Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 537, 2024 г.

Е. П. Добронравов, П. Б. Затицкий, Д. М. Столяров

НОВАЯ БЕЛЛМАНОВСКАЯ ИНДУКЦИЯ И ОСЛАБЛЕННАЯ ВЕРСИЯ НОРМЫ BMO

1. Введение

1.1. Беллмановская индукция на пространстве BMO**.** Пусть $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ – квадратично суммируемая функция. Символом $\langle \varphi \rangle_{E}$ обозначим её среднее $|E|^{-1}\int_E \varphi(x)\,dx$ по борелевскому множеству E конечной ненулевой лебеговой меры $|E|$. В таком случае, квадратичная норма функции φ в пространстве $\mathrm{BMO}([0,1])$ задаётся формулой

$$\|\varphi\|^2_{\mathrm{BMO}} = \sup_{\substack{I\text{ - подынтервал}\\ \text{отрезка } [0,1]}} \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle_{I})^2 \rangle_{I}. \tag{1.1}$$

Знаменитое неравенство Джона–Ниренберга (см. [11]) гласит, что конечность нормы в пространстве BMO влечёт экспоненциальную интегрируемость функции. Существует несколько точных версий этого неравенства (см. [5,12,17,18,24,27,28] . Формы неравенства с введённой выше квадратичной нормой обычно доказывают так называемым методом функции Беллмана. Применение метода к описываемому кругу задач основано на специальной лемме о разбиении, впервые появившейся в работе [26] (см. лемму 4 той работы), и использовавшейся при поиске точных форм обратного неравенства Гёльдера для весов Макенхаупта. Приведём формулировку леммы для случая пространства BMO.

Зафиксируем функцию $\varphi \in \mathrm{BMO}$. Для всякого подынтервала $J \subset [0,1]$ рассмотрим точку x_J пространства $\mathbb{R}^2$,

$$x_J = \Big(\langle \varphi \rangle_{J}, \langle \varphi^2 \rangle_{J}\Big). \tag{1.2}$$

Если $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon$, то для всякого интервала J справедливо включение $x_J \in P_\varepsilon$, где

$$P_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leqslant x_2 \leqslant x_1^2 + \varepsilon^2\}. \tag{1.3}$$

Ключевые слова: функция Беллмана, пространство BMO.

Исследования Е. П. Добронравова и Д. М. Столярова выполнены за счёт гранта РНФ 19-71-10023, `https://rscf.ru/project/19-71-10023`.

Отметим, что множество P_ε, зачастую называемое параболической полосой, невыпукло.

Лемма 1.1 (лемма Васюнина о разбиении)**.** *Для всякого числа $\delta > 0$ и всякой функции φ, удовлетворяющей оценке $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon$, найдётся такое разбиение $[0,1] = I_+ \cup I_-$, где $I_\pm$ – подынтервалы отрезка $[0,1]$ с непересекающимися внутренностями, что*

$$\left[x_{I_+}, x_{I_-}\right] \subset P_{\varepsilon+\delta} \tag{1.4}$$

и разбиение регулярно в следующем смысле: $|I_+|/|I_-| \in (\nu, \nu^{-1})$, где малое число $\nu > 0$ зависит лишь от параметров ε и δ.

Здесь и в дальнейшем мы используем обозначение $[P, Q]$ для отрезка, соединяющего точки P и Q. Из аддитивности интеграла следует, что $x_{[0,1]} \in \left[x_{I_+}, x_{I_-}\right]$. Отметим, что концы этого отрезка принадлежат множеству P_ε. Однако, ввиду невыпуклости области, из этого отнюдь не следует, что он весь лежит в P_ε. Лемма утверждает существование разбиения, когда это “почти” верно. При помощи последовательного применения леммы и некоторой специальной функции на множестве P_ε удаётся доказать неравенство Джона–Ниренберга. Мы приведём набросок этого рассуждения в подразделе 2.2.

Исходной точкой работы послужили поиски аналогов леммы Васюнина, которые можно было бы применить в случае пространства BMO функций на квадрате (что, в свою очередь, могло бы позволить получить лучшие оценки экспоненциальной интегрируемости функций класса BMO в старших размерностях, где точные формы неравенства неизвестны, см. работу [3]). Хотя продвижения в этом исходном направлении весьма скудны, получилось найти усиление леммы, которое, будучи по-прежнему существенно одномерным, всё же позволяет получать новую информацию о функциях в классах, подобных BMO, и об оценках в духе Джона–Ниренберга. Отложим описание этого приложения наших рассмотрений до подраздела 1.3 и сейчас перейдём к краткому обзору некоторых цитированных выше результатов.

1.2. Пространство BMO и неравенство Джона–Ниренберга.

Интегральная форма неравенства Джона–Ниренберга гласит: существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива оценка

$$\left\langle e^{\varphi - \langle\varphi\rangle_{[0,1]}}\right\rangle_{[0,1]} \leqslant C(\varepsilon) \qquad \text{при условии} \quad \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}([0,1])} \leqslant \varepsilon. \tag{1.5}$$

Символом $C(\varepsilon)$ здесь обозначена не зависящая от выбора функции φ постоянная. В работе [17] В. Васюнин и Л. Славин нашли наилучшие возможные значения параметров ε_0 и $C(\varepsilon)$.

Теорема 1.2 (Васюнин, Славин, 2011)**.** *Оценка*

$$\big\langle e^{\varphi-\langle\varphi\rangle_{[0,1]}}\big\rangle_{[0,1]} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \qquad \textit{при условии} \quad \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}([0,1])} \leqslant \varepsilon \tag{1.6}$$

справедлива, точна и достижима для всякого значения $\varepsilon \in [0,1)$.

См. подобную оценку величины $\langle e^{|\varphi-\langle\varphi\rangle|}\rangle$ в работе [5] и работу [24] касательно оценок слабого типа. В статье [21] было доказано, что точно такая же оценка справедлива (это относительно просто) и точна (уже не настолько просто) для функций, определённых на окружности или прямой. Пусть $\mathbb{T}$ – окружность радиуса $(2\pi)^{-1}$, отождествляемая с фактор-группой $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Всякую функцию $\varphi\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ можно естественным образом отождествить с её периодической версией $\varphi_{\mathrm{per}}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ посредством формулы $\varphi_{\mathrm{per}}(t) = \varphi((2\pi)^{-1}e^{2\pi it})$. Норма в пространстве BMO функции на окружности определяется следующим образом:

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})} = \|\varphi_{\mathrm{per}}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R})} = \sup_{I-\text{промежуток}} \big\langle (\varphi_{\mathrm{per}} - \langle\varphi_{\mathrm{per}}\rangle_I)^2\big\rangle_I. \tag{1.7}$$

Теорема 1.3 (Затицкий, Столяров, 2021)**.** *Оценка*

$$\big\langle e^{\varphi-\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}}}\big\rangle_{\mathbb{T}} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \qquad \textit{при условии} \quad \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})} \leqslant \varepsilon \tag{1.8}$$

справедлива и точна при всяком значении $\varepsilon \in [0,1)$.

Существуют различные версии пространства BMO. Например, популярна диадическая:

$$\|\varphi\|^2_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{dyad}}} = \sup_{I\in\mathbb{D}} \big\langle (\varphi - \langle\varphi\rangle_I)^2\big\rangle_I, \tag{1.9}$$

где символом $\mathbb{D}$ обозначено множество всех диадических подынтервалов отрезка $[0,1]$. Функции этого класса обладают слегка худшими количественными свойствами по сравнению с функциями классического пространства BMO.

Теорема 1.4 (Васюнин, Славин, 2011)**.** *Оценка*

$$\big\langle e^{\varphi-\langle\varphi\rangle_{[0,1]}}\big\rangle_{[0,1]} \leqslant \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}}{2-e^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}} \quad \textit{при условии} \quad \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{dyad}}([0,1])} \leqslant \varepsilon \tag{1.10}$$

справедлива, точна и достижима для всякого значения $\varepsilon \in [0,\sqrt{2}\log 2)$.

Хотя условие $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO^{dyad}}([0,1])} \leqslant \varepsilon$ и легче проверямо, чем

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}([0,1])} \leqslant \varepsilon,$$

влекомая им экспоненциальная интегрируемость хуже: $\sqrt{2}\log 2 \approx 0.98 < 1$. В следующем подразделе будет предложено ослабление условия BMO, которое проще вычислить, чем проверять конечность обычной нормы в пространстве BMO, но которая ведёт к почти такому же неравенству Джона–Ниренберга.

1.3. Ослабление BMO-нормы. Идея состоит в дискретизации образа функции, а не её области. Зафиксируем число $\lambda > 0$ и определим величину

$$[\varphi]_{\mathrm{BMO}([0,1])} = \sup\Big\{ \langle(\varphi - \langle\varphi\rangle_I)^2\rangle_I \,\Big|\, I \text{ – подынтервал } [0,1] \text{ и } \langle\varphi\rangle_I \in \lambda\mathbb{Z} \Big\}. \tag{1.11}$$

Иными словами, ограничения на среднеквадратичное отклонение функции накладываются только по тем интервалам, по котором функция имеет целое (кратное λ) среднее. Мы готовы сформулировать следствие наших основных результатов.

Следствие 1.5. *Зафиксируем числа $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$. Пусть $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ такая квадратично-суммируемая функция, что $[\varphi]_{\mathrm{BMO}} < \varepsilon$ и*

$$\langle|\varphi - \langle\varphi\rangle_{[0,1]}|^2\rangle_{[0,1]} < \varepsilon^2. \tag{1.12}$$

В таком случае, функция $e^{\mu\varphi}$ суммируема, если

$$\mu < \frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\varepsilon^2}{\lambda^2}}}{-1+\sqrt{1+\frac{4\varepsilon^2}{\lambda^2}}}\right). \tag{1.13}$$

Эта оценка точна в том смысле, что существует функция φ, удовлетворяющая описанным выше ограничениям, но для которой величина $e^{(\mu+\delta)\varphi}$ не является суммируемой при предельном значении μ и любом $\delta > 0$.

Элементарное вычисление показывает, что оценки следствия сходятся при $\lambda \to 0$ к данным в теореме 1.2. Следовательно, по крайней мере в этом аспекте величину (1.11) можно считать более гибкой, чем диадическую норму BMO. С другой стороны, в чём-то она и хуже; например, она – не норма. Условие (1.12) представляет важность для доказательства, но мы не знаем, является ли оно действительно необходимым; для некоторых подобных результатов – является (см. замечание 2.5 в конце подраздела 2.1). От условия можно избавиться, если определять функцию φ на окружности. Распространим определение величины (1.11) на случай окружности естественным образом:

$$[\varphi]_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})} = \sup\Big\{\big\langle(\varphi_{\mathrm{per}}-\langle\varphi_{\mathrm{per}}\rangle_I)^2\big\rangle_I \,\Big|\, I \text{ – подынтервал } \mathbb{R} \text{ и } \langle\varphi_{\mathrm{per}}\rangle_I \in \lambda\mathbb{Z}\Big\}. \qquad (1.14)$$

Следствие 1.6. *Зафиксируем числа $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$. Пусть $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ – квадратично-суммируемая функция, удовлетворяющая условию $[\varphi]_{\mathrm{BMO}} < \varepsilon$. Величина $e^{\mu\varphi}$ суммируема, если выполнено условие* (1.13). *Оценка точна в том смысле, что найдётся такая функция φ, что $[\varphi]_{\mathrm{BMO}} < \varepsilon$, но величина $e^{(\mu+\delta)\varphi}$ не является суммируемой при предельном значении параметра μ и любом $\delta > 0$.*

В литературе представлены результаты об априори более слабых условиях, тем не менее влекущие классическое условие BMO. В основном, описываются функции $h\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, допускающие следующее заключение:

$$\sup_{\substack{I \text{ - подынтервал} \\ \text{отрезка } [0,1]}} \big\langle h(\varphi - \langle\varphi\rangle_I)\big\rangle_I < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi \in \mathrm{BMO}([0,1]). \qquad (1.15)$$

Отсылаем читателя к ранней работе [10], а также к статьям [2,13,14,16] и [23]. Мы не смогли найти близкие к приведённым выше следствиям результаты в литературе.

В следующем параграфе будут введены более общие классы функций и для них сформулированы результаты в духе следствий 1.5 и 1.6. Это основные результаты данной работы (теоремы 2.4 и 2.9). Также из оных теорем 2.4 и 2.9 в подразделе 2.4 будут выведены упомянутые следствия. Разделы 3 и 4 содержат доказательства основных результатов. В приложение помещены вспомогательные результаты: краткое описание теоремы Лебега о дифференцировании интеграла в разделе A.1 и доказательства технических геометрических утверждений в разделе A.2.

2. Описание результатов

2.1. Классы функций. Функции класса BMO и обладающие конечной величиной (1.11) связаны с определёнными векторными функциями и мартингалами. Мы будем следовать обозначениям работы [29], которая, в свою очередь, обобщает статьи [7, 19] и [22]. Пусть Ω_{O} – открытое строго выпуклое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$. Это множество значений средних наших векторных функций и мартингалов. В свою очередь, замкнутое множество $\Omega_{\mathrm{I}} \subset \Omega_{\mathrm{O}}$ – запретное для средних, оно накладывает ограничения на средние колебания. Например, параболическая полоса P_ε, определённая формулой (1.3), является теоретико-множественной разностью множеств $\mathrm{cl}\,\Omega_{\mathrm{O}}$ и $\mathrm{int}\,\Omega_{\mathrm{I}}$, заданных соотношениями

$$\Omega_{\mathrm{O}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 < x_2\}; \qquad \Omega_{\mathrm{I}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + \varepsilon^2 \leqslant x_2\}. \tag{2.1}$$

Величина (1.11), в свою очередь, порождена областью, являющейся разностью множеств $\mathrm{cl}\,\Omega_{\mathrm{O}}$ и Ω_{I}, где

$$\Omega_{\mathrm{O}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 < x_2\}; \quad \Omega_{\mathrm{I}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1 = \lambda n, x_2 \geqslant \lambda^2 n^2 + \varepsilon^2\Big\}. \tag{2.2}$$

Иными словами, если $[\varphi]_{\mathrm{BMO}} < \varepsilon$, то $\langle\psi\rangle_J \notin \Omega_{\mathrm{I}}$ для всякого интервала J, здесь $\psi = (\varphi, \varphi^2)$; и наоборот, если все средние функции ψ избегают множества Ω_{I}, то $[\varphi]_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon$. См. рис. 1.

В предыдущих статьях множество Ω_{I} предполагалось строго выпуклым. Теперь мы хотим избавиться от этого предположения. Постулируем следующие "аксиомы":

1) граница множества $\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}$ не содержит лучей; (2.3)
2) замыкание множества $\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}$ лежит внутри Ω_{O}; (2.4)
3) максимальные вписанные конусы множеств Ω_{O} и $\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}$ конгруэнтны и $\mathrm{int}\,\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$; (2.5)
4) множество $(\mathrm{int}\,\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}) \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$ – локально конечное объединение компонент связности ω_j; (2.6)
5) для любого j существует опорная плоскость L_j к $\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}$, содержащая $E_j = \partial\omega_j \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$. (2.7)

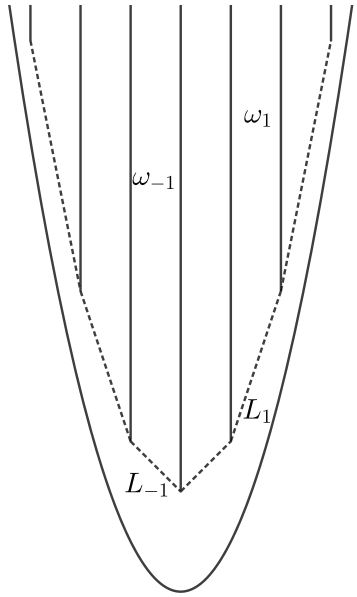

Рис. 1. Область, порождённая “нормой” (1.11).

Четвёртое условие означает, что всякая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^d$ пересекает лишь конечное число множеств ω_j. Мы оставляем читателю проверку того, что область (2.2) удовлетворяет всем пяти требованиям. Дадим краткое пояснение их сути. Первое условие (2.3), в частности, влечёт замкнутость множества $\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ посредством следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $F \subset \mathbb{R}^d$ – такое замкнутое множество, что множество $\partial \operatorname{conv} F$ не содержит лучей. В таком случае*, $\operatorname{cl}\operatorname{conv} F = \operatorname{conv} F$.

Было бы любопытно найти бесконечномерные аналоги этой леммы и прояснить её связи с теоремой Крейна–Мильмана. Доказательство леммы 2.1 читатель может найти в подразделе A.2.

Второе требование (2.4) весьма естественно в случае $d = 2$, наиболее интересном для приложений. Для больших значений параметра d нарушение этого предположения может давать неожиданные интересные эффекты, пока что почти не изученные. Например, второе требование нарушено в случае трёхмерных областей, появляющихся в работах [20] и [25].

Третье требование (2.5) также необходимо для построения теории в случае $d = 2$. В статьях [19] и [29] оно именовалось условием конуса. В его отсутствии в случае $d = 2$ многие естественные функции Беллмана просто равны $-\infty$ в некоторых частях области (см. леммы 2.4 и 4.8 работы [29]). Предположения (2.3), (2.4) и (2.5) касаются скорее выпуклой оболочки $\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$, чем самого множества Ω_{I}. Четвёртое требование (2.6) упрощает структуру запретного множества, а пятое, (2.7), совершенно незаменимо в доказательстве. Без него результаты не могут быть верны ни в каком смысле (см. замечание 2.10 ниже).

Замечание 2.2. Предположим, что условия (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) и (2.7) выполнены. В таком случае,

$$\partial \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}} \setminus \Omega_{\mathrm{I}} = \bigcup_j \big(\partial\omega_j \setminus \Omega_{\mathrm{I}}\big) \subset \bigcup_j L_j. \tag{2.8}$$

Приведённое тождество нуждается в пояснении.

Включение $\partial \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}} \setminus \Omega_{\mathrm{I}} \subset \bigcup_j \big(\partial\omega_j \setminus \Omega_{\mathrm{I}}\big)$ можно обосновать следующим образом. Если точка x принадлежит множеству $\partial \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$, но не множеству Ω_{I}, то найдётся последовательность лежащих в множестве $\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}\setminus\Omega_{\mathrm{I}}$ точек $\{x_n\}_n$, стремящаяся к x (мы воспользовались непустотой множества $\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$, влекомой условием (2.5)). По требованию (2.6), найдутся такие индекс j и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_k$, что $x_{n_k} \in \omega_j$. Это и доказывает желаемое включение. Обратное же включение напрямик следует из определений.

Обозначим символом L_j^+ открытое полупространство, порождённое гиперплоскостью L_j и содержащее множество $\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. Для всякой точки $x \in E_j$ найдётся настолько малый радиус r, что $B_r(x)\cap L_j^+ \subset \omega_j$.

Чтобы доказать это, положим число r столь малым, что $B_r(x)\cap\Omega_{\mathrm{I}} = \varnothing$. Предположим теперь, что нашлась точка $y \notin \omega_j$, лежащая в множестве $B_r(x)\cap L_j^+$. Так как $x \in \partial\omega_j$, также найдётся и точка $z \in \omega_j$ в множестве $B_r(x)\cap L_j^+$. Следовательно, существует точка множества $\partial\omega_j$ на отрезке $[y, z]$, что противоречит условию (2.7). Таким образом, всякая точка $y \in B_r(x) \cap L_j^+$ лежит в множестве ω_j.

Будем пользоваться удобными обозначениями

$$\Omega = \operatorname{cl}\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \Omega_{\mathrm{I}}; \quad \Omega_{\mathrm{conv}} = \operatorname{cl}\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}. \tag{2.9}$$

Отметим, что в отличие от изложения работ [19] и [29], введённые множества не являются замкнутыми. Завершим обсуждение налагаемых на область Ω ограничений простым достаточным условием.

Предложение 2.3. *Пусть* $d = 2$ *и множество* Ω *порождено множествами* Ω_{I} *и* Ω_{O}*, удовлетворяющим условиям* (2.3), (2.4), (2.5) *и* (2.6). *Если множество* Ω_{I} *линейно связно, то и последнее требование* (2.7) *выполнено.*

Доказательство. Рассмотрим множество ω_j для некоторого индекса j. Пусть $x \in \partial\omega_j \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$. Тогда $x \in \partial \operatorname{conv} \Omega_{\mathrm{I}}$. Обозначим символом ℓ опорную прямую к множеству $\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ в точке x. Достаточно доказать, что эта прямая единственна и не зависит от выбора точки $x \in \partial\omega_j \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$.

Так как граница множества $\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ не содержит лучей, множество $\ell \cap \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ ограничено и замкнуто. Его самая левая и самая правая (внутри прямой ℓ) точки P и Q лежат в множестве Ω_{I}. Из предположения о линейной связности множества Ω_{I} следует существование пути γ, соединяющего точки P и Q внутри множества Ω_{I}. Следовательно, множество ω_j лежит внутри контура, ограниченного отрезком $[P, Q]$ и кривой γ. Таким образом, любая точка множества $\partial\omega_j \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$ лежит на прямой ℓ в силу формулы (2.8). □

Теперь пришло время определить функциональные классы. Мы будем работать с суммируемыми функциями, отображающими отрезок $[0,1]$ или окружность $\mathbb{T}$ в множество $\partial\Omega_{\mathrm{O}}$. Средние функций такого вида определяются покоординатно. Зададим классы функций

$$\boldsymbol{A}_\Omega = \Big\{\psi \in L_1([0,1], \mathbb{R}^d) \big| \forall x \in [0,1]\ \psi(x) \in \partial\Omega_{\mathrm{O}},\ \forall J \text{ подынтервал в } [0,1]\ \langle\psi\rangle_J \notin \Omega_{\mathrm{I}}\Big\}; \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{A}_\Omega^\circ = \Big\{\psi \in L_1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d) \big| \forall x \in \mathbb{T}\ \psi(x) \in \partial\Omega_{\mathrm{O}}, \forall J \text{ подынтервал в } \mathbb{R}\ \langle\psi_{\mathrm{per}}\rangle_J \notin \Omega_{\mathrm{I}}\Big\}. \tag{2.11}$$

Теперь мы можем сформулировать наш первый основной результат.

Теорема 2.4. *Предположим выполнение требований* (2.3), (2.4),(2.5), (2.6) *и* (2.7). *В таком случае,* $\langle\psi\rangle_{\mathbb{T}} \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ *для всякой функции* $\psi \in \boldsymbol{A}_\Omega^\circ$.

Замечание 2.5. Аналогичное утверждение для заданных на интервале функций неверно. А именно, можно рассмотреть область (2.2) и такую функцию $\psi\colon [0,1] \to \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = x_2\}$, что $\psi \in \boldsymbol{A}_\Omega$ и $\langle\psi\rangle_{[0,1]} \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. См. факт 9.2 в работе [29] касательно подобной функции, принимающей лишь три значения.

Замечание 2.6. Интервал $[0,1]$ можно заменить любым другим, и это никак не повлияет на формулировки утверждений. Более того, эти независимость от интервала (и самоподобие задачи) чрезвычайно важны.

2.2. Локально вогнутые функции. Рассмотрим множество $\omega \subset \mathbb{R}^d$. Функцию $G\colon \omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называют локально вогнутой, если вогнуто её сужение на любое выпуклое подмножество ω. Мы будем использовать стандартные соглашения о бесконечных значениях выпуклых и вогнутых функций (см. раздел 4 книги [15]). Локально вогнутые функции будут играть важную роль в наших рассмотрениях. Проиллюстрируем эту важность на стандартном примере пространства BMO. Пусть Ω – параболическая полоса P_ε, заданная формулой (1.3), а $G\colon P_\varepsilon \to \mathbb{R}$ – некоторая локально вогнутая функция. Пусть $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}([0,1])} \leqslant \varepsilon$ и пусть $\psi = (\varphi, \varphi^2)$ – соответствующая векторная функция. Применение леммы 1.1 задаёт разбиение $[0,1] = I_+ \cup I_-$. Если мы пренебрежём числом δ или предположим, что функция G локально вогнута на слегка более широкой полосе, то

$$G(x) \geqslant \frac{|I_+|}{|I|}G(x_+) + \frac{|I_-|}{|I|}G(x_-), \quad x_\pm = \langle \psi \rangle_{I_\pm}, \tag{2.12}$$

так как функция $G|_{[x_+, x_-]}$ вогнута. Применим теперь лемму 1.1 к каждому из интервалов $I_\pm$ в роли $[0,1]$ и получим хорошее разбиение каждого из них. Мы придём к разбиению отрезка $[0,1]$ на четыре таких интервала J, что

$$G(x) \geqslant \sum_J \frac{|J|}{|I|}G(x_J), \qquad x_J = \langle \psi \rangle_J. \tag{2.13}$$

Продолжая действовать аналогичным образом, мы на шаге n получаем разбиение отрезка $[0,1]$ на 2^n таких промежутков J, что выполнено аналогичное неравенство. Отметим, что длина любого из интервалов J не превосходит $(1-\nu)^n$, где число ν – данный в лемме 1.1 параметр разбиения. Сумма в правой части неравенства (2.13) сойдётся к интегралу $\int_0^1 G(\psi(t))\,dt$ (мы пропускаем основанный на теореме Лебега о дифференцировании интеграла предельный переход). В предположении тождества $G(t,t^2) = e^t$, которое можно трактовать как граничное условие на локально вогнутую функцию G, приходим к оценке

$$G(x) \geqslant \int\limits_0^1 e^{\varphi(t)}\,dt. \tag{2.14}$$

О ней можно думать как о версии неравенства Йенсена на невыпуклой области, если переписать её в виде $G(\langle\psi\rangle_{[0,1]}) \geqslant \langle G(\psi)\rangle_{[0,1]}$. Процедура разбиения интервала на подынтервалы и контроля величин вида (2.13) зачастую неформально называется *беллмановской индукцией*.

Таким образом, существование удовлетворяющей граничному условию $G(t,t^2) = e^t$ локально вогнутой функции влечёт оценки в духе Джона и Ниренберга. Более того, оказывается, что наименьшая возможная такая функция G влечёт точные оценки и, в частности, теорему 1.2. Чтобы ввести в рассмотрение этот объект, вернёмся в общность произвольных множеств Ω_{I} и Ω_{O}. Пусть функция $f\colon \partial\Omega_{\mathrm{O}} \to \mathbb{R}$ локально ограничена. Рассмотрим множество

$$\Lambda_{\Omega,f} = \Big\{G\colon \Omega \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \Big| G \text{ локально вогнута на } \Omega \text{ и } \forall x\in\partial\Omega_{\mathrm{O}}\ G(x)=f(x)\Big\} \tag{2.15}$$

и поточечно наименьшую функцию

$$\mathfrak{B}_{\Omega,f}(x) = \inf\Big\{G(x)\ \Big|\ G\in\Lambda_{\Omega,f}\Big\}, \qquad x\in\Omega. \tag{2.16}$$

Отметим включение $\mathfrak{B}_{\Omega,f} \in \Lambda_{\Omega,f}$. Введённой функции уготована важная роль в дальнейшем развитии сюжета.

Вычисление функции $\mathfrak{B}_{\Omega,f}$ – отдельная задача на пересечении дифференциальной геометрии и уравнений в частных производных. В случае $d = 2$ и строго выпуклого множества Ω_{I}, она была решена в работе [6] (частные случаи рассмотрены ранее в статьях [8] и [9]).

Замечание 2.7. Беллмановская индукция основывается на инвариантности задачи относительно растяжений. Можно определить пространство BMO на произвольном интервале аналогичным образом и изучать соответствующее неравенство Джона–Ниренберга. Ввиду инвариантности задачи (см. замечание 2.6) точные константы в этом неравенстве не зависят от выбора отрезка.

2.3. Новая лемма о разбиении.

Лемма 2.8. *Предположим, что области* Ω_{O} *и* Ω_{I} *удовлетворяют требованиям* (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) *и* (2.7). *Для всякой функции* $\psi \in \boldsymbol{A}_\Omega$, *удовлетворяющей условию* $x = \langle\psi\rangle_{[0,1]} \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$, *существует* *такое нетривиальное разбиение* $[0,1] = I_+ \cup I_-$ *единичного отрезка на два интервала, что*

$$\Big[\langle\psi\rangle_{I_+}, \langle\psi\rangle_{I_-}\Big] \subset \operatorname{cl}\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}. \tag{2.17}$$

Под нетривиальным разбиением мы подразумеваем такое разбиение, что внутренности интервалов $I_\pm$ непусты, сами интервалы пересекаются по концам и накрывают отрезок $[0,1]$. Хотя, в общем смысле эту лемму можно считать обобщением леммы 1.1, есть некоторые тонкости. В новой лемме отсутствует какое-либо расширение полосы (а в старой лемме 1.1 оно необходимо), а также нет равномерного контроля малости интервалов I_+ и I_-. Причина этого в незамкнутости области Ω. В окрестности множества Ω_{I} область Ω открыта. Из этого факта будут проистекать трудности с применением леммы 2.8. Нам придётся улучшить беллмановскую индукцию до рассуждения, которое мы назовём *трансфинитной беллмановской индукцией*. См. детали в подразделе 4.2.

Мы теперь готовы сформулировать наш второй основной результат, влекущий следствие 1.5.

Теорема 2.9. *Пусть области* Ω_{O} *и* Ω_{I} *удовлетворяют требованиям* (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) *и* (2.7), *а функция* $f\colon \partial\Omega_{\mathrm{O}} \to \mathbb{R}$ *непрерывна и ограничена снизу. Неравенство*

$$\langle f(\psi)\rangle_{[0,1]} \leqslant \mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{conv}},f}(\langle\psi\rangle_{[0,1]}) \tag{2.18}$$

справедливо для всякой такой функции $\psi \in \boldsymbol{A}_\Omega$, *что*

$$\langle\psi\rangle_{[0,1]} \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}.$$

Замечание 2.10. Утверждение теоремы неверно без требования (2.7). Пример дан в разделе 9 работы [29]. Поясним: пусть

$$\Omega_{\mathrm{O}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\},$$

а Ω_{I} – объединение двух кругов с центрами $(1/2,0)$ и $(-1/2,0)$ и радиусами 0.4. Зададим функцию f формулой $f(x) = -|x_1|$, а функция $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ будет принимать два значения:

$$\psi(t) = \begin{cases} (0,-1), & t \in [0,0.9);\\ (0,1), & t \in [0.9,1]. \end{cases} \tag{2.19}$$

Нетрудно видеть, что $\psi \in \boldsymbol{A}_\Omega$, $x = \langle\psi\rangle_{[0,1]} \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ и $\langle f(\psi)\rangle_{[0,1]} = 0$. Однако (чтобы избежать повтора) в этом случае $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{conv}},f}(x) < 0$.

Замечание 2.11. Условие непрерывности функции f в теореме 2.9 кажется избыточным. По крайней мере, его можно ослабить до предположения, что функция f полунепрерывна снизу, существенно не изменяя доказательства.

Замечание 2.12. Область $\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ не является строго выпуклой. Следовательно, к ней нельзя применять теорию работы [6] даже в случае $d = 2$. Однако эвристика, подсказанная этой работой, позволяет вычислить функцию $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{conv}},f}$, что мы и продемонстрируем в следующем подразделе.

2.4. Доказательства следствий.

Доказательство следствия 1.5. Благодаря теореме 2.9, доказательство оценки сводится к проверке конечности минимальной локально вогнутой функции $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{conv}},f}$ для области Ω, определенной формулами (2.2) и (2.9), и граничного значения $f(x) = e^{\mu x_1}$. Обозначим функцию $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{conv}},f}$ просто символом $\mathfrak{B}$. Мы приведём формулу для функции $\mathfrak{B}$. Но перед этим подметим естественное соотношение однородности

$$\mathfrak{B}(x_1 + \lambda, x_2 + 2x_1\lambda + \lambda^2) = e^{\lambda\mu}\mathfrak{B}(x_1, x_2), \qquad x \in \Omega. \tag{2.20}$$

Отметим также, что кручение кривой $t \mapsto (t, t^2, e^{\mu t})$ положительно. Теория работы [6] (см. раздел 3.3 той работы) подсказывает, что функция $\mathfrak{B}$ аффинна вдоль изображённых на рис. 2 отрезков. Такое разбиение области Ω_{conv} называют *фолиацией*. В нашем случае фолиация состоит из соединяющих точки границы $\partial\Omega_{\mathrm{O}}$ с точками вида $(\lambda n, \lambda^2 n^2 + \varepsilon^2)$ отрезков. Если бы граница области $\partial \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$ была гладкой, фолиирующие отрезки бы её касались. Хотя, в общем, теория работы [6] применима лишь к областям с достаточно гладкой границей, в случае, когда кручение граничной кривой положительно, теория работает и для областей с негладкой верхней границей. Причина этого явления в том, что условие на знак кручения зависит лишь от нижней границы. Пусть (x_1, x_1^2) – точка пересечения прямой, проходящей через точки $(0, \varepsilon^2)$ и $(\lambda, \lambda^2 + \varepsilon^2)$, с нижней параболой. В таком случае,

$$x_1 = \frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \varepsilon^2}. \tag{2.21}$$

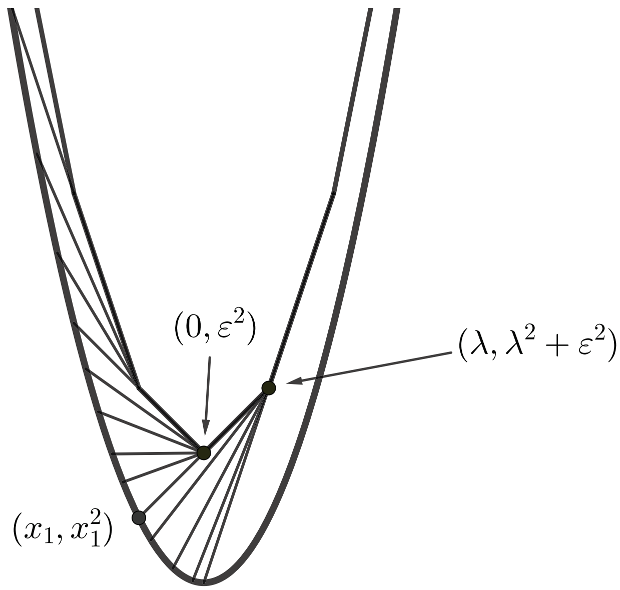

Рис. 2. Фолиация функции Беллмана.

Воспользовавшись аффинностью функции $\mathfrak{B}$ на отрезке $[(x_1,x_1^2),(\lambda,\lambda^2+\varepsilon^2)]$ и тождеством (2.20), получаем

$$\mathfrak{B}(\lambda n,\lambda^2n^2+\varepsilon^2) = \frac{\lambda}{\lambda/2+\sqrt{\lambda^2/4+\varepsilon^2}+(\lambda/2-\sqrt{\lambda^2/4+\varepsilon^2})e^{\lambda\mu}}e^{\mu(\lambda n+\lambda/2-\sqrt{\lambda^2/4+\varepsilon^2})}, \quad n\in\mathbb{Z}. \qquad (2.22)$$

Условие (1.13) гарантирует, что приведённая формула задаёт положительные значения. Значения в остальных точках области Ω восстанавливаются по линейности из приведённой выше формулы и структуры фолиации. Оставим проверку локальной вогнутости функции $\mathfrak{B}$ читателю. Интегрируемость функции $e^{\mu\varphi}$ доказана.

Для доказательства точности оценки рассмотрим специальную функцию φ; её конструкция, опять же, навеяна общей теорией, изложенной в разделе 5 работы [6]. Положим

$$a = 1 - \frac{\lambda}{\lambda/2 + \sqrt{\lambda^2/4 + \varepsilon^2}} \tag{2.23}$$

и зададим функцию $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\varphi(t) = \Bigl(n + \frac{1}{2}\Bigr)\lambda - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \varepsilon^2}, \qquad t \in [a^{n+1}, a^n], \quad n \geqslant 0. \tag{2.24}$$

Нетрудно заметить, что $\langle e^{\mu\varphi}\rangle_{[0,1]} = \mathfrak{B}(0, \varepsilon^2)$ и кривая

$$\gamma(t) = \bigl(\langle \varphi \rangle_{[0,t]}, \langle \varphi^2 \rangle_{[0,t]}\bigr) \tag{2.25}$$

следует вдоль верхней границы области Ω_{conv} из $+\infty$ в точку $(0, \varepsilon^2)$. Таким образом, из теории раздела 5 монографии [6] (точнее, следствия 5.1.4), имеем $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \mathrm{int\,conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}}$. Это и доказывает точность наших оценок. □

Доказательство следствия 1.6. Чтобы доказать оценку, рассмотрим соответствующую векторную функцию $\psi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$, заданную формулой $\psi(t) = (\varphi(t), \varphi^2(t))$. Тогда $\psi \in \boldsymbol{A}_{\Omega}^{\circ}$, где область Ω определена формулами (2.2) и (2.9). Согласно теореме 2.4, $\langle \psi \rangle_{\mathbb{T}} \notin \mathrm{int\,conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}$, и поэтому мы можем применить теорему 2.9. Эта теорема показывает интегрируемость функции $e^{\mu\varphi}$, если μ удовлетворяет оценке (1.13).

Для доказательства точности мы просто сошлёмся на лемму 3.3 работы [21], которая позволяет сконструировать такую функцию $\tilde{\psi} \in \boldsymbol{A}_{\tilde{\Omega}}^{\circ}$, что $\langle e^{\mu\tilde{\psi}_1}\rangle_{\mathbb{T}} \geqslant \mathfrak{B}_{\tilde{\Omega}, e^{\mu\cdot}}(\langle \tilde{\psi} \rangle_{\mathbb{T}})$. Область $\tilde{\Omega}$ здесь построена стандартным образом по множеству Ω_{O} и выпуклому множеству $\tilde{\Omega}_{\mathrm{I}}$, которое слегка меньше множества $\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}$. □

3. Доказательство теоремы 2.4

3.1. Доказательство. Предположим противное, пусть $x = \langle \psi \rangle_{[0,1]} \in \mathrm{int}(\mathrm{conv}\,\Omega_{\mathrm{I}}) \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$ для некоторой функции $\psi \in \boldsymbol{A}_{\Omega}^{\circ}$. Мы будем неявно отождествлять функцию $\psi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ с её периодизацией $\psi_{\mathrm{per}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ и надеемся, что это не приведёт к путанице.

Из определения следует, что $x \in \omega_j$ для некоторого индекса j. Множества E_j, введённые в требовании (2.7), позволяют определить момент остановки $\tau(t)$:

$$\tau(t) = \inf\Bigl\{ s \in \mathbb{R} \Bigm| s > 0, \quad \langle \psi \rangle_{[t, t+s]} \in E_j \Bigr\}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

С этого места и до конца доказательства мы будем опускать индекс j в наших обозначениях. Мы также будем пользоваться специальным определением точек Лебега, см. его в подразделе A.1. Во-первых, $\tau(t) > 0$ для всякой точки Лебега t, так как кривая $s \mapsto \langle\psi\rangle_{[t,t+s]}$, $s \in (0,1]$, стремится к точке $\psi(t) \in \partial\Omega_{\mathrm{O}}$ при стремлении $s \to 0+$, а множество E отделено от границы $\partial\Omega_{\mathrm{O}}$ согласно требованию (2.4). Во-вторых, $\tau(t) \leqslant 1$ для всякой точки Лебега t, так как пресловутая кривая соединяет точку x с множеством $\partial\Omega_{\mathrm{O}}$ и, следовательно, пересекает множество E (она пересекает множество $\partial\omega$ по соображениям непрерывности и не пересекает Ω_{I} из-за условия $\psi \in \boldsymbol{A}^{\circ}_{\Omega}$).

Для произвольного числа $\delta > 0$ рассмотрим множество

$$\tilde{U}_\delta = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ – точка Лебега функции } \psi \ \text{ и } \tau(t) > \delta\}. \tag{3.2}$$

По непрерывности меры, $|[0,1] \setminus \tilde{U}_\delta| \to 0$ при стремлении $\delta \to 0$. Пусть $U_\delta \subset \tilde{U}_\delta$ – такое замкнутое 1-периодичное множество, что

$$|[0,1] \setminus U_\delta| \leqslant 2|[0,1] \setminus \tilde{U}_\delta| + \delta. \tag{3.3}$$

В частности, $|[0,1] \setminus U_\delta| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Построим последовательность $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ по правилу

$$t_{n+1} = \inf\Big\{u \in \mathbb{R} \;\Big|\; u \geqslant t_n + \tau(t_n) \text{ и } u \in U_\delta\Big\}; \tag{3.4}$$

положим также $t_0 = 0$ (не умаляя общности, предположим, что $0 \in U_\delta$). Построенная последовательность обладает тремя простыми свойствами:

1) $\langle\varphi\rangle_{[t_n,t_n+\tau(t_n)]} \in E$;
2) $t_{n+1} \geqslant t_n + \delta$;
3) $[t_n + \tau(t_n), t_{n+1}] \subset \mathbb{R} \setminus U_\delta$.

Второе из перечисленных свойств, в частности, влечёт предельное соотношение $t_n \to \infty$. Пусть число N достаточно велико. Тогда,

$$\langle\psi\rangle_{[0,t_N]} = \frac{\sum_0^{N-1}\tau(t_n)}{t_N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\tau(t_n)}{\sum_{k=0}^{N-1}\tau(t_k)}\langle\psi\rangle_{[t_n,t_n+\tau(t_n)]} + \frac{1}{t_N}\sum_{n=0}^{N-1}\int\limits_{t_n+\tau(t_n)}^{t_{n+1}}\psi(s)\,ds. \tag{3.5}$$

Второе слагаемое оценим при помощи третьего свойства последовательности $\{t_n\}$:

$$\left|\frac{1}{t_N}\sum_{n=0}^{N-1}\int\limits_{t_n+\tau(t_n)}^{t_{n+1}}\psi(s)\,ds\right| \leqslant \frac{1}{t_N}\int\limits_{[0,t_N]\setminus U_\delta}|\psi(s)|\,ds \leqslant \frac{t_N+1}{t_N}\mathrm{Er}, \qquad (3.6)$$

где $\mathrm{Er} = \int_{[0,1]\setminus U_\delta}|\psi|$. Из абсолютной непрерывности интеграла следует предельное соотношение $\mathrm{Er}\to 0$ при $\delta\to 0$.

Отметим, что первая сумма в формуле (3.5) (без коэффициента $t_N^{-1}\sum_0^{N-1}\tau(t_n)$) принадлежит множеству $\operatorname{conv}E$, лежащему в гиперплоскости L по требованию (2.7). Коэффициент, в свою очередь, можно оценить величиной

$$\frac{\sum_0^{N-1}\tau(t_n)}{t_N} \geqslant 1 - \frac{|[0,t_N]\setminus U_\delta|}{t_N} \geqslant 1 - \frac{t_N+1}{t_N}|[0,1]\setminus U_\delta|. \qquad (3.7)$$

В частности, он стремится к единице при $\delta\to 0$. Чтобы придти к противоречию, достаточно правильными образом подобрать параметры. Сначала выберем число δ столь малым, что расстояние от точки λx до плоскости L больше, чем $2\mathrm{Er}$ при всяком выборе $\lambda\in[1-4\delta,(1-4\delta)^{-1}]$, а потом уже выберем достаточно большое число N. В таком случае, приведённые выше неравенства противоречат тем двум фактам, что первая сумма в формуле (3.5) лежит в L, в то время как всё выражение сходится к $x\in\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. $\square$

3.2. Полезная лемма. Приведённая ниже лемма понадобится нам в доказательстве теоремы 2.9. Её доказательство опирается на тот же круг идей, что и доказательство теоремы 2.4.

Лемма 3.1. *Пусть функция $\psi\in\boldsymbol{A}_\Omega$ задана на отрезке $[0,1]$, а точка $\langle\psi\rangle_{[0,1]} = x$ лежит в множестве ω_j для некоторого индекса j. Для всякого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое число $t\in(0,\varepsilon)$, что $\langle\psi\rangle_{[0,t]}\notin\omega_j$.*

Замечание 3.2. С формальной точки зрения, предположение $x\in\omega_j$ не нужно. Однако оно удобно для приложений.

Доказательство опирается на следующую лемму (являющуюся прямым следствием леммы Цорна).

Лемма 3.3. *Для всякого семейства $\mathcal{I} = \{I_x \mid x\in(0,1]\}$ непустых полуинтервалов $I_x = (y,x]\subset(0,1]$ найдётся такое множество $C\subset$*

$(0,1]$, *что* $\cup_{x\in C} I_x = (0,1]$ *и для всяких точек* $y, z \in C$, $y \neq z$, *интервалы* I_y *и* I_z *дизъюнктны.*

Иными словами, лемма строит дизъюнктные интервалы, в объединении дающие весь отрезок $(0,1]$; о ней можно думать как об одномерной версии теоремы Безиковича о покрытии.

Доказательство леммы 3.1. Предположим противное. Не умаляя общности, предположим, что $\varepsilon = 1$ и $\langle\psi\rangle_{[0,t]} \in \omega$ для всех $t \in (0,1]$. Символом $\mathfrak{L}$ обозначим множество лебеговых точек функции ψ в полуинтервале $(0,1]$. Так же, как и в доказательстве из предыдущего подраздела, мы опускаем индекс j в наших обозначениях и пишем просто ω, E и L, подразумевая ω_j, E_j и L_j, соответственно. Для всякой точки $t \in \mathfrak{L}$ найдётся такой непустой полуинтервал $I_t = (s,t]$, что $\langle\psi\rangle_{I_t} \in E$ (так как $\langle\psi\rangle_{(0,t]} \in \omega$ и $\langle\psi\rangle_{[s,t]} \to \partial\Omega_{\mathrm{O}}$ при $s \to t-$). Рассмотрим дизъюнктное семейство $\{J_i\}$ открытых подынтервалов полуинтервала $(0,1]$, покрывающих $(0,1]\setminus\mathfrak{L}$, суммарная длина которых не превосходит δ. Число δ мало, точное значение будет предъявлено позже. Всякая точка $t \notin \mathfrak{L}$ принадлежит некоторому интервалу $J_i = (a_i, b_i)$. Положим $I_t = (a_i, t]$.

Применим лемму 3.3 и выберем не более чем счётное дизъюнктное подсемейство $\{I_i\}_i$ нашего семейства $\{I_t\}_{t\in(0,1]}$. Интервалы I_i, соответствующие точкам Лебега, обозначим символами g_i, а соответствующие не-лебеговым точкам – символами b_i. В таком случае,

$$\sum_i |b_i| \leqslant \delta, \qquad \forall i \quad \langle\psi\rangle_{g_i} \in L. \tag{3.8}$$

Остаётся провести рассуждение, подобное использованному в доказательстве теоремы 2.4. Представим

$$x = \langle\psi\rangle_{[0,1]} = \int\limits_{\cup_i b_i} \psi + \sum_i |g_i| \sum_k \frac{|g_k|}{\sum_i |g_i|} \langle\psi\rangle_{g_k}. \tag{3.9}$$

Первое слагаемое мало по абсолютной непрерывности интеграла и суммируемости функции ψ, второе слагаемое (без учёта коэффициента $\sum_i |g_i|$) лежит в плоскости L, а коэффициент $\sum_i |g_i|$ близок к 1. Всё это приводит нас к противоречию с тем, что $x \notin L$. $\square$

4. Доказательство теоремы 2.9

4.1. Доказательство леммы о разбиении. Приведём доказательство леммы 2.8. Не умаляя общности (см. замечание 2.6), будем предполагать, что $I = [0, 1]$. Рассмотрим два случая.

Случай А: $x \notin \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. Этот случай похож на классическую лемму 1.1. Рассмотрим разбиение $I_+(t) = [0, t]$, $I_-(t) = [t, 1]$, порождённое точкой $t \in (0, 1)$. Для краткости будем писать $x_\pm = x_{I_\pm}$ (напомним, что символ x_J обозначает среднее $\langle\psi\rangle_J$). Отметим, что точки $x_\pm$ непрерывно зависят от параметра t. Начнём рассмотрение с $t = 1/2$. Если в этом случае $[x_+, x_-] \cap \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}} = \varnothing$, то доказательство завершено. В противном случае, один из отрезков $[x_+, x)$ и $(x, x_-]$ пересекает множество $\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. Из выпуклости следует, что *не более*, чем один из двух отрезков может пересекать множество $\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. Не умаляя общности, будем считать, что $[x_+, x) \cap \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$. Теперь перейдём к рассмотрению произвольных чисел $t \in (0, 1)$. Отметим, что $x_+(t) \to x$ при стремлении $t \to 1$. Поэтому отрезок $[x_+(t), x]$ не пересекает множество $\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$, если число t достаточно близко к 1. Пусть t_0 – наименьшее среди таких чисел $t > 1/2$, что $[x_+(t), x] \cap \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}} = \varnothing$. В таком случае, $[x_+(t_0), x] \cap \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$ и из выпуклости следует, что $[x, x_-(t_0)] \cap \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}} = \varnothing$. Положив $I_+ := I_+(t_0)$ и $I_- := I_-(t_0)$, завершаем рассмотрение случая А.

Случай Б: $x \in \operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. В этом случае $x \in L_j$ для некоторого индекса j по формуле (2.8) и так как $x \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}$. По лемме 3.1, надутся такие числа a и b, что $0 < a < 1/2 < b < 1$ и

$$A = \langle\psi\rangle_{[0,a]} \notin \omega_j, \qquad B = \langle\psi\rangle_{[b,1]} \notin \omega_j. \tag{4.1}$$

Будем говорить, что точка лежит выше (или ниже) плоскости L_j, если она лежит в том же (противоположном) замкнутом полупространстве относительно L_j, что и множество Ω_{I}; слова “строго выше” или “строго ниже” означают то же самое, но с заменой замкнутых полупространств открытыми. Опять же, для краткости будем опускать индекс j в наших обозначениях до конца доказательства. Мы хотим найти такое число $t \in (0, 1)$, что $\langle\psi\rangle_{[0,t]} \in L$; это и определит искомое разбиение. Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 1: либо точка A, либо точка B лежит выше L. Не умаляя общности, предположим, что точка A лежит строго выше L (случай, когда $A \in L$, очевиден). Рассмотрим кривую $\gamma\colon [a, 1] \to \mathbb{R}^d$, заданную по правилу

$$\gamma(t) = \langle \psi \rangle_{[0,t]}, \qquad t \in [a, 1]. \tag{4.2}$$

Кривая γ соединяет точки A и x. Положим

$$t_0 = \inf\{s \in [a, 1] \mid \gamma(s) \in L\}. \tag{4.3}$$

Достаточно доказать, что $t_0 < 1$. Предположим противное, пусть $t_0 = 1$. Следовательно, точка $\gamma(s)$ не может лежать ниже L ни для какого числа $s \in (a, 1)$, так как точка $\gamma(a)$ лежит строго выше L. В таком случае, $\gamma(s) \in \omega$ для достаточно близких к 1 значений параметра s, благодаря замечанию 2.2. Так как точка A лежит вне множества ω, найдётся такая точка t, что $\gamma(t) \in E \subset L$. Это противоречие. Следовательно, $t_0 \in [a, 1)$.

Подслучай 2: обе точки A и B лежат ниже L. В этом подслучае точка $\langle \psi \rangle_{[0,b]}$ лежит выше L, значит, существует такая точка $t_0 \in [a, b]$, что $\langle \psi \rangle_{[0,t_0]} \in L$. Остаётся положить $I_+ = [0, t_0]$ и $I_- = [t_0, 1]$. □

4.2. Трансфинитная беллмановская индукция. Введём обозначения перед тем, как переходить к доказательству теоремы 2.9. Для всякого замкнутого содержащего точки 0 и 1 множества $S \subset [0, 1]$ обозначим символом $\mathcal{I}_S$ множество дополнительных к множеству S интервалов. Для суммируемой на отрезке $[0, 1]$ функции ψ, принимающей значения в пространстве $\mathbb{R}^d$, положим

$$\mathbb{E}_S\psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in S; \\ \langle \psi \rangle_I, & x \in I \in \mathcal{I}_S. \end{cases} \tag{4.4}$$

Иными словами, функция $\mathbb{E}_S\psi$ – условное математическое ожидание случайной величины ψ относительно σ-алгебры, порождённой интервалами семейства $\mathcal{I}_S$ и всеми измеримыми подмножествами множества S. Если $S_1 \subset S_2$ – замкнутые множества, то

$$\mathbb{E}_{S_1}\psi = \mathbb{E}_{S_1}(\mathbb{E}_{S_2}\psi). \tag{4.5}$$

Лемма 4.1. *Пусть $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \ldots \subset S_n \subset \ldots$ – возрастающая последовательность замкнутых подмножеств интервала $[0, 1]$ (как обычно, мы предполагаем, что $\{0, 1\} \subset S_1$). Пусть $S = \mathrm{cl}(\cup_n S_n)$. Тогда $\mathbb{E}_{S_n}\psi(x) \to \mathbb{E}_S\psi(x)$ для почти всех точек $x \in [0, 1]$, коль скоро функция ψ суммируема на отрезке $[0, 1]$.*

Доказательство. Обозначим символом $\mathfrak{L}$ множество лебеговых точек функции $\mathbb{E}_S\psi$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай $x \notin S$. Найдётся интервал $I \in \mathcal{I}_S$, содержащий точку x. Существуют также интервалы $I_n \in \mathcal{I}_{S_n}$, сходящиеся к I. В таком случае, по непрерывности интеграла,

$$\mathbb{E}_{S_n}\psi(x) \stackrel{(4.5)}{=} \langle\psi\rangle_{I_n} \to \langle\psi\rangle_I = \mathbb{E}_S\psi(x), \qquad n \to \infty. \tag{4.6}$$

Случай $x \in \cup_n S_n$. В этом случае просто $\mathbb{E}_{S_n}\psi(x) = \mathbb{E}_S\psi(x)$ для достаточно большого числа n.

Случай $x \in S \setminus \cup_n S_n$. Во-первых, мы можем исключить из рассмотрения точки $x \in [0,1]$, являющиеся концами интервалов семейства $I \in \mathcal{I}_S$, потому что их не более, чем счётное число. Во-вторых, можем не учитывать точки $x \notin \mathfrak{L}$, так как они образуют множество нулевой меры. Для каждой из оставшихся точек найдётся такая последовательность $\{I_n\}_n$, что для всякого индекса $n \in \mathbb{N}$ справедливо включение $x \in I_n \in \mathcal{I}_{S_n}$. Так как $S_n \subset S_{n+1}$, верно и вложение $I_{n+1} \subset I_n$. Следовательно, последовательность $\{I_n\}_n$ либо стягивается в точку x, либо сходится к некоторому интервалу $I \in \mathcal{I}_S$. В последнем случае, точка x – один из концов отрезка I, так как мы предположили, что $x \in S$. В первом же случае желаемая сходимость следует из формулы (4.5) и того факта, что x – точка Лебега функции $\mathbb{E}_S\psi$:

$$\mathbb{E}_{S_n}\psi(x) \stackrel{(4.5)}{=} \mathbb{E}_{S_n}(\mathbb{E}_S\psi)(x) = \langle\mathbb{E}_S\psi\rangle_{I_n} \to \mathbb{E}_S\psi(x). \tag{4.7}$$

□

Пусть функция ψ удовлетворяет условиям теоремы 2.9. Рассмотрим набор множеств $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} = \Big\{S \subset [0,1] \;\Big|\; S \text{ замкнуто}, \ \{0,1\} \subset S, \ \forall I \in \mathcal{I}_S \quad \langle\psi\rangle_I \notin \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}\Big\}. \tag{4.8}$$

Также мы будем использовать величину

$$\operatorname{ch} S = \max\Big\{|I| \;\Big|\; I \in \mathcal{I}_S\Big\}. \tag{4.9}$$

Замечание 4.2. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ – такая же последовательность, как и в лемме 4.1, а $S = \operatorname{cl}(\cup_n S_n)$. Если все множества S_n принадлежат классу $\mathfrak{S}$, то и $S \in \mathfrak{S}$. Более того, $\operatorname{ch} S = \lim_n \operatorname{ch} S_n$.

Перед тем, как перейти к доказательству теоремы 2.9, отметим, что функции $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{O}}\setminus\operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}},f}$ и $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{conv}},f}$ совпадают на их общей области определения (см. предложение A.4 в приложении). Для краткости обозначим эту совпадающую функцию символом $\mathfrak{B}$.

Доказательство теоремы 2.9. Мы хотим применить лемму Цорна и поэтому вводим частичный порядок на множестве $\mathfrak{S}$. Будем писать, что $S_1 \prec S_2$, $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$, если либо $S_1 = S_2$, либо выполнены все три приведённые ниже условия:

1) $S_1 \subset S_2$;
2) $\operatorname{ch} S_2 < \operatorname{ch} S_1$;
3) $\langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S_2}\psi)\rangle_{[0,1]} \leqslant \langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S_1}\psi)\rangle_{[0,1]}$.

Чтобы применить лемму Цорна, нужно убедиться, что всякая цепь имеет верхнюю границу. Рассмотрим цепь $\{\mathfrak{S}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$; для удобства переименуем индексы: пусть $\alpha := \operatorname{ch} S_\alpha$. Следовательно, $\mathfrak{A} \subset [0,1]$ и $S_\alpha \prec S_\beta$, коль скоро $\alpha > \beta$.

Пусть $S = \operatorname{cl}(\cup_\alpha S_\alpha)$. Если значение $\inf \mathfrak{A}$ достигается на некотором элементе $\alpha \in \mathfrak{A}$, то доказывать нечего. Так как $\operatorname{ch} S = \inf \mathfrak{A}$, $\operatorname{ch} S < \operatorname{ch} S_\alpha$ для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Если нам удастся показать, что

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S}\psi)\rangle_{[0,1]} \leqslant \langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S_\alpha}\psi)\rangle_{[0,1]} \tag{4.10}$$

для всякого индекса α, то $S_\alpha \prec S$ для всякого α, и предположение леммы Цорна будет выполнено (отметим, что $S \in \mathfrak{S}$ благодаря замечанию 4.2). Для доказательства соотношения (4.10) рассмотрим последовательность α_n индексов α, убывающую к числу $\inf \mathfrak{A}$. Достаточно доказать, что

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S}\psi)\rangle_{[0,1]} \leqslant \lim_n \langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S_{\alpha_n}}\psi)\rangle_{[0,1]}; \tag{4.11}$$

отметим, что предел в правой части неравенства существует как предел невозрастающей последовательности. Предельное соотношение (4.11), в свою очередь, следует из леммы 4.1, полунепрерывности снизу функции $\mathfrak{B}$ (см. предложение A.3 в приложении) и леммы Фату:

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S}\psi)\rangle_{[0,1]} = \langle \mathfrak{B}(\lim_n \mathbb{E}_{S_{\alpha_n}}\psi)\rangle_{[0,1]} &\leqslant \langle \lim_n \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S_{\alpha_n}}\psi)\rangle_{[0,1]}\\ &\leqslant \lim_n \langle \mathfrak{B}(\mathbb{E}_{S_{\alpha_n}}\psi)\rangle_{[0,1]}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Чтобы применять лемму Фату, необходимо проверить неотрицательность функции $\mathfrak{B}$. Она, в свою очередь, следует из неотрицательности функции f и требования (2.5), см. леммы 2.4 и 4.8 работы [29].

Согласно лемме Цорна, существует максимальный элемент $S_{\max}$ в множестве $\mathfrak{S}$. Если $S_{\max} \neq [0,1]$, то семейство $\mathcal{I}_{S_{\max}}$ непусто. Пусть $I \in$

$\mathcal{I}_{S_{\max}}$ – интервал. Применив к нему лемму 2.8, получим такое разбиение $I = I_+ \cup I_-$, что

$$\mathfrak{B}\big(\langle\psi\rangle_{I}\big) \geqslant \frac{|I_+|}{|I|}\mathfrak{B}\big(\langle\psi\rangle_{I_+}\big) + \frac{|I_-|}{|I|}\mathfrak{B}\big(\langle\psi\rangle_{I_-}\big), \tag{4.13}$$

благодаря локальной вогнутости функции $\mathfrak{B}$ на множестве

$$\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \operatorname{int}\operatorname{conv}\Omega_{\mathrm{I}}.$$

Таким образом, применяя лемму 2.8 к каждому из самых длинных интервалов семейства $\mathcal{I}_{S_{\max}}$, получим новый элемент семейства $\mathfrak{S}$, превосходящий $S_{\max}$. А это противоречит максимальности последнего. Следовательно, $S_{\max} = [0,1]$, и неравенство (2.18) следует из определения порядка. □

Приложение А

А.1. О точках Лебега. Сформулируем нужную нам версию теоремы Лебега о диффенцировании интеграла, она слегка отличается от общепринятой. Пусть функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ локально суммируема. Точку $t \in \mathbb{R}$ назовём точкой Лебега функции φ, если

$$\lim_{I\to t}\langle|\varphi - A|\rangle_{I} \to 0 \tag{A.1}$$

для некоторого фиксированного числа $A = A(t)$. Символом I здесь обозначен произвольный замкнутый отрезок, содержащий точку t. В частности, точка t может быть концом отрезка I. Сходимость $I \to t$ означает сходимость концов отрезка I к точке t.

Теорема А.1 (теорема Лебега о дифференцировании интеграла)**.** *Почти все точки – точки Лебега и $A(t) = \varphi(t)$ для почти всех точек t.*

Детали доказательства можно найти в разделе 2.2 книги [4]. По сути, теорему А.1 можно вывести из $L_1 \to L_{1,\infty}$ ограниченности соответствующего максимального оператора

$$M\varphi(t) = \sup_{I\colon t\in I}\langle|\varphi|\rangle_{I} \tag{A.2}$$

стандартным образом. Этот максимальный оператор, в свою очередь, допускает поточечную оценку классической центрированной максимальной функцией Харди–Литтлвуда, что и влечёт нужную ограниченность.

Положим $\varphi(t) := A(t)$ и заметим, что если t – точка Лебега функции φ, то

$$\lim_{I \to t} \langle \varphi \rangle_I = \varphi(t) \tag{A.3}$$

при стремлении замкнутого отрезка I, содержащего точку t, к t.

A.2. Вспомогательные геометрические результаты. Доказательство леммы 2.1 основано на элементарном наблюдении о выпуклых телах без лучей на границе. Такое условие (отсутствие лучей на границе выпуклого множества) уже появлялось в смежном контексте в работе [1].

Лемма A.2. *Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ – замкнутое выпуклое множество, а L – гиперплоскость. Если множество $C \cap L$ непусто и не содержит лучей, то множество $C \cap (L + \overline{B_r(0)})$ компактно для всякого числа $r \geqslant 0$.*[1]

Доказательство. Ввиду непустоты множества $C \cap L$, найдётся точка $x \in C \cap L$. Множество $C \cap (L + \overline{B_r(0)})$ замкнуто, поэтому нам нужно лишь доказать его ограниченность. Предположим противное: пусть нашлась такая последовательность $\{y_n\}_n$, что $y_n \in C \cap (L + \overline{B_r(0)})$ и $|y_n| \to +\infty$. Пусть $\{y_{n_k}\}_k$ – такая её подпоследовательность, что существует предел $e = \lim_k \frac{y_{n_k}}{|y_{n_k}|}$. Из выпуклости и замкнутости множества C следует, что включение

$$\{x + \alpha e \mid \alpha \in [0, +\infty)\} \subset C \cap L, \tag{A.4}$$

что противоречит предположениям. Следовательно, множество $C \cap (L + \overline{B_r(0)})$ компактно. $\square$

Доказательство леммы 2.1. Предположим противное, пусть нашлась точка $x \in \partial \operatorname{conv} F \setminus \operatorname{conv} F$. Рассмотрим опорную к множеству $\operatorname{cl} \operatorname{conv} F$ в точке x гиперплоскость L. Согласно лемме A.2, множество $(\operatorname{cl} \operatorname{conv} F) \cap (L + \overline{B_r(0)})$ компактно. Следовательно, $F \cap (L + \overline{B_r(0)})$ – тоже компакт. Значит, и множества

$$H_r = \operatorname{conv} \Big(F \cap (L + \overline{B_r(0)}) \Big) \tag{A.5}$$

компактны. С другой стороны, $H_r \subseteq \operatorname{conv} F$, что влечёт $x \notin H_r$.

---

[1]Здесь и далее $B_r(0)$ – открытый шар радиуса r с центром в 0, черта сверху обозначает замыкание.

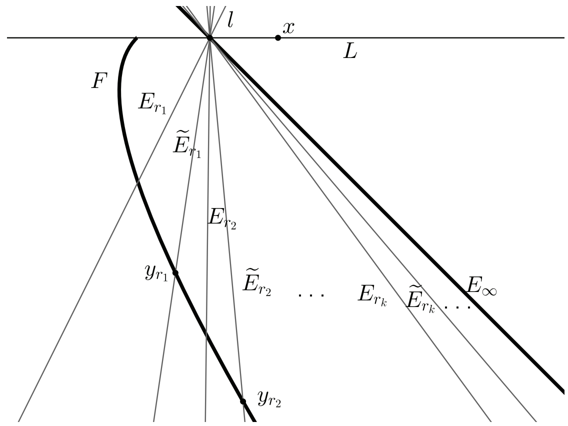

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству леммы 2.1.

Множество H_0 непусто, так как $F \cap L \neq \varnothing$ (если $F \cap L = \varnothing$, то $F \cap (L + \overline{B_r(0)}) = 0$ для некоторого числа $r > 0$, что противоречит предположению $x \in \overline{\operatorname{conv} F}$). Пусть ℓ – гиперплоскость аффинного пространства L, строго отделяющая точку x от множества H_0. Пусть E_r – содержащая пространство ℓ гиперплоскость пространства $\mathbb{R}^d$, строго отделяющая точку x от множества H_r. Такая гиперплоскость существует, так как $x \notin H_r$ и множество H_r компактно. Ввиду включения $x \in \operatorname{cl} \operatorname{conv} F$, гиперплоскость E_r не отделяет точку x от множества F. Следовательно, найдётся такая точка $y_r \in F$, что точки x и y_r лежат в одном и том же полупространстве E_r^+ относительно E_r. Так как $y_r \in F \setminus H_r$, $|y_r| \to \infty$ при $r \to \infty$. Пусть $\{r_k\}_k$ – такая стремящаяся к бесконечности последовательность, что существует предел $e = \lim_k y_{r_k}/|y_{r_k}|$. Тогда

$$\{x + \alpha e \mid \alpha \in [0, +\infty)\} \subset \operatorname{cl} \operatorname{conv} F. \tag{A.6}$$

Достаточно проверить справедливость вложения

$$\{x + \alpha e \mid \alpha \in [0, +\infty)\} \subset L, \tag{A.7}$$

чтобы получить противоречие и завершить доказательство.

Пусть вложение (A.7) не имеет места. В таком случае, гиперплоскость

$$E_\infty = \{\alpha e \mid \alpha \in \mathbb{R}\} + \ell \tag{A.8}$$

не равна L и $x \notin E_\infty$. Пусть гиперплоскость L разбивает пространство $\mathbb{R}^d$ на два полупространства L^+ и L^-, L^- – то из них, которое содержит множество F. В таком случае, $H_r \subset E_r^- \cap L^-$. Обозначим символом $\widetilde{E}_{r_k}$ гиперплоскость, являющуюся аффинной оболочкой гиперплоскости ℓ и точки y_{r_k}; символом $\widetilde{E}_{r_k}^+$ – полупространство относительно этой гиперплоскости, содержащее точку x. В таком случае, $H_r \subset E_{r_k}^- \cap L^- \subset \widetilde{E}_{r_k}^- \cap L^-$. Однако E_∞ – предел плоскостей $\widetilde{E}_{r_k}$. Таким образом, имеем вложения $F \subset E_\infty^-$ и $x \in E_\infty^+$. Следовательно, плоскость E_∞ строго разделяет точку x и множество F. А это противоречит тому факту, что $x \in \operatorname{cl}\operatorname{conv} F$. $\square$

Предложение А.3. *Пусть Ω_I – выпуклое множество с непустой внутренностью. Пусть функция $f\colon \partial\Omega_\mathrm{O} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Если функция $\mathfrak{B}_{\Omega_\mathrm{O}\setminus \operatorname{int}\Omega_\mathrm{I}}$ конечна, то она полунепрерывна снизу.*

Мы не будем приводить полное формальное доказательство предложения А.3. Отметим, что локально вогнутая функция непрерывна во внутренних точках. Более того, если функция f непрерывна, то функция $\mathfrak{B}_{\Omega_\mathrm{O}\setminus \operatorname{int}\Omega_\mathrm{I}}$ тоже непрерывна в точках множества $\partial\Omega_\mathrm{O}$ согласно предложению 2.7 работы [19]. Таким образом, остаётся доказать полунепрерывность снизу в точках множества $\partial\Omega_\mathrm{I}$. В случае, если множество Ω_I строго выпукло, указанная непрерывность была доказана в работе [19] (см. предложение 2.8 той статьи). По сути, полунепрерывность снизу и сверху доказывались по отдельности, и доказательство полунепрерывности снизу не использовало предположение о строгой выпуклости множества Ω_I, а лишь о выпуклости. Стало быть, доказательство предложения А.3 содержится в работе [19].

Отметим, что доказательство предложения 2.8 работы [19] не использует предположение о минимальности: всякая конечная локально вогнутая функция непрерывна в точках множества $\partial\Omega_\mathrm{I}$, коль скоро это множество строго выпукло. Утверждение становится неверным, если множество Ω_I выпукло, но не является строго выпуклым. Мы не знаем, обязательно ли функция $\mathfrak{B}_{\Omega_\mathrm{O}\setminus \operatorname{int}\Omega_\mathrm{I}}$ непрерывна в этом случае.

Предложение А.4. *Предположим, что множество Ω_I замкнуто, выпукло, имеет непустую внутренность, а его граница не содержит лучей. Тогда,*

$$\mathfrak{B}_{\Omega_\mathrm{O}\setminus\Omega_\mathrm{I}}(x) = \mathfrak{B}_{\Omega_\mathrm{O}\setminus \operatorname{int}\Omega_\mathrm{I}}(x) \tag{A.9}$$

для всех точек $x \in \Omega_\mathrm{O} \setminus \Omega_\mathrm{I}$.

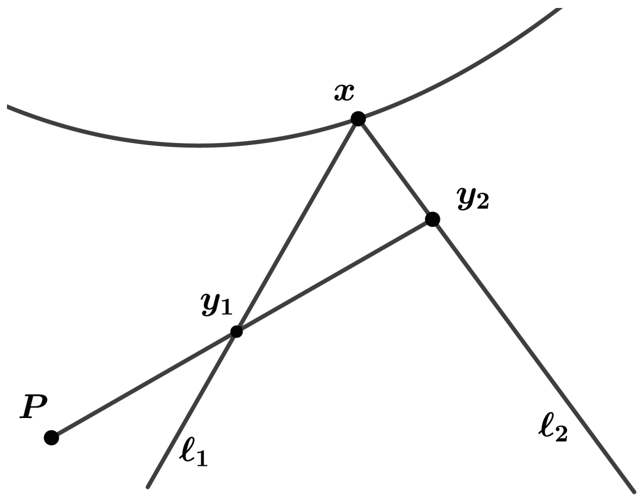

Рис. 4. Иллюстрация доказательства предложения A.4.

Доказательство. Данное доказательство – пересказ доказательства предложения 5.4 в работе [29]. Пусть x – точка на границе множества Ω_{I}. Напомним, что отрезок $\ell \subset \Omega$ с концом x называется трансверсальным, если продолжение отрезка ℓ за точку x лежит внутри множества Ω_{I}. Пусть G – конечная локально вогнутая функция на множестве $\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$, пусть ℓ_1 и ℓ_2 – два трансверсальных отрезка с концами в точке x. Докажем следующее **утверждение**:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \ell_1}} G(y) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \ell_2}} G(y). \tag{A.10}$$

Отметим, что оба предела существуют как пределы вогнутых функций одной переменной. Вопрос об их конечности пока открыт, но мы вскоре на него ответим.

Для доказательства утверждения достаточно проверить неравенство

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \ell_1}} G(y) \geqslant \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \ell_2}} G(y). \tag{A.11}$$

Рассмотрим двумерную аффинную плоскость, натянутую на отрезки ℓ_1 и ℓ_2, и выберем точку P в этой плоскости так, как показано на рис. 4. В таком случае,

$$G(y_1) \geqslant \alpha G(y_2) + (1-\alpha)G(P), \tag{A.12}$$

для всяких точек y_1 и y_2, таких как на рис. 4. Коэффициент α стремится к единице при стремлении $y_1 \to x$ вдоль ℓ_1, что и подтверждает неравенство (A.11) и завершает доказательство **утверждения**.

Теперь отметим, что если граница множества Ω_{I} не содержит лучей, то для всякой точки $x \in \partial\Omega_{\mathrm{I}}$ найдутся такие точки $y, z \in \operatorname{int}\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \Omega_{\mathrm{I}}$, что $x \in [y,z]$ и $[y,z] \cap \operatorname{int}\Omega_{\mathrm{I}} = \varnothing$. Докажем, что предел в равенстве (A.10) конечен. Предположим, что трансверсальный отрезок ℓ_1 достаточно короткий и рассмотрим отрезки ℓ_y и ℓ_z – образы этого отрезка при сдвигах, переводящих точку x в точки y и z, соответственно. В таком случае, для всякой точки $x_1 \in \ell_1$ справедлива оценка

$$G(x_1) \geqslant \frac{|y-x|}{|y-z|}G(z_1) + \frac{|z-x|}{|y-z|}G(y_1), \tag{A.13}$$

для некоторых точек $y_1 \in \ell_y$ и $z_1 \in \ell_z$. Это доказывает неравенство

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ x_1 \in \ell_1}} G(x_1) \geqslant \frac{|y-x|}{|y-z|}G(z) + \frac{|z-x|}{|y-z|}G(y). \tag{A.14}$$

В частности, предел в его левой части конечен.

Пришло время доказать равенство (A.9). Отметим, что

$$\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{O}}\setminus\Omega_{\mathrm{I}}}(x) \geqslant \mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{O}}\setminus\operatorname{int}\Omega_{\mathrm{I}}}(x), \quad x \in \Omega_{\mathrm{O}} \setminus \Omega_{\mathrm{I}}. \tag{A.15}$$

Для доказательства обратного неравенства, продолжим функцию $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{O}}\setminus\Omega_{\mathrm{I}}}$ на множество $\partial\Omega_{\mathrm{I}}$ при помощи формулы (A.10) (подставим нашу функцию вместо G). Достаточно доказать локальную вогнутость продолжения, которое мы обозначим символом H. Требуется проверить неравнство

$$H(x) \geqslant \frac{|y-x|}{|y-z|}H(z) + \frac{|z-x|}{|y-z|}H(y), \qquad x \in [y,z] \subset \Omega. \tag{A.16}$$

Случай произвольных точек x, y, z следует из случаев, когда либо $[y,z] \subset \Omega \setminus \partial\Omega_{\mathrm{I}}$, либо $x \in \partial\Omega_{\mathrm{I}}$, так как вогнутость – локальное понятие. В первом случае неравенство справедливо, так как функция $H|_{\Omega_{\mathrm{O}}\setminus\partial\Omega_{\mathrm{I}}}$ равна $\mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{O}}\setminus\Omega_{\mathrm{I}}}$. Во втором случае, искомое неравенство подобно неравенству (A.14). Следовательно, функция H локально вогнута на всей области $\Omega_{\mathrm{O}} \setminus \operatorname{int}\Omega_{\mathrm{I}}$, $H \geqslant \mathfrak{B}_{\Omega_{\mathrm{O}}\setminus\operatorname{int}\Omega_{\mathrm{I}}}$, и поэтому соотношение (A.9) верно. $\square$

Список литературы

1. D Azagra, D. Stolyarov, *Inner and outer smooth approximation of convex hypersurfaces. When is it possible?.* — Nonlinear Anal. **230** (2023), Paper No. 113225, 20.
2. J. Canto, C. Pérez, E. Rela, *Minimal conditions for BMO.* — J. Funct. Anal. **282**, No. 2 (2022), Paper No. 109296, 21.
3. M. Cwikel, Y. Sagher, P. Shvartsman, *A new look at the John–Nirenberg and John-Strömberg theorems for BMO.* — J. Funct. Anal. **263**, No. 1 (2012), 129–166.
4. M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in R^n*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 481, Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).
5. E. Dobronravov, *A sharp symmetric integral form of the John–Nirenberg inequality.* — Proc. Amer. Math. Soc. **152**, No. 5 (2024), 2087-2101.
6. P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskii, *Bellman functions on simple non-convex domains in the plane*, `https://arxiv.org/abs/2305.03523`.
7. P. Ivanisvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Sharp estimates of integral functionals on classes of functions with small mean oscillation.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **353**, No. 12 (2015), 1081–1085.
8. P. Ivanisvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO.* — Trans. Amer. Math. Soc., **368**, No. 5 (2016), 3415–3468.
9. P. Ivanisvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO II: Evolution.* — Mem. Amer. Math. Soc. **255**, No. 1220 (2018), v+133.
10. F. John, *Quasi-isometric mappings*, Seminari 1962/63 Anal. Alg. Geom. e Topol., Vol. 2, Ist. Naz. Alta Mat (1965), pp. 462–473.
11. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation.* — Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.
12. A. K. Lerner, *The John–Nirenberg inequality with sharp constants.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351**, Nos. 11–12 (2013), 463–466.
13. A. A. Logunov, L. Slavin, D. M. Stolyarov, V. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Weak integral conditions for BMO.* — Proc. Amer. Math. Soc. **143**, No. 7 (2015), 2913–2926.
14. Long, Rui Lin and Yang, Lo, *BMO functions in spaces of homogeneous type.* — Sci. Sinica Ser. A **27**, No. 7 (1984), 695–708.
15. T. R. Rockafellar, Convex analysis, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, NJ (1970).
16. Shi, Xian Liang, A. Torchinsky, *Local sharp maximal functions in spaces of homogeneous type.* — Sci. Sinica Ser. A **30**, No. 5 (1987), 473–480.
17. L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp results in the integral-form John–Nirenberg inequality.* — Trans. Amer. Math. Soc. **363**, No. 8 (2011), 4135–4169.
18. L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp L^p estimates on BMO.* — Indiana Univ. Math. J. **61**, No. 3 (2012), 1051–1110.
19. D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals.* — Adv. Math. **291** (2016), 228–273.

20. D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *Sharp multiplicative inequalities with BMO I.* — J. Math. Anal. Appl. **492**, No. 2 (2020), 124479, 17.
21. D. Stolyarov, P. Zatitskiy, *Sharp transference principle for BMO and A_p.* — J. Funct. Anal. **281**, No. 6 (2021), Paper No. 109085, 21.
22. D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Monotonic rearrangements of functions with small mean oscillation.* — Studia Math. **231**, No. 3 (2015), 257–267.
23. J.-O. Strömberg, *Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces.* — Indiana Univ. Math. J. **28**, No. 3 (1979), 511–544.
24. V. Vasyunin, A. Volberg, *Sharp constants in the classical weak form of the John–Nirenberg inequality.* — Proc. Lond. Math. Soc. (3) **108**, No. 6 (2014), 1417–1434.
25. V. Vasyunin, P. Zatitskiy, I. Zlotnikov, *Sharp multiplicative inequalities with BMO II.* — J. Math. Anal. Appl. **515**, No. 2 (2022), Paper No. 126430, 58.
26. В. И. Васюнин, Точная константа в обратном неравенстве Гёльдера для макенхауптовских весов. — Алгебра и анализ **15**, No. 1 (2003), 73–117.
27. А. А. Кореновский, *О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций.* — Матем. Сб. **181**, No. 12 (1990), 1721–1727.
28. В. Васюнин, Л. Славин, *Константа Джона–Ниренберга для пространства* BMO^p, $p > 2$. — Алгебра и анализ **28**, No. 2 (2016), 72–96.
29. П. Б. Затицкий, Д. М. Столяров, *О локально вогнутых функциях на простейших невыпуклых областях.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **512** (2022), 40–87.

Dobronravov E. P., Zatitskii P. B., Stolyarov D. M. New Bellman induction and a weak version of BMO.

We enlarge the area of applicability of the Bellman function method to estimates in the spirit of the John–Nirenberg inequality abandoning certain convexity assumptions. As an application, we consider a characteristic of a function that is much smaller than the BMO norm, but whose finiteness leads to the exponential integrability of the function.

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Поступило 2 апреля 2024 г.
E-mail: yegordobronravov@mail.ru
E-mail: d.m.stolyarov@spbu.ru

Университет Цинциннати
E-mail: zatitspl@ucmail.uc.edu