Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 537, 2024 г.

С. В. Кисляков

ОБ АБСОЛЮТНО РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ

§1. Введение

Классическая теорема С. Н. Бернштейна утверждает, что если $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$, $1/2 < \alpha \leqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ сходится. Она точна: при $\alpha = 1/2$ этот ряд может разойтись. Известны многочисленные варианты и обобщения этих результатов. Не останавливаясь на истории вопроса (некоторые ссылки можно найти в [1, 3]), приведем теорему Вейгнера из [2].

Теорема А. *При $d = 1, 2, 3, \dots$ существует функция из пространства $C^{d/2}(\mathbb{T}^d)$, ряд Фурье которой не сходится абсолютно.*

Характер этого результата зависит от четности числа d: при $d = 2k$ ($k \geqslant 1$) мы имеем дело с целыми показателями гладкости, а при $d = 2k + 1$ ($k \geqslant 0$) – с функциями, у которых производные порядка k лежат в классе $\mathrm{Lip}_{1/2}$. Более общим образом, если ω – модуль непрерывности, через $C^{s,\omega}(\mathbb{T}^d)$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) мы будем обозначать пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций на d-мерном торе, у которых модуль непрерывности всех производных порядка s есть $O(\omega)$.

Разумеется, результат о расходимости уточнялся неоднократно с использованием только что описанной "тонкой" шкалы гладкости. Например, в недавней работе [3] было показано, что найдется функция из пространства $C^{(1)}(\mathbb{T}^2)$ с абсолютно расходящимся рядом Фурье, первые производные которой имеют модуль непрерывности порядка $O((\log \frac{10}{\delta})^{-1/2+\eta})$, где η – любое фиксированное заранее число из отрезка $(0, 1/2)$.

Цель этой заметки – показать, что такого рода примеры абсолютно расходящихся рядов Фурье можно довольно легко получить из аналога теоремы Де Леу–Кацнельсона–Кахана для гладких функций от нескольких переменных. Сформулируем этот аналог. Здесь и далее для

Ключевые слова: теорема С. Н. Бернштейна, ядра Фейера, теорема де Леу–Кацнельсона–Кахана.

точек $k \in \mathbb{Z}^d$ мы полагаем $|k| = |k_1| + \cdots + |k_d|$ ($k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$) – как обычно принято.

Теорема B. *Если последовательность* $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *при некотором* $l \in \mathbb{Z}_+$ *удовлетворяет неравенству* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} (|k|^l |c_k|)^2 < +\infty$, *то найдется функция* f *из* $C^{(l)}(\mathbb{T}^d)$ *такая, что* $|\widehat{f}(k)| \geqslant |c_k|$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}^d$.

Заметим, что теорема A при четных $d = 2l$ сразу следует из теоремы B, поскольку существуют последовательности $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, для которых $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k| = +\infty$, но $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} (|k|^l |c_k|)^2 < +\infty$. Например, можно взять $c_k = |k|^{-d}[\log(2 + |k|)]^{-\beta}$, где $\beta \in (1/2, 1]$. Действительно, в $\mathbb{Z}^d$ число точек k с $|k| = s$ имеет порядок s^{d-1} $(s = 1, 2, \ldots)$, поэтому упомянутые утверждения сводятся к поведению однократных рядов $\sum\limits_{s\geqslant 1} s^{-1} \log(2 + s)^{-\beta}$ и $\sum\limits_{s\geqslant 1} s^{-1} \log(2 + s)^{-2\beta}$, из которых первый расходится, а второй сходится.

Сама по себе теорема де Леу–Кацнельсона–Кахана [4] – это теорема B при $l = 0$. Если $d = 1$, то случай произвольного l сводится к случаю $l = 0$ последовательным взятием первообразных. При $d \geqslant 2$ и $l \geqslant 1$ дело сложнее, нужно привлекать еще некоторые факты из теории сингулярных интегральных операторов. Этот случай был рассмотрен в диссертации [7], но иным образом не публиковался. В конце заметки будут даны пояснения по поводу доказательства.

При всей простоте, описываемый далее метод не лишен, как легко понять, некоторых принципиальных недостатков в смысле точности результатов, к которым он ведет. Однако, например, в размерности 2 он дает чуть больше, чем было доказано в [3], а именно, в той теореме можно взять $\eta = 0$.

§2. Формулировка и план доказательства

Теорема 1. *Функцию на торе* $\mathbb{T}^d$ *с абсолютно расходящимся рядом Фурье можно найти в классе* $C^{l,\omega}(\mathbb{T}^d)$, *где* $\omega(\delta) = (\log \frac{1}{\delta})^{-1/2}$ *при* $d = 2l$ $(l \geqslant 1)$ *и* $\omega(\delta) = \delta^{1/2}(\log \frac{1}{\delta})^{-1/2}$ *при* $d = 2l + 1$ $(l \geqslant 0)$.

(Считаем, например, что в этих равенствах $\delta \leqslant 1/2$, чтобы избежать неприятностей с логарифмом.)

Дальнейшие рассуждения организованы следующим образом. Функцию с описанными свойствами будем искать в виде $\Psi = g * f$, где

$f \in C^{(l)}(\mathbb{T}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Функция f будет взята в соответствии с Теоремой B, так что задача сведется к аккуратному выбору функции g. В связи с этим мы будем называть функцию g порождающей.

Пусть функция g фиксирована. Если для любой функции f из $C^{(l)}(\mathbb{T}^d)$ ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d}|\widehat{\Psi}(k)|$ сходится, т.е.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\{0\}}|\widehat{g}(k)||\widehat{f}(k)| = \sum_{k\neq 0}(|k|^{-l}|\widehat{g}(k)|)(|k|^l|\widehat{f}(k)|) < +\infty,$$

то в силу теоремы B получаем

$$\sum_{k\neq 0}(|k|^{-2l}|\widehat{g}(k)|^2) < +\infty. \tag{1}$$

Стало быть, функцию g надо выбрать так, чтобы условие (1) нарушалось. Далее, для производных $\partial_1^{\mu_1}\dots\partial_d^{\mu_d}\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^{(\mu)}$ ($\mu = (\mu_1,\dots,\mu_d)$ – мультииндекс) справедливо равенство $\Psi^{(\mu)} = g * f^{(\mu)}$. (Отметим, что дифференцирование функций на окружности здесь и далее задается формулой $(\partial f)(e^{i\theta}) = \frac{d}{d\theta}f(e^{i\theta})$.) Поэтому модуль непрерывности любой производной порядка l (т.е. такой, что $|\mu| = l$) оценивается следующим образом: пусть $z, w \in \mathbb{T}^d$, $|z-w| \leqslant \delta$, тогда

$$\Psi^{(\mu)}(z) - \Psi^{(\mu)}(w) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} f^{(\mu)}(\zeta)(g(z\zeta^{-1}) - g(w\zeta^{-1}))d\zeta,$$

откуда

$$\omega^{\Psi^{(\mu)}}(\delta) \leqslant \|f^{(\mu)}\|_\infty\,\omega_1^g(\delta).$$

Здесь через ω_1^g обозначен интегральный модуль непрерывности функции g:

$$\omega_1^g(\delta) = \sup_{|z-w|\leqslant\delta}\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^d\int\limits_{\mathbb{T}^d}|g(z\zeta^{-1}) - g(w\zeta^{-1})|d\zeta.$$

(Отметим, что в дальнейшем мы будем переходить от функций на торе к функциям на $\mathbb{R}^n$, (2π)-переодическим по каждой переменной, и обратно без пояснений, в зависимости от удобства. При таком переходе мультипликативная запись для групповой операции в предыдущих формулах перейдет в аддитивную и т.д.)

Таким образом, помимо нарушения условия (1) надо подобрать функцию g так, чтобы

$$\omega_1^g(\delta) \leqslant \frac{c}{(\log\frac{1}{\delta})^{1/2}} \quad \text{при четном} \quad d, \tag{2}$$

$$\omega_1^g(\delta) \leqslant \frac{c\delta^{1/2}}{(\log\frac{1}{\delta})^{1/2}} \quad \text{при нечетном} \quad d. \tag{3}$$

§3. Построение порождающих функций

Здесь и далее, под ядром Дирихле D_n мы понимаем функцию $\sum\limits_{|j|\leqslant n} z^j$ (а не её половину, как это часто принято). Соответственно, частичная сумма ряда Фурье дается формулой

$$S_n\varphi(x) = \varphi * D_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

(коэффициент $\frac{1}{2\pi}$, а не $\frac{1}{\pi}$ перед интегралом). Ядра Фейера, разумеется, определяются формулой $\Phi_n = (n+1)^{-1}\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} D_k$ при сделанной оговорке о ядре Дирихле.

Отправной точкой для дальнейшего послужили следующие хорошо известные соображения, см. [5, гл. 1, теорема 4] или [6, гл. 5, теорема 15]. Пусть $b_n \geqslant 0$ – монотонно убывающая выпуклая последовательность, стремящаяся к нулю. Тогда ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_{|n|}e^{\mathrm{int}} = b_0 + \sum\limits_{n\geqslant 1} 2b_n\cos nt$ сходится к некоторой суммируемой функции v всюду, кроме, может быть, точки 0, при этом $\widehat{v}(n) = b_{|n|}$, $n\in\mathbb{Z}$, и

$$v(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(j+1)\Delta^2 b_j\Phi_j(x),$$

где $\Delta^2 b_j$ – вторые разности: $\Delta b_j = b_j - b_{j+1}$, $\Delta^2 b_j = \Delta b_j - \Delta b_{j+1}$. Кроме того, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(j+1)\Delta^2 b_j$ в этой ситуации обязательно сходится, см. те же ссылки.

Для многомерных обобщений нас будет интересовать лишь правая часть этой формулы, а не то, что она представляет косинус-ряд v: даже если не знать этого, коэффициенты Фурье правой части легко оценить снизу. Далее, отвлекаясь от происхождения этого выражения, можно не настаивать и на довольно экзотическом виде коэффициентов $(j+1)\Delta^2 b_j$.

Итак, в размерности d ($d = 1, 2, \dots$) будем искать порождающую функцию следующим образом. Пусть $\{a_j\}_{j\geqslant 0}$ – положительные числа такие, что ряд $\sum\limits_{j\geqslant 0} a_j$ сходится. Введём функции

$$\Phi_j^d(x) = \Phi_j(x_1)\dots\Phi_j(x_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d),$$

и пусть

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Phi_j^d(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Разумеется, g – неотрицательная функция из $L^1(\mathbb{T}^d)$, все коэффициенты Фурье которой тоже неотрицательны. Нам нужны оценки этих коэффициентов (снизу) и верхние оценки величины $\omega_1^g(\delta)$.

Лемма 3.1. (а) $|\widehat{g}(k)| \geqslant C \sum\limits_{j\geqslant c|k|} a_j$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

(б) $\omega_1^g(\delta) \leqslant C \inf\limits_n (\delta \sum\limits_{j=0}^{n} j a_j + \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} a_j)$.

Доказательство. (а) Поскольку $\widehat{\Phi}(m) \geqslant 1/2$ при $|m| \leqslant j/10$, $m \in \mathbb{Z}$, поскольку при $k \in \mathbb{Z}^d$, $|k| \leqslant j/10$, получаем $(\Phi_j^d)(k) \geqslant (\frac{1}{2})^d$, откуда

$$\widehat{g}(k) \geqslant \sum_{j\geqslant 10|j|} a_j (\Phi_j^d)(k) \geqslant C \sum_{j\geqslant 10|k|} a_j.$$

(б) Так как $\|\Phi_j\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ (мера Лебега всегда нормируется – как было и до сих пор), то $\|\Phi_j'\|_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant j$ в силу неравенства Бернштейна. Тем самым $\omega_1^{\Phi_j}(\delta) \leqslant j\delta$ в размерности 1. Отсюда легко получаем по индукции, что $\omega_1^{\Phi_j^d} \leqslant dj\delta$. Действительно, возьмем две точки x, t, $x = (x_1, \dots, x_d) = (\xi, x_d)$ и $t = (t_1, \dots, t_d) = (\tau, t_d)$, где $\xi = (x_1, \dots, x_{d-1})$, $\tau = (t_1, \dots, t_{d-1})$, и пусть $|t| \leqslant \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}|\Phi_j^d(\xi+\tau, x_d+t_d) - \Phi_j^d(\xi, x_d)| \leqslant |\Phi_j(x_d+t_d) - \Phi_j(x_d)|\Phi_j^{d-1}(\xi+\tau) \\ + |\Phi_j^{d-1}(\xi+\tau) - \Phi_j^{d-1}(\xi)|\Phi_j(x_d).\end{aligned}$$

Интегрируя по $\xi \in \mathbb{T}^{d-1}$ и $x_d \in \mathbb{T}$, получаем $\omega_1^{\Phi_j^d}(\delta) \leqslant j\delta + (d-1)j\delta = dj\delta$.

Теперь напишем, учитывая, что $|t| \leqslant \delta$:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]} |g(x+t)-g(x)|dx \leqslant \sum_{j=0}^{n} a_j \omega_1^{\Phi_j^d}(\delta) + 2\sum_{j>n} a_j \|\Phi_j^d\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$$
$$\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j j\delta + \sum_{j>n} a_j\Big),$$

и осталось перейти к нижней грани по n. □

§4. Завершение доказательства

В процессе вычислений нам будет полезна оценка

$$\int\limits_u^v y^{-\beta} e^{y/A} dy \leqslant C v^{-\beta} e^{v/A}, \tag{5}$$

если $\beta, A > 0$, $v > u \geqslant A(\beta+1)$. Постоянная C зависит от A и β. Быстро проверить ее можно, например, так. Обозначим через I интеграл слева в (5) и проинтегрируем по частям:

$$I = A\int\limits_u^v y^{-\beta} de^{y/A} = A\Big(y^{-\beta}e^{y/A}\Big|_u^v + \beta\int\limits_u^v e^{y/A} y^{-\beta-1}dy\Big).$$

Оба слагаемых в скобках не превосходят правой части неравенства (5): второе – потому, что подынтегральная функция возрастает при $y \geqslant A(\beta+1)$, откуда получаем, что интеграл не превосходит величины $(v-u)e^{v/A}\ v^{-\beta-1} \leqslant e^{v/A}v^{-\beta}$.

Теперь приступим к выбору порождающей функции.

В четной размерности $d = 2l$ возьмем $a_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}$, где $\alpha_j = [\log(100+j)]^{-1/2}$, $j \geqslant 0$. В силу пункта (a) леммы 1 получим

$$|\widehat{g}(k)| \geqslant C[\log(100+c|k|)]^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

так что ряд в (1) действительно расходится:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |k|^{-d}\big(\log(100+c|L|)\big)^{-1} \asymp \sum_{s>0} s^{-1}\log(100+cs)^{-1} = +\infty.$$

Интегральный модуль непрерывности функции g оценим с помощью пункта (б) леммы 1. В нашем случае $a_j \asymp \frac{1}{j}[\log(100+j)]^{-3/2}$, поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} ja_j &\leqslant C\sum_{j=1}^{n}[\log(100+j)]^{-3/2} \leqslant C'\int\limits_0^n \frac{dx}{[\log(100+x)]^{3/2}}\\ &= C'\int\limits_0^n \frac{(100+x)d(\log(100+x))}{[\log(100+x)]^{3/2}} = C'\int\limits_{\log 100}^{\log(100+n)} y^{-3/2}e^y dy\\ &\leqslant C''(100+n)(\log(100+n))^{-3/2}.\end{aligned}$$

в силу неравенства (5). Пункт (б) леммы 1 дает теперь

$$\omega_1^g(\delta) \leqslant C\big(\delta(100+n)(\log(100+n))^{-3/2} + (\log(100+n))^{-1/2}\big);$$

например, при выборе n таким образом, чтобы $100+n \asymp \delta^{-1}$, мы получим требуемое. (Оптимальный выбор числа n, когда слагаемые в скобках примерно одинаковы, не дает здесь значимых улучшений.)

В случае нечетной размерности $d = 2l+1$ ($l \geqslant 0$), положим $\alpha_j = (j\log(100+j))^{-1/2}$ и снова возьмем $a_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}$. Тогда ряд в формуле (1) мажорирует ряд

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} |k|^{-2l}\alpha_{C|k|}^2 &\geqslant C\sum_{s>0} s^{d-1}s^{-2l}(s\log(100+s))^{-1}\\ &= C\sum_{s>0}(s\log(100+s))^{-1} = +\infty.\end{aligned}$$

Далее, теперь $a_j \asymp j^{-3/2}(\log(100+j))^{-1/2}$, так что

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} ja_j &\leqslant C\sum_{j=1}^{n} j^{-1/2}(\log(100+j))^{-1/2} \leqslant C'\int\limits_0^n \frac{dx}{[(100+x)\log(100+x)]^{1/2}}\\ &= C'\int\limits_{\log 100}^{\log(100+n)} e^{y/2}y^{-1/2}dy \leqslant C''(100+n)^{1/2}[\log(100+n)]^{-1/2},\end{aligned}$$

снова в силу формулы (5). Таким образом,

$$\omega_1^g(\delta) \leqslant c\min_n\Big(\frac{\delta\sqrt{100+n}}{\sqrt{\log(100+n)}} + \frac{1}{\sqrt{100+n}\sqrt{\log(100+n)}}\Big).$$

Нужная оценка снова получается при выборе n так, чтобы $100 + n \asymp 1/\delta$ (причем сейчас такой выбор примерно оптимальный: слагаемые в скобах имеют одинаковый порядок).

§5. Замечания

1. В оценки в теореме 1 можно, например, добавить кратные логарифмы (скажем, написать $\omega(\delta) = (\log\frac{1}{\delta}\log\log\frac{1}{\delta})^{1/2}$ в четных размерностях) – при соответствующем изменении доказательства.

2. При $d = 1$ в [8] было доказано следующее усиление теоремы де Леу–Кацнельсона–Кахана: если $\sum\limits_{j\geqslant 0}|c_j| = +\infty$, то найдется функция f с равномерно сходящимся рядом Фурье и такая, что $|\widehat{f}(j)| \geqslant |c_j|$, $j \geqslant 0$, $\widehat{f}(j) = 0$ при $j < 0$. В [9] было установлено, что можно сделать и так: $|\widehat{f}(j)| \geqslant |c_j|$ при $j \in \bigcup\limits_{k\geqslant 1}[2^{2k}, 2^{2k+1}]$ и $\widehat{f}(j) = 0$ при остальных индексах $j \in \mathbb{Z}$.

Поскольку коэффициенты Фурье построенной порождающей функции g для $d = 1$ убывают достаточно плавно, искомый пример расходимости (однократного) ряда Фурье можно найти в виде $g * f$, где f – такая функция, как только что было описано. Это несет некоторую дополнительную информацию, но разной ценности. Например, равномерная сходимость ряда Фурье такой свертки следует из признака Дини–Липшица, так что для этого не обязательно ссылаться на равномерную сходимость ряда Фурье функции f. "Дыры в спектре" у $g * f$, возможно, представляют несколько больший интерес.

§6. О доказательстве теоремы B

Для краткости сошлемся на то, что было бы естественно сделать когда-то (но, строго формально, этого не было, кроме как в [7]). Пусть (S, μ) – пространство с конечной мерой, X – замкнутое подпространство в $L^\infty(\mu)$, а $\{\varphi_j\}_{j\geqslant 0}$ – ограниченная в равномерной норме ортогональная система в $L^2(\mu)$ такая, что $\varphi_j \in X$. Пусть P – ортогональный проектор из $L^2(\mu)$ на замыкание пространства X в $L^2(\mu)$. Предположим, что оператор P имеет слабый тип (1,1):

$$\mu\{|Pf| > \lambda\} \leqslant C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1(\mu)}, \tag{7}$$

$f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$.

Теорема C. *При сделанных предположениях, для любой последовательности $\xi = \{\xi_j\}_{j\geqslant 0} \in l^2$ найдется функция $f \in X$, для которой $|\langle f, \varphi_j\rangle| \geqslant |\xi_j|$ при всех j и $\|f\|_\infty \leqslant A\|\xi\|_{l^2}$.*

В случае де Леу–Кацнельсона–Кахана (S компактно, $X = C(S)$) проектор P тождественный, так что условие (7) очевидно.

Теорему C довольно легко "вычитать" в [8] или [9]. В [9], кстати, для устройства лакун в спектре использовалось более тонкое условие, чем (7).

Теорема B сводится к теореме C следующим образом. Пусть $d \geqslant 2$ и $l \geqslant 1$. Обозначим через J множество всех неотрицательных мультииндексов $j = (j_1, \dots, j_d)$, для которых $|j| = j_1 + \dots + j_d = l$. Пусть $N = \operatorname{card} J$, а S – несвязное обьединение N копий тора $\mathbb{T}^d$ (каждая копия снабжена нормированной мерой Лебега, которые вместе составляют меру μ на S).

Функции на S можно трактовать как наборы $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ функций на $\mathbb{T}^d$. Рассмотрим подпространство X в $C(S)$, состоящее из наборов вида $\{\partial_1^{j_1} \dots \partial_d^{j_d} f\}_{(j_1,\dots,j_d)\in J}$, где f пробегает пространство $C^{(l)}(\mathbb{T}^d)$. Если пренебречь константами, то X – это просто иная реализация пространства $C^{(l)}(\mathbb{T}^d)$.

Пусть P – ортогональный проектор из $L^2(S,\mu)$ на замыкание пространства X в $L^2(S,\mu)$. Нам нужно проверить неравенство (7) для этого проектора. Но оно следует из того, что P выражается через сингулярные интегральные операторы на торе. Действительно, пусть $k \in \mathbb{Z}^d$, $j \in J$. Обозначим через u_k^j функцию на S, отличную от нуля лишь на копии тора $\mathbb{T}^d$, отвечающей мультииндексу j, и равную $z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}$ на этой копии. Такие функции образуют ортогональный базис в $L^2(\mu)$. Нетрудно понять, что

$$Pu_k^j = \frac{(-ik_1)^{j_1} \dots (-ik_d)^{j_d}}{\sum\limits_{(s_1,\dots,s_d)\in J} k_1^{2s_1} \dots k_d^{2s_d}} \big\{(ik_1)^{t_1} \dots (ik_d)^{t_d} z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}\big\}_{(t_1\dots t_d)\in J}.$$

Таким образом, P выражается через мультипликаторы Фурье на торе $\mathbb{T}^d$, символы которых суть сужения на $\mathbb{Z}^d$ функций, однородных степени 0 на $\mathbb{R}^d$, которые лежат в $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Хорошо известно, что такие мультипликаторы являются сингулярными интегральными операторами типа Кальдерона–Зигмунда на торе, а потому удовлетворяют неравенству слабого типа (1,1).

В качестве ортогональной системы из теоремы C достаточно пронормировать в $L^2(\mu)$ все наборы вида $\{\partial_1^{t_1}\dots\partial_d^{t_d}(z_1^{k_1}\dots z_d^{k_d})\}_{t_1+\dots t_d=l}$ на S, где $k=(k_1,\dots,k_d)$ пробегает решётку $\mathbb{Z}^d$.

Список литературы

1. Б. С. Кашин, *Замечания о равномерной и абсолютной сходимости ортогональных рядов.* — Матем. заметки, **108**, No. 5 (2020), 782–786.
2. S. Wainger, *Special trigonometric series in k-dimensions.* Mem. Amer. Math. Soc., **59** (1965).
3. Б.С.Кашин, А.В.Мелешкина, *Об абсолютной сходимости рядов Фурье функций двух переменных из пространства $C^{1,\omega}$.* — Матем. заметки, **114**, No. 4 (2023), 633–636.
4. K. de Leeuw, Y. Katznelson, J. P. Kahane, *Sur les coefficient de Fourier des fonection continues.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **285**, No. 16 (1977), 1001–1003.
5. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* Физ. Мат. Лит., Москва, 1961.
6. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Мир, Москва, 1965.
7. С. В. Кисляков, *Интерполяционные неравенства и их приложения в гармоническом анализе.* Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Ленинград, 1991.
8. С. В. Кисляков, *Коэффициенты Фурье граничных значений функций, аналитических в круге и в бидиске.* — Труды матем. института им. В. А. Стеклова, т. 155, Л., Наука, 1981, 77–94.
9. Kislyakov S. V., *Fourier coefficients of continuous functions and a class of multipliers.* — Ann. Inst. Fourier **38**, No. 2 (1988), 147–183.

Kislyakov S. V. On absolutely divergent Fourier series.

A method of constructing series mentioned in the title in many dimensions is discussed. This method yields series representing functions of smoothness slightly ligher than for those in the class $C^{(d/2)}(\mathbb{T}^d)$ and is based on an analog of the de Leeuw–Katznelson–Kahane theorem for the classes $C^{(l)}(\mathbb{T}^d)$.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 24 ноября 2024 г.