag{4}$$

2. Доказательство теоремы 2. Нам понадобится еще одна функция и еще один результат из работ Б. Я. Левина [5, 6]. Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$ – функция, заданная на $\mathbb{R}, S_\sigma(\varphi)$ – множество всех функций g, субгармонических на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и удовлетворяющих условиям $g(x) \leqslant \varphi(x), x \in \mathbb{R}$, и

$$\varlimsup_{z\to\infty}\frac{g(z)}{|z|}\leqslant\sigma.$$

Тогда в случае, когда для какого-то $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ выполняется условие $\sup\limits_{g\in S_\sigma(\varphi)} g(z_0) < +\infty$, существует единственная функция $M^\sigma_\varphi(z)$, которую далее мы называем мажорантой Б. Я. Левина для класса $S_\sigma(\varphi)$, удовлетворяющая условиям $M^\sigma_\varphi \in S_\sigma(\varphi)$ и для любой функции $g \in S_\sigma(\varphi)$

справедливо соотношение $g(z) \leqslant M^\sigma_\varphi, z \in \mathbb{C}$. Если $\operatorname{supp}\varphi \subset E$ и функция M^σ_φ существует, то M^σ_φ гармонична в $\mathbb{C} \setminus E$ и

$$\varlimsup_{z\to\infty} \frac{M^\sigma_\varphi(z)}{|z|} = \sigma.$$

Пусть $\sigma \geqslant 1, t = \frac{1}{\sigma}, x \in J_k, 0 < t \leqslant c_4^*|I_k|$, где постоянная c_4^* взята из соотношения (1). Обозначим через c_5 постоянную, для которой для любого $y \in J_l, l \in \mathbb{Z}$, выполняется оценка

$$\rho_t(y) \leqslant c_5|I_l|, \quad 0 < t \leqslant c_4^*|I_l|, \tag{5}$$

и будем предполагать, что $c_5 \geqslant \frac{c_3'}{c_4^*}$ (постоянные c_3' и c_4^* взяты из (2)). Пусть $J_k \subset [2^n, 2^{n+1}]$ или $J_k \subset [-2^{n+1}, -2^n]$ и $n \geqslant n_0$. В этом случае положим $q_x = s\log c_5 2^{-\alpha(n-1)}$. Если же $k = -1$ или $k = 0$, то полагаем $q_x = s\log c_5 2^{-\alpha}$.

Положим $g_\sigma(z) = \log|F_\sigma(z)|$. Если $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n-1$, $J_l \subset [2^m, 2^{m+1}]$ или $J_l \subset [-2^{m+1}, -2^m]$, то $g_\sigma(y) \leqslant q_x, y \in J_l$. Если $k = 0$ или $k = -1$, то при всех $l \in \mathbb{Z}$ выполнено $g_\sigma(y) \leqslant q_x$. Приведенные выше неравенства следуют из выбора постоянной c_5 и соотношений (1) и (2). Если $n \geqslant n_0, m < n-1$ и $J_l \subset [2^m, 2^{m+1}]$ или $J_l \subset [-2^{m+1}, -2^m]$, то $|I_l| = 2^{-m\alpha}$, для $y \in J_l$ выполнено $\rho_t^s(y) \leqslant c_5|I_l|$,

$$\begin{aligned} g_\sigma(y) &\leqslant \log\rho_t^s(y) \leqslant s\log\left(c_5 2^{-m\alpha}\right) = s\log\left(c_5 2^{-(n-1)\alpha}\cdot 2^{(n-m-1)\alpha}\right) \\ &= q_x + (n-m-1)\alpha s\log 2 \overset{\text{def}}{=} q_x + \beta\cdot(n-m-1). \end{aligned} \tag{6}$$

Определим функцию $\varphi_x(y)$ следующим образом

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } k=-1 \text{ или } k=0, \\ 0, & \text{если } n \geqslant n_0, \text{ и } m \geqslant n-1, \ y \in J_l, \\ & J_l \subset [2^m, 2^{m+1}] \text{ или } J_l \subset [-2^{m+1}, -2^m], \\ \beta(n-m-1), & \text{если } m < n-1. \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим через $M^\sigma_{\varphi_x}(z)$ мажоранту Б. Я. Левина для функции $\varphi_x(y)$, определенной в (7) для $y \in E$ и $\varphi_x(y) = +\infty$ для $y \in \mathbb{R} \setminus E$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в [7], получаем следующий результат.

Пусть $x \in J_k$. Положим $\tilde{l}_k = \frac{1}{2}\min(|I_k|, |I_{k+1}|), \tilde{b}_k = b_k - \tilde{l}_k, \tilde{a}_{k+1} = a_{k+1} + \tilde{l}_k$. Через Λ_x обозначим эллипс с фокусами в точках b_k и a_{k+1}, проходящий через точки $\tilde{b}_k$ и $\tilde{a}_{k+1}$.

Теорема B. *Существуют постоянные c_6 и c_7, не зависящие от σ и x, такие, что при $z \in \Lambda_x$ справедлива оценка*

$$M^{\sigma}_{\varphi_x}(z) \leqslant c_6\sigma|I_k| + c_7. \tag{8}$$

Из соотношения (7) и предшествующих ему рассуждений следует, что при $y \in E$ имеется неравенство $g_\sigma(y) - q_x \leqslant \varphi_x(y)$. Условие $F_\sigma \in T_\sigma$ влечет соотношение $g_\sigma - q_x \in S_\sigma(\varphi_x)$, поэтому оценка (8) при $z \in \Lambda_x$ дает неравенство

$$g_\sigma(z) \leqslant q_x + M^{\sigma}_{\varphi_x}(z) \leqslant q_x + c_6\sigma|I_k| + c_7. \tag{9}$$

Постоянную c_4^* в теореме A можно уменьшать за счет уменьшения постоянной c_2' и увеличения постоянной c_3' в соотношении (2). Вычисления с применением аналитической геометрии показывают, что при выборе постоянной c_4^* из равенства

$$\left(\frac{c_3^2}{C} \cdot 2^{\alpha+2} + 2^{2\alpha+2}c_3c_1\right) c_4^{*2} = 1,$$

в котором $C = 2^{n_0}$, и для $\tau_k = \left(\frac{1}{2}c_3^2 + 2^{\alpha-1}c_3c_1C\right) \cdot \frac{t^2}{l_k}$ при $0 < t \leqslant 1$ эллипс Λ_k, софокусный с Λ_x и проходящий через точки $b_k - \tau_k$ и $a_{k+1} + \tau_k$, удовлетворяет условию

$$\rho_t(x) \leqslant \operatorname{dist}(x, \Lambda_k),\ x \in J_k, \tag{10}$$

и при этом $\tau_k \leqslant \frac{1}{2}\tilde{l}_k$.

Отобразим область $\mathbb{C} \setminus J_k$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ с помощью функции

$$\xi = \Phi_k(z) = \frac{z - \xi_k}{l_k} + \sqrt{\left(\frac{z - \xi_k}{l_k}\right)^2 - 1}, \tag{11}$$

пусть $z = \Psi_k(\xi)$ – обратная к Φ_k функция.

Для $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ определим функцию $\Xi_{\sigma,k}(\xi)$ равенством

$$\Xi_{\sigma,k}(\xi) = \log|F_\sigma(\Psi_k(\xi))|. \tag{12}$$

Из определения (12) следует, что функция $\Xi_{\sigma,k}(\xi)$ субгармонична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

Отображение Φ_k переводит эллипс Λ_x в окружность $\Gamma_{R_0} = \{\xi : |\xi| = R_0\}$, при этом

$$1 + \frac{1}{C} + \sqrt{\frac{2}{C} + \frac{1}{C^2}} \geqslant R_0 \geqslant 1 + \frac{1}{2^\alpha c_1 C} + \sqrt{\frac{2^{1-\alpha}}{c_1 C} + \frac{1}{2^{2\alpha}}c_1^2 C^2}. \tag{13}$$

Эллипс Λ_k перейдет в окружность Γ_{r_k}, где $r_k = p_k \cdot \frac{t}{|I_k|} + 1$ и $p_k \asymp 1$. Поскольку $\Xi_{\sigma,k}(\xi) = g_\sigma(\Psi_k(\xi))$, то соотношения (6)-(9) влекут оценку

$$\Xi_{\sigma,k}(\xi) \leqslant q_x + c_6 \frac{|I_k|}{t} + c_7 = s\log\left(c_5 2^{-(n-1)\alpha}\right) + c_6\frac{|I_k|}{t} + c_7$$

$$= s\log\left(2^\alpha c_5 |I_k|\right) + c_6 \frac{|I_k|}{t} + c_7, \quad \xi \in \Gamma_{R_0}. \quad (14)$$

Применяя аналитическую геометрию и формулу (11) для отображения $\Phi_k(z)$, получаем, что существуют постоянные c_8 и c_9, не зависящие от k, такие, что справедливы соотношения

$$\operatorname{dist}(x, \Lambda_k) \leqslant c_8 \rho_t(x), \ x \in J_k, \quad (15)$$

$$\min\left(|\xi - \xi_+|, |\xi - \xi_-|\right) \leqslant c_9(|\xi_\pm^2 - 1| + \tau_k)\tau_k, \quad (16)$$

где в (16) $\xi_\pm = \Phi_{k\pm}(x)$, $\xi_+ = \bar{\xi}_-$, $x \in J_k$, $\xi = \Phi_k(z), |z-x| \leqslant c_3(\sqrt{l_k^2 - (x-\xi_k)^2} + t)\frac{t}{|I_k|}$, $\tau_k = \frac{t}{|I_k|}$. Выражения $\Phi_{k\pm}(x)$ имеют следующий смысл:

$$\Phi_{k+}(x) = \lim_{z\to x,\ \mathrm{Im} z>0} \Phi_k(z), \qquad \Phi_{k-}(x) = \lim_{z\to x,\ \mathrm{Im} z<0} \Phi_k(z).$$

Пусть $D_{1,R_0} = \{\xi : 1 < |\xi| < R_0\}$. Определим функции U_k, V_k, W_k, гармонические в D_{1,R_0} и непрерывные в $\bar{D}_{1,R_0}$, их граничными значениями на Γ_{R_0} и Γ_1 :

$$U_k(\xi) = \begin{cases} s\log\left(2^\alpha c_5|I_k|\right), & \xi \in \Gamma_{R_0}, \\ s\log t, & \xi \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (17)$$

$$V_k(\xi) = \begin{cases} c_6\frac{|I_k|}{t} + c_7, & \xi \in \Gamma_{R_0}, \\ 0, & \xi \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (18)$$

$$W_k(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in \Gamma_{R_0}, \\ s\log\left(c_9(\sqrt{|\xi^2-1|} + \tau_k)\right), & \xi \in \Gamma_1. \end{cases} \quad (19)$$

Субгармоничность функции $\Xi_{\sigma,k}(\xi)$ в кольце D_{1,R_0}, условие теоремы 2, соотношения (1), (9), (10), (11), (12), (14), (15), (16) влекут соотношение

$$\Xi_{\sigma,k}(\xi) \leqslant U_k(\xi) + V_k(\xi) + W_k(\xi), \quad \xi \in D_{1,R_0}. \quad (20)$$

Далее по отдельности оценим функции U_k, V_k, W_k.

Оценка функции $U_k(\xi)$. Образ окружности $\{z : |z-x| = \rho_t(x)\}$ при $x \in J_k$ и выбранном значении c_4^* при отображении $\Phi_k(z)$ лежит в кольце D_{1,r_k}, $r_k = 1+p_k \frac{t}{|I_k|} = 1+p_k\tau_k$. При $\xi \in \Gamma_{r_k}$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} U_k(\xi) &= \frac{\log r_k}{\log R_0} s \log(2^\alpha c_5 |I_k|) + \frac{\log \frac{R_0}{r_k}}{\log R_0} s \log t \\ &= \frac{\log r_k}{\log R_0} s \log\left(2^\alpha c_5 \frac{|I_k|}{t}\right) + s\log t \leqslant c\tau_k s \log 2^\alpha c_5 \frac{1}{\tau_k} + s\log t \\ &\leqslant s \log t + c. \qquad (21) \end{aligned}$$

<ins>Оценка функции $V_k(\xi)$</ins>. При $\xi \in \Gamma_{r_k}$ имеем

$$V_k(\xi) = \frac{\log r_k}{\log R_0}(c_6\tau_k^{-1} + c_7) \leqslant c\tau_k(c_6\tau_k^{-1} + c_7) \leqslant c. \qquad (22)$$

<ins>Оценка функции $W_k(\xi)$</ins>. С постоянной c_{10}, не зависящей от $\xi \in \Gamma_1$, k и t, справедлива оценка

$$c_9(\sqrt{|\xi^2-1|} + \tau_k) \leqslant c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|, \ \xi \in \Gamma_1. \qquad (23)$$

Пусть функция $W_{k1}(\xi)$ задается граничными значениями

$$W_{k1}(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in \Gamma_{R_0}, \\ s\log(c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|), & \xi \in \Gamma_1. \end{cases} \qquad (24)$$

Тогда $W_k(\xi) \leqslant W_{k1}(\xi)$ при $\xi \in \bar{D}_{1,R_0}$. При $\xi \in \Gamma_{R_0}$ выполняется неравенство $c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}| \geqslant c_{10}(1-R_0^{-2}) \overset{\text{def}}{=} m^{-1}$.

Определим функцию $V_{k1}(\xi)$ следующим равенством на границе кольца D_{1,R_0}:

$$V_{k1}(\xi) = \begin{cases} s\log m, & \xi \in \Gamma_{R_0}, \\ 0, & \xi \in \Gamma_1. \end{cases} \qquad (25)$$

Функция $s\log(c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|) + V_{k1}(\xi) \overset{\text{def}}{=} V_{k2}(\xi)$ удовлетворяет условиям:

$$V_{k2}(\xi) = s\log(c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|)$$

при $\xi \in \Gamma_1$ и

$$V_{k2}(\xi) = s\log(mc_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|) \geqslant 0$$

при $\xi \in \Gamma_{R_0}$, поэтому $W_{k1}(\xi) \leqslant V_{k2}(\xi)$, $\xi \in \bar{D}_{1,R_0}$. При $\xi \in \Gamma_{r_k}$ выполнено соотношение

$$V_{k1}(\xi) = \frac{\log r_k}{\log R_0} \cdot s\log m \leqslant c\tau_k \cdot s\log m \leqslant c. \qquad (26)$$

Поскольку $V_{k2}(\xi) = V_{k1}(\xi) + s\log(c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|)$, неравенство (26) влечет оценку

$$W_{k1}(\xi) \leqslant s\log(c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|) + c, \quad \xi \in \Gamma_{r_k}. \tag{27}$$

В силу гармоничности функции $W_{k1}(\xi) - s\log(c_{10}|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}|)$ в кольце D_{1,R_0} и определения (24) неравенство (27) справедливо в кольце D_{1,r_k}. В силу соотношений (20), (21), (22), (27) получаем оценку

$$\Xi_{\sigma,k}(\xi) \leqslant s\log|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}| + c, \quad \xi \in D_{t,r_k}. \tag{28}$$

С некоторой постоянной c_{11}, не зависящей от k и ξ, справедливо соотношение

$$|1-(1-\tau_k)\xi^{-2}| \leqslant c_{11}(|\xi^2-1|+\tau_k), \quad \xi \in \bar{D}_{1,r_k},$$

поэтому из (28) находим, что при $\xi \in \bar{D}_{1,r_k}$ выполняется оценка

$$\Xi_{\sigma,k}(\xi) \leqslant s\log\left(|\xi^2-1|+\tau_k\right) + c. \tag{29}$$

При $\xi_0 \in \Gamma_1$ и $\xi \in \bar{D}_{1,r_k}$, $|\xi-\xi_0| \leqslant c\tau_k$, имеем соотношение

$$|\xi^2-1|+\tau_k \asymp |\xi_0^2-1|+\tau_k. \tag{30}$$

Теперь определение (12), определение функции $g_\sigma(z)$, вид (11) функции $\Phi_k(z)$ и соотношения (29) и (30) влекут неравенства

$$\begin{aligned} g_\sigma(z) &\leqslant s\log\left(c_{12}\left((\sqrt{l_k^2-(x-\xi_k^2)^2}+t)\frac{t}{|I_k|}\right)\right)+c \\ &\leqslant s\log\left(c_{13}\rho_t(x)\right)+c, \\ |z-x| &\leqslant \rho_t(x), \quad x \in J_k. \end{aligned} \tag{31}$$

Неравенство (31) является утверждением (4) теоремы 2 в случае $t \leqslant c_4^*|I_k|$. Если же находим $t = \frac{1}{\sigma} > c_4^*|I_k|$, то $\sigma|I_k| < \frac{1}{c_4^*}$, из (2) находим $\rho_t(x) \asymp t$, и все приведенные выше рассуждения проходят с упрощениями. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть функция f удовлетворяет условию (3) теоремы 1. Из соотношений (1), (2) и (3) при $\sigma = 1$ следует ограниченность функции f на множестве E. Для проверки свойства $f \in H^s(E)$ осталось проверить, что для любых $x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2, x_2 - x_1 \leqslant 1$ справедлива оценка $|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant c_f^*|x_2-x_1|^s$.

Пусть $\delta_0 = \sup\limits_{x\in E}\rho_1(x)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_2 - x_1 \leqslant \delta_0$. Выберем t из условия $\rho_t(x_1) = x_2 - x_1 \overset{\text{def}}{=} \delta$ и положим $\sigma = \frac{1}{t}$. Выберем n из условия $1 < \dfrac{\sigma}{2^n} \leqslant 2$, тогда

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (f(x_2) - F_\sigma(x_2)) - (f(x_1) - F_\sigma(x_1)) \\ &+ \sum_{k=1}^{m}\Big(F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_2)\Big) - \sum_{k=1}^{m}\Big(F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_1) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_1)\Big) \\ &+ \sum_{k=m+1}^{n}\Big(\Big(F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_2)\Big) - \Big(F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_1) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_1)\Big)\Big) \\ &+ \big(F_{\frac{\sigma}{2^n}}(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^n}}(x_1)\big)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

В соотношении (32) m зависит только от множества E и удовлетворяет условию

$$2\delta \leqslant \rho_{t_m}(x_1) \leqslant c_{12}\delta, \tag{33}$$

где $t_m = \frac{2^m}{\sigma}$, постоянная c_{12} зависит только от E. Соотношения (1), (2) показывают, что такой выбор числа m возможен.

Из соотношений (1) и (2) следует, что с некоторой постоянной c_{13}, зависящей только от E, выполняются оценки

$$\rho_{t_k}(x_2) \leqslant c_{13}\delta,\ t_k = \frac{2^k}{\sigma},\ 0 \leqslant k \leqslant m. \tag{34}$$

Тогда (1), (33), (34) влекут неравенства

$$|f(x_1) - F_\sigma(x_1)| \leqslant \tilde{c}_f\delta^s, \quad |f(x_2) - F_\sigma(x_1)| \leqslant \tilde{c}_f c_{13}^s\delta^s, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} |F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_1) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_1)| &\leqslant |F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_1)| \\ &\leqslant \tilde{c}\rho_{t_{k-1}}^s(x_1) + \tilde{c}\rho_{t_k}^s(x_1) \leqslant c\delta^s, \quad k \leqslant m, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} |F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_2)| &\leqslant |F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_2) - f(x_2)| + |f(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_2)| \\ &\leqslant \tilde{c}\rho_{t_{k-1}}^s(x_2) + \tilde{c}\rho_{t_k}^s(x_2) \leqslant c\delta^s, \quad k \leqslant m. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (33) следует, что при $m \leqslant k \leqslant n$ выполнено неравенство $\rho_{t_k}(x_1) \geqslant \rho_{t_m}(x_1) \geqslant 2\delta$. Аналогично формуле (36), из (1) получаем соотношение

$$|F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x)| \leqslant 2\rho_{t_k}^s(x), \quad x \in E, \quad m \leqslant k \leqslant n. \tag{38}$$

Из (2) и (3) получаем, что с постоянной c_{14} имеем оценку

$$\rho_{t_k} \leqslant c_{14}\rho_{t_{k-1}}(x)$$

при $x \in E$, $k \geqslant 1$. Пусть $\gamma_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_1| = \rho_{t_k}(x_1)\}$, $k \geqslant m$. Из теоремы 2, соотношений (33) и (38) находим, что выполнено неравенство

$$|F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(z) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(z)| \leqslant \hat{c} \cdot 2\tilde{c} \cdot c_{14}^s \rho_{t_{k-1}}^s, \quad z \in \gamma_k. \tag{39}$$

При $x \in [x_1, x_2]$, $m \leqslant k \leqslant n$ в силу (33) имеем оценку $|z - x| \geqslant \frac{1}{2}\rho_{t_k}(x_1)$, $z \in \gamma_k$.

Формула Коши и (39) влекут

$$\left|\Big(F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x)\Big)'\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{k-1}} \frac{F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(z) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(z)}{(z-x)^2}dz\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{\rho_{t_{k-1}}^2(x_1)} \cdot \hat{c} \cdot 2\tilde{c} \cdot c_{14}^s \cdot \rho_{t_{k-1}}^s(x_1) \cdot 2\pi\rho_{t_{k-1}} = c\rho_{t_{k-1}}^{s-1}(x_1). \tag{40}$$

Из (40) находим, что

$$|F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_2) - (F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_1) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_1))|$$
$$= \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x)\Big)' dx\right| \leqslant c\delta \cdot \rho_{t_{k-1}}^{s-1}(x_1), \quad k \geqslant m+1. \tag{41}$$

Из формул (2) и (3) следует, что существует постоянная c_{15}, зависящая только от множества E, для которой выполнено соотношение $\rho_{t_k}(x) \geqslant c_{15} \cdot 2^k \rho_{t_0}(x)$, поэтому из (41) находим оценку

$$|F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_2) - (F_{\frac{\sigma}{2^k}}(x_1) - F_{\frac{\sigma}{2^{k-1}}}(x_1))|$$
$$\leqslant c\delta \cdot \frac{\delta^{s-1}}{2^{(k-1)(1-s)}} = c\delta^s \frac{1}{2^{(k-1)(1-s)}}, \quad k \geqslant m+1. \tag{42}$$

Применяя соотношение (3) с $\sigma = 1$ и учитывая, что $|F_1(x)| \leqslant c_{F_1}$, с учетом соотношений (2) и (3) находим, что $|f(x)| \leqslant c_{F_1} + c$ при $x \in E$. Тогда в силу неравенств $1 \leqslant \frac{\sigma}{2^n} < 2$ из (2) и (3) найдем, что $|F_{\frac{\sigma}{2^n}}(x)| \leqslant c_{F_1} + c^*$ при $x \in E$, а тогда по теореме Б. Я. Левина [6] имеется неравенство $|F_{\frac{\sigma}{2^n}}(x)| \leqslant c_{15}$ при $x \in \mathbb{R}$, и по теореме

С. Н. Бернштейна в силу $\frac{\sigma}{2^n} < 2$ найдем, что $|F'_{\frac{\sigma}{2^n}}(x)| \leqslant 2c_{15}$. Последнее неравенство влечет

$$|F_{\frac{\sigma}{2^n}}(x_2) - F_{\frac{\sigma}{2^n}}(x_1)| \leqslant 2c_{15} \cdot (x_2 - x_1) = 2c_{15}\delta. \tag{43}$$

Соотношения (32), (35)–(37), (42) и (43) доказывают теорему 1.

Список литературы

1. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси.* 1. *Формулировка результатов.* — Вестн. Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **3 (61)**, No. 4 (2016), 644–650.
2. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси.* 2. *Доказательство основной теоремы.* – Вестн. Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **4 (62)**, No. 1 (2017), 53–63.
3. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси.* 3. *Дальнейшее обобщение.* — Вестн. Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. **5 (63)**, No. 2 (2018), 270–277.
4. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси.* 4. *Обратная теорема.* — Вестн. Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. **8 (66)**, No. 4 (2021), 600–607.
5. Б. Я. Левин, *Мажоранты в классах субгармонических функций I.* — Теория функций, функциональный анализ и их приложения **51** (1989), 3–17.
6. Б. Я. Левин, *Мажоранты в классах субгармонических функций II.* — Теория функций, функциональный анализ и их приложения. **52** (1989), 3–21.
7. О. В. Сильванович, Н. А. Широков, *Функция Б.Я. Левина для некоторых совокупностей промежутков.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **527** (2023), 183–203.

Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Inverse theorem of approximation by entire functions of exponential type.

Let $I_k = [a_k, b_k]$, $J_k = [b_k, a_{k+1}]$, $b_k < a_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, be segments on the real axis tending to $+\infty$ and to $-\infty$. Assume that these segments satisfy the conditions $|I_k| = 2^{-n\alpha}$ if $I_k \subset [2^n, 2^{n+1}]$ or $I_k \subset [-2^{n+1}, -2^n]$, $\alpha > 0$ being fixed, $n \geqslant n_0$. Assume also that there exists a constant $c_1 > 0$ such that $2^{n_0} \cdot 2^{-n\alpha} \leqslant |J_k| \leqslant c_1 \cdot 2^{n_0} \cdot 2^{-n\alpha}$ if $J_k \subset [2^n, 2^{n+1}]$ or $J_k \subset [-2^{n+1}, -2^n], k \in \mathbb{Z}$. Put $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} J_k$. Denote by $f_{E,1}(z)$ a function subharmonic on $\mathbb{C}$ and satisfying the conditions $f_{E,1}(x) = 0, x \in E, f_{E,1}(z)$ is harmonic on $\mathbb{C} \setminus E$, $\varlimsup\limits_{z\to\infty} \dfrac{f_{E,1}(z)}{|z|} = 1$, and $g(z) \leqslant f_{E,1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, for

every function g subharmonic on $\mathbb{C}$ and such that $g(x) \leqslant 0$, $x \in E$, and $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{g(z)}{|z|} \leqslant 1$. We define sets $L_t(E)$ as follows:

$$L_t = \{z \in \mathbb{C} : f_{E,1}(z) = t\}$$

and put $\rho_t(x) = \operatorname{dist}(x, L_t(E))$, $x \in E$. Let T_σ be the set of entire functions of exponential type satisfying the condition $|F_\sigma(z)| \leqslant c_{F_\sigma} \exp(\sigma|\mathrm{Im} z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $F_\sigma \in T_\sigma$. Denote by $\Lambda^s(E)$ the s-Hölder class on E, $0 < s < 1$, of functions bounded on the set E.

We prove the following result.

Theorem 1. *Assume that for a function f defined on E there exist functions $F_\sigma \in T_\sigma$ such that*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leqslant c_f \rho^s_{\frac{1}{\sigma}}(x), \ x \in E, \ \sigma \geqslant 1.$$

Then $f \in \Lambda^s(E)$.

Поступило 17 июня 2024 г.

Санкт-Петербургский
горный университет,
В.О., 21-я линия, д.2,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olamamik@gmail.com

Санкт-Петербургское отделение
Математического Института
им. В. А. Стеклова,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com