Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 537, 2024 г.

О. Л. Виноградов

КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ УСРЕДНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ НА ПЕРИОДЕ

§1. Введение

Для локально суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функции f обозначим через $S_h f$ ее функцию Стеклова первого порядка с шагом $h > 0$, т.е. положим

$$S_h f(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{[-h/2,h/2]^n} f(x-t)\,dt.$$

Если нормированное пространство X, состоящее из заданных на $\mathbb{R}^n$ функций, вместе с каждой функцией содержит ее средние Стеклова и $\sup\limits_{h>0} \|S_h\| < +\infty$, то X называется пространством с ограниченным усреднением. Свойство ограниченности усреднений было введено (в одномерном случае) в работе [1]. Там же были установлены прямые и обратные теоремы теории приближений тригонометрическими многочленами и целыми функциями конечной степени в банаховых идеальных пространствах с ограниченным усреднением. Эти теоремы во многом аналогичны таковым в обычных пространствах L_p на оси и на периоде. Подчеркнем, что ограниченности максимального оператора в этих вопросах не требуется. Особая роль средних Стеклова заключается в том, что их ограниченность влечет ограниченность сверток с любыми ядрами, имеющими суммируемую горбатую мажоранту.

Естественно возникает вопрос о критериях ограниченности усреднений в конкретных пространствах, не инвариантных относительно сдвига. Единственный известный критерий относится к весовым пространствам Лебега: ограниченность усреднений имеет место в том и только том случае, когда вес удовлетворяет условию Макенхаупта [2, §5.2.1]. В других случаях известные достаточные условия не совпадают с необходимыми. В настоящей работе дается такой критерий в

Ключевые слова: пространства с переменным показателем, средние Стеклова.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No.23-11-00178), `https://rscf.ru/project/23-11-00178/`.

пространствах Лебега $L_{p(\,\cdot\,)}$ с переменным показателем, состоящих из периодических функций.

§2. Пространства Лебега с переменным показателем

Теория пространств Лебега с переменным показателем изложена в монографиях [3–5].

В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, целых, натуральных чисел соответственно; $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Символом $|E|$ обозначается лебегова мера множества E, χ_A – характеристическая функция множества A, $0 \cdot \infty = 0$,

$$\varphi_p(t) = \begin{cases} \frac{|t|^p}{p}, & p \in [1, +\infty), \\ (+\infty)\chi_{(1,+\infty)}(|t|), & p = +\infty. \end{cases}$$

Для единообразия записи примем соглашение

$$t^p = \frac{t^p}{p} = (+\infty)\chi_{(1,+\infty)}(t), \quad p = +\infty, \ t \geqslant 0.$$

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $p\colon E \to [1, +\infty]$ – измеримая по Лебегу функция, которую мы будем называть показателем. Чтобы подчеркнуть отличие от постоянного показателя p, мы иногда будем обозначать ее символом $p(\,\cdot\,)$. Полагаем $p_- = \operatorname{ess\,inf} p$, $p_+ = \operatorname{ess\,sup} p$. Буквой q обозначается сопряженный с p показатель, т.е. $q = \frac{p}{p-1}$, с обычным соглашением $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Полагаем

$$\varphi_{p(\,\cdot\,)}(x, t) = \varphi_{p(x)}(t) = \frac{|t|^{p(x)}}{p(x)}.$$

Пространство $L_{p(\,\cdot\,)}(E)$ состоит из всех функций f, измеримых на E и таких, что при некотором $\alpha > 0$

$$\int\limits_E \left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} < +\infty.$$

Эквивалентные функции отождествляются. В случае $E = \mathbb{T}^n$ функции и показатель $p(\,\cdot\,)$ считаются 2π-периодическими по каждой переменной. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

В пространстве $L_{p(\,\cdot\,)}(E)$ определяются две нормы

$$\|f\|_{p(\,\cdot\,)} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \leqslant 1\right\}, \tag{2.1}$$

$$\|f\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right)^{p(x)} dx \leqslant 1\right\}. \tag{2.2}$$

Эти нормы эквивалентны, а именно,

$$b_{\mathcal{N}}(p)\|f\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)} \leqslant \|f\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant B_{\mathcal{N}}(p)\|f\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)}, \tag{2.3}$$

где $b_{\mathcal{N}}(p) \geqslant \frac{1}{2}$, $B_{\mathcal{N}}(p) \leqslant 1$; см. [3, неравенство (3.2.2)]. Нам будет удобнее пользоваться нормой (2.1) как основной. Это упростит выкладки, связанные с сопряжением, поскольку функции φ_p и φ_q взаимно сопряжены по Юнгу (см. §5.1). Операторные нормы в пространствах $L_{p(\,\cdot\,)}$, соответствующие нормам (2.1) и (2.2), тоже будут обозначаться символами $\|\cdot\|_{p(\,\cdot\,)}$ и $\|\cdot\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)}$, что не приведет к недоразумению.

Обозначим через $C_H = C_H(p)$ точную константу в неравенстве Гёльдера

$$\left|\int\limits_E fg\right| \leqslant C_H\|f\|_{p(\,\cdot\,)}\|g\|_{q(\,\cdot\,)}. \tag{2.4}$$

Известно, что $1 \leqslant C_H \leqslant 2$. Оценку сверху см. в [3, леммы 2.6.5 и 3.2.20] и [6, лемма 3.2.11], оценку снизу – в [3, теорема 2.7.4] и [6, теорема 3.4.6]. В [5, теоремы 2.26 и 2.34] константы отличаются, поскольку используются другие, тоже эквивалентные, нормы. Точные константы для этих норм имеются в [7].

§3. Усредняющие операторы в банаховых идеальных пространствах

Под кубом мы всегда будем понимать куб с ребрами, параллельными координатным осям, $h(Q)$ – ребро куба Q. Дизъюнктность понимается с точностью до множеств нулевой меры. Через $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество функций, суммируемых на любом компакте в $\mathbb{R}^n$.

Пусть задан дизъюнктный набор кубов $\mathcal{Q}$. Определим еще один усредняющий оператор $T_{\mathcal{Q}}$ равенством

$$T_{\mathcal{Q}}f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \chi_Q(x) M_Q f, \quad f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Если семейство $\mathcal{Q}$ состоит из одного куба Q, то будем обозначать оператор символом T_Q. Здесь и далее

$$M_Q f = ⨍_Q f = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$$

есть среднее значение функции f на кубе Q.

Пусть X – нормированное пространство, $X \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $h > 0$. Обозначим

$$A(h) = \sup\{\|T_{\mathcal{Q}}\| : \mathcal{Q} \text{ – дизъюнктное семейство кубов с ребром } h\}.$$

Здесь и далее, если оператор T переводит некоторую функцию $f \in X$ в функцию $Tf \notin X$, то полагаем $\|T\| = +\infty$.

Если пространство X состоит из периодических функций, причем $X \subset L_1(\mathbb{T}^n)$, то верхняя грань в определении величины $A(h)$ берется лишь по периодическим наборам $\mathcal{Q}$, т.е. таким, что $\{Q + 2\pi e^j\} = \{Q\}$ при любом $j = 1, \ldots, n$, где e^j – орты. В частности, $h(Q) \leqslant 2\pi$ для любого $Q \in \mathcal{Q}$. В этом случае оператор $T_{\mathcal{Q}}$ переводит периодические функции в периодические.

Если пространство X состоит из функций, заданных на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то функции считаются продолженными нулем вне E. Под принадлежностью функции, заданной на $\mathbb{R}^n$, пространству X понимается принадлежность сужения.

Норма $\|\cdot\|$ на пространстве функций X называется *монотонной,* если из $f, g \in X$, $|f| \leqslant |g|$ следует $\|f\| \leqslant \|g\|$. Пусть (E, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой, $L_0 = L_0(E, \mu)$ – множество измеримых функций на E. Эквивалентные функции отождествляются. *Идеальным пространством* на (E, Σ, μ) называется линейное множество $X \subset L_0$, такое что из $f \in L_0$, $g \in X$, $|f| \leqslant |g|$ следует $f \in X$. *Нормированным идеальным пространством* называется ненулевое идеальное пространство, снабженное монотонной нормой. Оно обозначается через $X(E)$.

Нам понадобится это определение только, когда $E \subset \mathbb{R}^n$, а μ – мера Лебега. В случае $E = \mathbb{T}^n$ функции считаются периодическими.

Лемма 1. *Пусть X есть нормированное идеальное пространство $X(\mathbb{R}^n)$, $X(\mathbb{T}^n)$ или $X(E)$ ($E \subset \mathbb{R}^n$). Если $X = X(\mathbb{R}^n)$ или $X = X(E)$, то*

$$2^{-n} \sup_{h>0} A(h) \leqslant \sup_{h>0} \|S_h\| \leqslant 4^n \sup_{h>0} A(h).$$

Если $X = X(\mathbb{T}^n)$, то верны те же неравенства с заменой константы 4^n в правой части на 8^n.

Доказательство. Ясно, что при оценке норм усредняющих операторов можно рассматривать лишь неотрицательные функции f.

1.1. Оценка сверху, случаи пространств $X(\mathbb{R}^n)$ и $X(E)$.

Если $h > 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $x \in Q_k = [hk - \frac{h\mathbf{1}}{2}, hk + \frac{h\mathbf{1}}{2}]$, то

$$Q_x(h) = \left[x - \frac{h\mathbf{1}}{2}, x + \frac{h\mathbf{1}}{2}\right] \subset [hk - h\mathbf{1}, hk + h\mathbf{1}] = 2Q_k.$$

Поэтому

$$S_h f(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{Q_x(h)} f \leqslant \frac{1}{h^n} \int\limits_{2Q_k} f, \quad x \in Q_k.$$

Семейство $\{2Q_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ разбивается на 2^n дизъюнктных подсемейств $\mathcal{Q}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0,1\}^n$. Семейство $\mathcal{Q}_\varepsilon$ состоит из всех тех кубов $2Q_k$, что k_i имеет четность ε_i при каждом $i = 1, \dots, n$. По доказанному

$$S_h f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (S_h f)\chi_{Q_k} \leqslant 2^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{(2h)^n} \int\limits_{2Q_k} f \right) \chi_{2Q_k}$$

$$= 2^n \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n : 2Q_k \in \mathcal{Q}_\varepsilon} \left(\frac{1}{(2h)^n} \int\limits_{2Q_k} f \right) \chi_{2Q_k} = 2^n \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^n} T_{\mathcal{Q}_\varepsilon} f,$$

откуда $\|S_h\| \leqslant 4^n A(2h)$. Остается перейти к верхней грани по h.

1.2. Оценка сверху, случай пространства $X(\mathbb{T}^n)$. Если $h = \frac{\pi}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, то семейства $\mathcal{Q}_\varepsilon$ 2π-периодичны, поэтому предыдущее рассуждение сохраняет силу и $\|S_h\| \leqslant 4^n A(2h)$.

Пусть $0 < h \leqslant \pi$. Положим $N = \lfloor \pi/h \rfloor$, тогда $\frac{\pi}{N+1} < h \leqslant \frac{\pi}{N}$ и

$$S_h f \leqslant \left(\frac{\pi}{Nh}\right)^n S_{\frac{\pi}{N}} f \leqslant 2^n S_{\frac{\pi}{N}} f.$$

По доказанному $\|S_h\| \leqslant 8^n A(2\pi/N)$.

Если $\pi < h \leqslant 2\pi$, то

$$S_h f \leqslant \left(\frac{2\pi}{h}\right)^n S_{2\pi} f \leqslant 2^n S_{2\pi} f.$$

Если же $2m\pi < h \leqslant 2(m+1)\pi$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$S_h f \leqslant \left(\frac{2(m+1)\pi}{h}\right)^n S_{2(m+1)\pi} f \leqslant 2^n S_{2\pi} f.$$

Функция $S_{2\pi} f$ постоянна: это среднее значение функции f на периоде. Поэтому в обоих случаях $\|S_h\| \leqslant 2^n A(2\pi)$. Остается перейти к верхней грани по h.

2. Оценка снизу. Пусть задано дизъюнктное семейство $\mathcal{Q} = \{Q\}$ кубов с ребром h (не обязательно покрывающее $\mathbb{R}^n$). Если $x \in Q$, то $Q \subset [x - h\mathbf{1}, x + h\mathbf{1}] = Q_x(2h)$. Поэтому при почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{Q}} f(x) &= \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{h^n} \int\limits_Q f\right) \chi_Q(x) \\ &\leqslant 2^n \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{(2h)^n} \int\limits_{Q_x(2h)} f\right) \chi_Q(x) \leqslant 2^n S_{2h} f(x), \end{aligned}$$

откуда $A(h) \leqslant 2^n \|S_{2h}\|$. Остается перейти к верхней грани по h. $\square$

Дадим серию определений по аналогии с [5, определение 4.45 и 4.61] и [3, определение 4.4.6].

Пусть пространство X состоит из функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, периодических функций или функций, заданных на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что пространство X принадлежит классу $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ или $\mathcal{A}(E)$, если все операторы $T_{\mathcal{Q}}$ действуют из X в X и $\sup\limits_{\mathcal{Q}} \|T_{\mathcal{Q}}\| < +\infty$. Определение классов $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(E)$ отличается тем, что рассматриваются лишь наборы кубов с равными ребрами. Определение классов $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(E)$ отличается тем, что рассматриваются лишь семейства из одного куба Q. Определение класса $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}^n)$ отличается тем, что рассматриваются лишь семейства, состоящие из всевозможных сдвигов одного куба Q на $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}^n$, причем $h(Q) \leqslant 2\pi$.

В контексте пространств $L_{p(\,\cdot\,)}$ мы также будем говорить, что показатель $p(\,\cdot\,)$ принадлежит классу $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}$ или $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ (если множество E не указано, имеется в виду любой из трех вариантов).

Дадим несколько комментариев к этим определениям и лемме 1.

1. Из определений ясно, что во всех трех случаях $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{eq}} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$. Однако $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$; см. [3, теорема 5.3.4] и [5, пример 4.51].

2. Класс $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ введен Динингом [8] в ситуации пространств Орлича–Муселяка. Дининг доказал, что если максимальный оператор ограничен, то пространство принадлежит классу $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, а в пространствах $L_{p(\,\cdot\,)}(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p_- \leqslant p_+ < +\infty$ верно и обратное. Эти результаты вошли в книгу [3, глава 5].

Лемма 1 дает похожий критерий ограниченности средних Стеклова, но ее доказательство, в отличие от теоремы Дининга, элементарно. Есть и еще одна, более тонкая, разница: константы в теореме Дининга зависят от $p(\,\cdot\,)$ (и эта зависимость неустранима, поскольку максимальный оператор неограничен в L_1, а средние имеют единичные нормы), а в лемме 1 константы абсолютные.

3. Класс $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ (иначе говоря, условие $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$) обозначается в литературе по-разному; мы пользуемся обозначением из [3]. В [5] это условие обозначалось через K_0, а в [9] оно формулировалось в виде: $dx \in A_{p(\,\cdot\,)}$, что подчеркивает аналогию с условием Макенхаупта. Более подробные исторические комментарии см. в [5, §4.6.1].

4. Как следует из доказательства леммы 1, в ее условиях классы $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(E)$ не изменятся, если в их определении ограничиться покрытиями пространства $\mathbb{R}^n$.

5. В определении функции Стеклова можно усреднять не по кубам, а по шарам. Ясно, что нормы шаровых и кубических средних Стеклова оцениваются друг через друга с коэффициентом, зависящим только от размерности пространства, а потому ограниченность этих средних равносильна.

6. Включение $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ равносильно условию

$$C_A = C_A(p) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \|\chi_Q\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)} \|\chi_Q\|^{\circ}_{q(\,\cdot\,)} < +\infty \tag{3.1}$$

(аналогичная величина для нормы (2.1) нам не понадобится). Константы C_A и $\widetilde{C}_A = \sup\limits_Q \|T_Q\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)}$ (так называемая $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$-константа показателя p) связаны неравенствами

$$C_A \leqslant \widetilde{C}_A \leqslant C_H^\circ C_A,$$

см. [3, теорема 4.5.7 и замечание 4.5.8] и [5, предложение 4.47]. Здесь C_H° – константа в неравенстве Гёльдера для нормы (2.2).

§4. Основные результаты

Напомним, что константы $B_{\mathcal{N}}$, C_H и C_A определены формулами (2.3), (2.4) и (3.1).

Теорема 1. *Следующие свойства пространства $L_{p(\,\cdot\,)}(\mathbb{T}^n)$ равносильны.*

1. $p \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$.
2. $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(\mathbb{T}^n)$.
3. $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}^n)$.
4. $\sup\limits_{h>0} \|S_h\|_{p(\,\cdot\,)} < +\infty$.

Более того, если $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}^n)$, то для любого периодического дизъюнктного семейства кубов $\mathcal{Q}$

$$\|T_{\mathcal{Q}}\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant \max\{1 + C_A, C_A C_H B_{\mathcal{N}}(q)\} + \|1\|_{p(\,\cdot\,)}. \tag{4.1}$$

Если $E \subset \mathbb{R}^n$, $|E| < +\infty$ и $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то $p \in \mathcal{A}(E)$ и оценка (4.1) верна для нормы в $L_{p(\,\cdot\,)}(E)$ без требования периодичности семейства $\mathcal{Q}$.

Говорят, что функция $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини–Липшица (другое название – логарифмическое условие Гёльдера) локально, если существует число $c_0 > 0$, такое что

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant \frac{c_0}{\ln\left(e + 1/|x-y|\right)}, \quad x, y \in E,$$

и на бесконечности, если существуют числа $c_\infty > 0$ и $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$, такие что

$$|\alpha(x) - \alpha_\infty| \leqslant \frac{c_\infty}{\ln\left(e + |x|\right)}, \quad x \in E.$$

Эти свойства еще называют логарифмической непрерывностью и логарифмической стабилизацией. Обозначим через $\mathcal{P}_0^{\log}(E)$, $\mathcal{P}_\infty^{\log}(E)$ и $\mathcal{P}^{\log}(E)$ множества показателей $p\colon E \to [1, +\infty]$, таких что $1/p$ удовлетворяет условию Дини–Липшица локально, на бесконечности и глобально, т.е. обоим условиям. Ясно, что если множество E ограничено, то $\mathcal{P}^{\log}(E) = \mathcal{P}_0^{\log}(E)$.

Шарапудинов [10] установил ограниченность средних Стеклова и некоторых других операторов свертки в $L_{p(\,\cdot\,)}(\mathbb{T})$ при условии Дини–Липшица и $p_+ < +\infty$; этот результат вошел в книгу [4, §2.4]. На многомерный случай его перенес Шах-Эмиров [11].

Лернер [12, теорема 1.2] доказал, что если $1 < p_- \leqslant p_+ < +\infty$, $|E| < +\infty$ и $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то максимальный оператор ограничен в $L_{p(\,\cdot\,)}(E)$. В [5, следствие 4.53] приведено доказательство этого результата для ограниченного множества E.

Условие $p \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ достаточно для ограниченности средних Стеклова в $L_{p(\,\cdot\,)}(\mathbb{R}^n)$; см. [3, лемма 4.6.1]. Этот результат обобщен на пространства Орлича–Муселяка в [6, лемма 4.4.4]; см. комментарий перед леммой. Он сразу следует из леммы 1 и включения $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}_{\mathrm{eq}}(\mathbb{R}^n)$. Верно строгое включение $\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$; см. [3, теорема 4.4.8]. Впервые ограниченность средних Стеклова в $L_{p(\,\cdot\,)}(E)$ (без ограничений на меру E) при условии $p \in \mathcal{P}^{\log}(E)$ была доказана в [13, теорема 2.3 и следствие 6.1] другим способом, при дополнительном требовании $p_+ < +\infty$.

Теорема 1 дает критерий ограниченности усреднений в пространстве $L_{p(\,\cdot\,)}(\mathbb{T}^n)$. В пространстве же $L_{p(\,\cdot\,)}(E)$ теорема 1 дает только достаточное условие, поскольку требуется принадлежность показателя p классу $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, а не $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(E)$. Неизвестно, можно ли продолжить функцию с E на $\mathbb{R}^n$ с сохранением свойства $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$. Так же обстоит дело в вопросе ограниченности максимального оператора; см. [12] и [5, следствие 4.53].

Главную роль в доказательстве теоремы 1 играет следующая лемма, интересная и сама по себе.

Лемма 2. *Пусть* $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$, $f \in L_{p(\,\cdot\,)}$ *(на* $\mathbb{R}^n$ *или* $\mathbb{T}^n$*),* $\|f\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant 1$, Q *– куб в* $\mathbb{R}^n$ $(h(Q) \leqslant 2\pi$ *в случае тора* $\mathbb{T}^n)$, $M_Q|f| \geqslant 1$. *Тогда неравенство*

$$\int\limits_Q \left(\frac{M_Q|f|}{C}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \leqslant \int\limits_Q |f(x)|^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \tag{4.2}$$

выполняется с константой $C = \max\{1 + C_A, C_A C_H B_{\mathcal{N}}(q)\}$.

Лемма 2 известна (без указания констант) при $1 < p_- \leqslant p_+ < +\infty$ в иной форме, с вынесением константы из-под модуляра. При $p_+ = +\infty$ вынести константу нельзя; см. далее следствие 2 и замечание 1. Впервые эта лемма была доказана Копалиани [9, лемма 2.4]. Впоследствии Лернер дал другое, более простое, доказательство, см. [12, лемма 3.1];

вариант этого доказательства имеется в [5, лемма 4.55]. По-видимому, оно не переносится напрямую на случаи $p_- = 1$ и $p_+ = +\infty$. А вот исходное доказательство Копалиани, основанное на применении выпуклого анализа, удается модифицировать и избавиться от ограничений на p.

§5. Доказательства и следствия

5.1. Сведения из выпуклого анализа. Приведем некоторые факты из выпуклого анализа лишь в общности, достаточной для дальнейшего применения. Эти сведения можно найти, например, в [14, 15].

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция, тождественно равная $+\infty$ или $-\infty$, называется тривиальной. Множество

$$\operatorname{dom}\varphi = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < +\infty\}$$

называется эффективным множеством функции φ. Функция

$$\varphi^*(\lambda) = \sup_{t\in\mathbb{R}}(\lambda t - \varphi(t)), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

называется сопряженной с функцией φ по Юнгу. Функция φ называется полунепрерывной снизу или замкнутой, если множество $\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \leqslant c\}$ замкнуто при любом $c \in \mathbb{R}$. Замкнутость выпуклой функции равносильна замкнутости ее надграфика.

Функция φ^* выпукла и полунепрерывна снизу. Для любой функции φ верно неравенство $\varphi^{**} \leqslant \varphi$. Если функция φ не принимает значения $-\infty$, то равенство $\varphi^{**} = \varphi$ равносильно тому, что функция φ выпукла и полунепрерывна снизу (теорема Фенхеля–Моро).

Субдифференциал $\partial\varphi(t)$ выпуклой функции φ в точке $t \in \mathbb{R}$ определяется одним из двух равносильных способов [14, §4.2.1]:

$$\partial\varphi(t) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda(y - t) \leqslant \varphi(y) - \varphi(t) \text{ для всех } y \in \mathbb{R}\},$$
$$\partial\varphi(t) = \{\lambda \in \mathbb{R} : t\lambda = \varphi(t) + \varphi^*(\lambda)\}.$$

Разумеется, если $\varphi^{**} = \varphi$, последнее уравнение задает и множество $\partial\varphi^*(\lambda)$.

Договоримся, что к функции двух переменных операция сопряжения применяется по второй, а операция усреднения по первой, т.е.

$$\varphi^*(x,\lambda) = (\varphi(x,\,\cdot\,))^*(\lambda), \qquad M_Q\varphi(t) = \fint_Q \varphi(x,t)\,dx.$$

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой, функция $\varphi\colon \Omega\times\mathbb{R}\to(-\infty,+\infty]$ обладает свойствами:

1) при любом $t\in\mathbb{R}$ функция $\varphi(\,\cdot\,,t)$ измерима,

2) при любом $x\in\Omega$ функция $\varphi(x,\,\cdot\,)$ выпукла, полунепрерывна снизу и множество $\operatorname{dom}\varphi(x,\,\cdot\,)$ имеет непустую внутренность.

Тогда функция φ есть нормальный выпуклый интегрант в смысле определения из работы [16]. В частности, для любой измеримой функции $f\colon \Omega\to\mathbb{R}$ функция $x\mapsto\varphi(x,f(x))$ измерима.

Инфимальной конволюцией или конволюционным интегралом семейства функций $\{\varphi(x,\,\cdot\,)\}_{x\in\Omega}$ называется функция

$$\left(\oint_\Omega \varphi\,d\mu\right)(t)=\inf\left\{\int_\Omega \varphi(x,g(x))\,d\mu(x) : g\in L_1(\Omega,\mu),\ \int_\Omega g\,d\mu=t\right\}.$$

Здесь, если интеграл не определен, ему приписывается значение $+\infty$.

Нам потребуется это определение только в случае, когда $\Omega=Q$ есть куб в $\mathbb{R}^n$, а μ – нормированная мера Лебега.

Известно [15, теорема 1.6 и лемма 1.5], что функция $\oint_\Omega\varphi\,d\mu$ выпукла и, если она нетривиальна, то

$$\begin{aligned}\left(\oint_\Omega \varphi\,d\mu\right)^*(\lambda)&=\int_\Omega \varphi^*(x,\lambda)\,d\mu(x),\\ \left(\oint_\Omega \varphi\,d\mu\right)^{**}(t)&=\left(\int_\Omega \varphi^*(x,\,\cdot\,)\,d\mu(x)\right)^*(t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Укажем случай, когда повторное сопряжение можно опустить.

Лемма 3. *Пусть в условиях определения функция $\varphi(x,\,\cdot\,)$ четна при почти всех $x\in\Omega$ и функция $\oint_\Omega\varphi\,d\mu$ нетривиальна. Тогда*

$$\oint_\Omega \varphi\,d\mu=\left(\int_\Omega \varphi^*(x,\,\cdot\,)\,d\mu(x)\right)^*.$$

Доказательство. По определению сопряженная к чётной функции чётная. Заметим, что если функции Φ и Φ^* взаимно сопряжены, чётны и нетривиальны (и, следовательно, не принимают значение $-\infty$), то хотя бы одна из них конечна всюду на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть, например, $\operatorname{dom}\Phi \subset [-R, R]$. Тогда

$$\Phi^*(\lambda) = \sup_{t\in\operatorname{dom}\Phi} (\lambda t - \Phi(t)) \leqslant R|\lambda| - \min\Phi < +\infty$$

при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Мы учли, что полунепрерывная снизу на отрезке функция принимает наименьшее значение.

Обозначим $S = \oint_\Omega \varphi\, d\mu$. Хотя бы одна из функций S^* и S^{**} конечна всюду на $\mathbb{R}$. Поскольку функция S выпукла, функция S^{**} есть ее замыкание, т.е. надграфик функции S^{**} получается замыканием надграфика функции S. Поэтому конечность функций S и S^{**} равносильна. Если конечна функция S, то, будучи выпуклой, она непрерывна и потому $S^{**} = S$. Если конечна функция S^*, то утверждение известно [17, п. 7]. $\square$

По определению субдифференциала равенство

$$t\lambda = \left(\oint_Q \varphi\right)(t) + M_Q\varphi^*(\lambda), \quad t, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

равносильно включению $t \in \partial M_Q\varphi^*(\lambda)$. Найдем субдифференциал функции

$$\psi(\lambda) = M_Q\varphi_{q(\,\cdot\,)}(\lambda) = \fint_Q \frac{\lambda^{q(x)}}{q(x)}\, dx.$$

Обозначим

$$\tau(\lambda) = \fint_Q \lambda^{q(x)-1} dx, \qquad \lambda_{\max} = \sup\operatorname{dom}\psi.$$

Ясно, что $\lambda_{\max} \in [1, +\infty]$. Если $\lambda \in (\lambda_{\max}, +\infty)$ или $\lambda = \lambda_{\max} \in \mathbb{R}$, $\psi(\lambda_{\max}) = +\infty$, то тривиально $\partial\psi(\lambda) = \varnothing$. Если $\lambda \in (0, \lambda_{\max})$, то функция ψ дифференцируема в точке λ, $\psi'(\lambda) = \tau(\lambda)$ и потому $\partial\psi(\lambda) = \{\tau(\lambda)\}$. Если $\lambda = \lambda_{\max} \in \mathbb{R}$ и $\psi(\lambda_{\max}) \in \mathbb{R}$, то $\psi'_-(\lambda_{\max}) = \tau(\lambda_{\max})$. Если при этом $\tau(\lambda_{\max}) < +\infty$, то $\partial\psi(\lambda_{\max}) = [\tau(\lambda_{\max}), +\infty)$, а если $\tau(\lambda_{\max}) = +\infty$, то $\partial\psi(\lambda_{\max}) = \varnothing$.

Таким образом, пара $(\tau(\lambda), \lambda)$ удовлетворяет равенству (5.2), если число $\tau(\lambda)$ конечно. Равенство $t = \tau(\lambda)$ равносильно соотношению

$$t\lambda = \fint_Q \lambda^{q(x)}\, dx. \tag{5.3}$$

При таких t и λ имеем

$$
\begin{aligned}
(M_Q\varphi^*)^*(t) &= t\lambda - M_Q\varphi^*(\lambda) \\
&= \fint_Q \lambda^{q(x)}\,dx - \fint_Q \frac{\lambda^{q(x)}}{q(x)}\,dx = \fint_Q \frac{\lambda^{q(x)}}{p(x)}\,dx. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

В дальнейшем важную роль будут играть точки

$$
\lambda_1 = \frac{1}{\|\chi_Q\|^\circ_{q(\,\cdot\,)}}, \quad t_1 = \frac{\|\chi_Q\|^\circ_{q(\,\cdot\,)}}{|Q|}, \quad \tau_1 = \tau(\lambda_1). \qquad (5.5)
$$

Покажем, что $t_1 \in \partial M_Q\varphi_{q(\,\cdot\,)}(\lambda_1)$.

По определению нормы

$$
\int_Q \left(\frac{1}{\|\chi_Q\|^\circ_{q(\,\cdot\,)}}\right)^{q(x)} dx \leqslant 1, \qquad (5.6)
$$

а при любом $a \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$
\int_Q \left(\frac{1}{a\|\chi_Q\|^\circ_{q(\,\cdot\,)}}\right)^{q(x)} dx > 1. \qquad (5.7)
$$

Возможны два случая.

Если неравенство (5.6) является равенством, то $t_1 = \tau_1$, пара (t_1, λ_1) есть решение уравнения (5.3), откуда $t_1 \in \partial M_Q\varphi_{q(\,\cdot\,)}(\lambda_1)$ и верно равенство (5.4).

Если неравенство (5.6) строгое, то при любом $a \in (0,1)$ получаем

$$
\int_Q \left(\frac{1}{a\|\chi_Q\|^\circ_{q(\,\cdot\,)}}\right)^{q(x)} dx = +\infty,
$$

откуда $\lambda_{\max} = \lambda_1$. В противном случае интеграл в (5.7) непрерывен по параметру a в точке 1, что влечет равенство в (5.6). Значит,

$$
t_1 = \frac{1}{\lambda_1|Q|} > \fint_Q \lambda_1^{q(x)-1}\,dx = \tau_1
$$

и, следовательно, $t_1 \in \partial M_Q\varphi_{q(\,\cdot\,)}(\lambda_1) = [\tau_1, +\infty)$.

5.2. Доказательство леммы 2. Всюду далее $\varphi = \varphi_{p(\,\cdot\,)}$, тогда $\varphi^* = \varphi_{q(\,\cdot\,)}$.

В доказательстве леммы 2 несколько раз будет применяться неравенство Чебышева; см., например, [18, теорема 236]. Функции F и G называют одинаково упорядоченными на Q, если для любых $u, v \in Q$ имеем

$$(F(u) - F(v))(G(u) - G(v)) \geqslant 0,$$

и противоположно упорядоченными, если верно противоположное неравенство. Например, если функции f и g одноименно (разноименно) монотонны на множестве значений функции $\gamma\colon Q \to \overline{\mathbb{R}}$, то функции $F = f \circ \gamma$ и $G = g \circ \gamma$ одинаково (противоположно) упорядочены. Если функции F и G одинаково упорядочены на Q и интегралы в формуле ниже существуют, то

$$\fint_Q FG \geqslant \left(\fint_Q F \right) \left(\fint_Q G \right),$$

а если F и G противоположно упорядочены, то верно противоположное неравенство.

Перейдем к доказательству леммы. Не умаляя общности, можно считать, что $f \geqslant 0$. Достаточно доказать, что

$$M_Q\varphi\left(\frac{M_Q f}{C}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(M_Q f).$$

Действительно, по равенству (5.1), свойствам сопряжения и по определению инфимальной конволюции

$$\begin{aligned}(M_Q\varphi^*)^*(M_Q f) &= \left(\oint_Q \varphi\right)^{**}(M_Q f) \leqslant \left(\oint_Q \varphi\right)(M_Q f) \\ &= \inf\left\{ \fint_Q \varphi(x, g(x))\,dx : \fint_Q g = \fint_Q f \right\} \leqslant \fint_Q \varphi(x, f(x))\,dx,\end{aligned}$$

откуда будет следовать формула (4.2). По лемме 3 первое неравенство является равенством, но этот факт не используется в доказательстве.

По условию леммы и по неравенству Гёльдера

$$1 \leqslant M_Q f = \fint_Q f\chi_Q \leqslant C_H \|f\chi_Q\|_{p(\cdot)} \frac{\|\chi_Q\|_{q(\cdot)}}{|Q|}$$
$$\leqslant C_H B_{\mathcal{N}}(q) \frac{\|\chi_Q\|^\circ_{q(\cdot)}}{|Q|} = Dt_1,$$

где $D = C_H B_{\mathcal{N}}(q)$, а $t_1 = \frac{\|\chi_Q\|^\circ_{q(\cdot)}}{|Q|}$, как в формуле (5.5). На последнем шаге мы применили второе из неравенств (2.3). Поэтому $Dt_1 \geqslant 1$ и достаточно доказать неравенство

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{C}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(t), \quad 1 \leqslant t \leqslant Dt_1. \tag{5.8}$$

Его доказательство мы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Проверим, что при $t = 1$, $C = 1$ неравенство (5.8) обращается в равенство

$$M_Q\varphi(1) = (M_Q\varphi^*)^*(1). \tag{5.9}$$

Ясно, что

$$M_Q\varphi(1) = \fint_Q \frac{1^{p(x)}}{p(x)}\,dx = \fint_Q \frac{dx}{p(x)}.$$

Мы воспользовались равенством $\frac{1^p}{p} = \frac{1}{p}$ (если $p < +\infty$, то оно очевидно, а если $p = +\infty$, то обе его части равны нулю по соглашению).

Чтобы вычислить величину $(M_Q\varphi^*)^*(1)$, покажем, что $1 \in \partial M_Q\varphi^*(1)$. Положим $t = \lambda = 1$. Напомним соглашение $1^{+\infty} = 0$. Если $p > 1$ почти везде на Q, то верно равенство (5.3), откуда и следует требуемое включение. Если же мера множества, где $p = 1$, положительна, то равенство (5.3) неверно: его левая часть равна 1, а правая $\frac{|Q(p>1)|}{|Q|}$. Однако в этом случае $\lambda_{\max} = 1$, $\tau(1) < 1$ и по-прежнему $1 \in \partial M_Q\varphi^*(1)$. Поэтому

$$\begin{aligned}(M_Q\varphi^*)^*(1) &= 1 - M_Q\varphi^*(1)\\ &= 1 - \fint_Q \frac{1^{q(x)}}{q(x)}\,dx = 1 - \fint_Q \frac{dx}{q(x)} = \fint_Q \frac{dx}{p(x)} = M_Q\varphi(1).\end{aligned}$$

Мы воспользовались равенством $\frac{1^q}{q} = \frac{1}{q}$.

Шаг 2. Напомним, что λ_1, t_1 и τ_1 определяются равенствами (5.5). Пусть $\tau_1 > 1$. Докажем неравенство

$$M_Q\varphi\left(\frac{\tau_1}{C_A}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(\tau_1).$$

Если $\tau_1 \leqslant C_A$, то оно очевидно в силу (5.9). Пусть $\tau_1 > C_A$. Сначала докажем, что

$$\int\limits_Q \left(\frac{\tau_1}{C_A}\right)^{p(x)} dx \leqslant \int\limits_Q \lambda_1^{q(x)} dx. \tag{5.10}$$

Обозначим правую часть неравенства (5.10) через K; тогда $\tau_1 = \frac{K}{|Q|\lambda_1}$. По неравенству (5.6) будет $K \leqslant 1$. Пользуясь еще условием $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$, получаем

$$\int\limits_Q \left(\frac{\tau_1}{C_A}\right)^{p(x)} dx = \int\limits_Q \left(\frac{K}{C_A|Q|\lambda_1}\right)^{p(x)} dx$$

$$\leqslant K\int\limits_Q \left(\frac{1}{C_A|Q|\lambda_1}\right)^{p(x)} dx \leqslant K\int\limits_Q \left(\frac{1}{\|\chi_Q\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)}}\right)^{p(x)} dx \leqslant K,$$

что совпадает с (5.10).

Следовательно, $p < +\infty$ почти везде на Q и можно применить неравенство Чебышева:

$$M_Q\varphi\left(\frac{\tau_1}{C_A}\right) \leqslant \left(\fint\limits_Q \left(\frac{\tau_1}{C_A}\right)^{p(x)} dx\right)\left(\fint\limits_Q \frac{dx}{p(x)}\right). \tag{5.11}$$

Из условия $\tau_1 > 1$ следует, что $\lambda_1 > 1$. Тогда $q < +\infty$ почти везде на Q по неравенству (5.6). По формуле (5.4) и по неравенству Чебышева

$$(M_Q\varphi^*)^*(\tau_1) = \fint\limits_Q \lambda_1^{q(x)} \frac{dx}{p(x)} \geqslant \left(\fint\limits_Q \lambda_1^{q(x)} dx\right)\left(\fint\limits_Q \frac{dx}{p(x)}\right). \tag{5.12}$$

Остается скомбинировать неравенства (5.10)–(5.12).

Шаг 3. Пусть $t_1 > 1$. Докажем неравенство

$$M_Q\varphi\left(\frac{t_1}{C_A}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(t_1). \tag{5.13}$$

Если $t_1 \leqslant C_A$, то оно очевидно в силу (5.9). Пусть $t_1 > C_A$. По условию $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ и формуле (5.6)

$$\fint_Q \left(\frac{t_1}{C_A}\right)^{p(x)} dx \leqslant \fint_Q \left(\frac{1}{\|\chi_Q\|^\circ_{p(\,\cdot\,)}}\right)^{p(x)} dx \leqslant \frac{1}{|Q|},$$

откуда $p < +\infty$ почти везде на Q. По неравенству Чебышева

$$M_Q\varphi\left(\frac{t_1}{C_A}\right) \leqslant \left(\fint_Q \left(\frac{t_1}{C_A}\right)^{p(x)} dx\right)\left(\fint_Q \frac{dx}{p(x)}\right) \leqslant \frac{1}{|Q|}\fint_Q \frac{dx}{p(x)}. \quad (5.14)$$

В случае $t_1 = \tau_1$ неравенство (5.13) уже доказано, осталось разобрать случай $t_1 > \tau_1$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_{\max} \geqslant 1$. Если $\lambda_1 > 1$, то $q < +\infty$ почти везде на Q по неравенству (5.6). По неравенству Чебышева

$$\fint_Q \lambda_1^{q(x)} \frac{dx}{q(x)} \leqslant \left(\fint_Q \lambda_1^{q(x)} dx\right)\left(\fint_Q \frac{dx}{q(x)}\right) \leqslant \frac{1}{|Q|}\fint_Q \frac{dx}{q(x)}.$$

Если же $\lambda_1 = 1$, то случай $q = +\infty$ исключить нельзя и неравенство Чебышева применить не удается, так как функция $q \mapsto 1^q$ не является возрастающей на $[1, +\infty]$ ввиду соглашения $1^{+\infty} = 0$. Но тогда $t_1 = \frac{1}{|Q|} > 1$, откуда $|Q| < 1$ и

$$\fint_Q \lambda_1^{q(x)} \frac{dx}{q(x)} \leqslant \fint_Q \frac{dx}{q(x)} \leqslant \frac{1}{|Q|}\fint_Q \frac{dx}{q(x)}.$$

В обоих случаях

$$\begin{aligned}(M_Q\varphi^*)^*(t_1) &= \frac{1}{|Q|} - \fint_Q \lambda_1^{q(x)} \frac{dx}{q(x)} \\ &\geqslant \frac{1}{|Q|} - \frac{1}{|Q|}\fint_Q \frac{dx}{q(x)} = \frac{1}{|Q|}\fint_Q \frac{dx}{p(x)}.\end{aligned} \quad (5.15)$$

Сопоставляя (5.14) и (5.15), приходим к (5.13).

Шаг 4. Пусть $t_1 > \max\{1, \tau_1\}$. Докажем неравенство

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{C_A}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(t), \quad t \in \bigl[\max\{1, \tau_1\}, t_1\bigr]. \quad (5.16)$$

В этом случае $t \in \partial M_Q\varphi^*(\lambda_1)$ и потому

$$(M_Q\varphi^*)^*(t) = t\lambda_1 - \fint_Q \lambda_1^{q(x)} \frac{dx}{q(x)}.$$

Левая часть неравенства (5.16) выпукла, а правая линейна на отрезке $\bigl[\max\{1, \tau_1\}, t_1\bigr]$. Поскольку неравенство верно на его концах, оно верно и на всем отрезке.

Шаг 5. Пусть $\tau_1 > 1$. Докажем, что неравенство

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{C}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(t), \quad t \in (1, \tau_1) \tag{5.17}$$

выполняется с константой $C = 1 + C_A$.

Если $t \leqslant C$, оно очевидно. Пусть $t > C$, тогда и $\tau_1 > C > C_A$. На шаге 2 было получено, что $\lambda_1 > 1$ и $1 < p < +\infty$ почти везде на Q. Функция τ – строго возрастающая биекция между отрезками $[1, \lambda_1]$ и $[1, \tau_1]$, откуда $t = \tau(\lambda)$, $\lambda \in (1, \lambda_1)$.

По неравенству Чебышева и равенству (5.4) получаем:

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{C}\right) \leqslant \left(\fint_Q \left(\frac{t}{C}\right)^{p(x)} dx\right)\left(\fint_Q \frac{dx}{p(x)}\right),$$

$$(M_Q\varphi^*)^*(t) \geqslant \left(\fint_Q \lambda^{q(x)} dx\right)\left(\fint_Q \frac{dx}{p(x)}\right).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\fint_Q \left(\frac{t}{C}\right)^{p(x)} dx \leqslant \fint_Q \lambda^{q(x)} dx.$$

По доказанному на шагах 1 и 2, если $\lambda = 1$, то это неравенство выполняется с константой $C = 1$, а если $\lambda = \lambda_1$, то с константой $C = C_A$.

Докажем, что при $\lambda \in (1, \lambda_1)$ оно выполняется с константой $C = 1 + C_A$. Перепишем его в равносильном виде

$$J(\lambda) = \fint_Q \left(\frac{1}{1 + C_A}\right)^{p(x)} \left(\fint_Q \lambda^{q(u) - q(x)} du\right)^{p(x)-1} dx \leqslant 1. \tag{5.18}$$

Разобьем внутренний интеграл $I(x,\lambda)$ на два: $I_1(x,\lambda)$ и $I_2(x,\lambda)$, по множествам

$$\{u \in Q : q(u) \leqslant q(x)\} \qquad \text{и} \qquad \{u \in Q : q(u) > q(x)\}$$

соответственно. Ясно, что I_1 убывает, а I_2 возрастает по λ и что $I_1, I_2 \leqslant I$.

Применим элементарное неравенство

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^r \leqslant \left(\frac{a}{c}\right)^r + \left(\frac{b}{d}\right)^r, \quad r,a,b \geqslant 0,\ c,d > 0.$$

Положим в нем $r = p(x)-1$, $a = I_1(x,\lambda)$, $b = I_2(x,\lambda)$, $c = 1$, $d = C_A$. Получим

$$\begin{aligned} J(\lambda) &\leqslant \fint_Q \left(\frac{1}{1+C_A}(I_1(x,\lambda))^{p(x)-1} + \frac{C_A}{1+C_A}\frac{(I_2(x,\lambda))^{p(x)-1}}{C_A^{p(x)}}\right) dx \\ &\leqslant \fint_Q \left(\frac{1}{1+C_A}(I(x,1))^{p(x)-1} + \frac{C_A}{1+C_A}\frac{(I(x,\lambda_1))^{p(x)-1}}{C_A^{p(x)}}\right) dx \leqslant 1. \end{aligned}$$

Неравенство (5.18), а вместе с ним и (5.17), доказано.

Шаг 6. Докажем неравенство

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{DC_A}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(t), \quad t \in \bigl(\max\{1,t_1\}, Dt_1\bigr].$$

Разумеется, этот шаг содержателен, лишь если указанный промежуток непуст.

Действительно, по доказанному

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{DC_A}\right) \leqslant M_Q\varphi\left(\frac{t_1}{C_A}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*\bigl(\max\{1,t_1\}\bigr) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(t).$$

Все возможные случаи разобраны и лемма доказана.

Использование функций $M_Q\varphi$ и $(M_Q\varphi^*)^*$ для характеризации ограниченности усредняющих операторов восходит к работам Дининга; см. [8, теорема 3.6] и [3, теорема 5.2.15].

5.3. Следствия.

Следствие 1. *Пусть $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$, $f \in L_{p(\,\cdot\,)}$ (на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{T}^n$), Q – куб в $\mathbb{R}^n$ ($h(Q) \leqslant 2\pi$ в случае $\mathbb{T}^n$), $c_1, c_2 > 0$, $M_Q|f| \geqslant c_1$, $\|f\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant c_2$.*

Тогда неравенство

$$\int\limits_Q \left(\frac{M_Q|f|}{C\max\{c_1,c_2\}}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \leqslant \int\limits_Q \left(\frac{|f(x)|}{c_1}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)}$$

выполняется с константой $C=\max\{1+C_A, C_AC_HB_{\mathcal{N}}(q)\}$.

Доказательство. По условию следствия и по неравенству Гёльдера

$$c_1 \leqslant M_Q|f| \leqslant C_H\|f\chi_Q\|_{p(\,\cdot\,)}\frac{\|\chi_Q\|_{q(\,\cdot\,)}}{|Q|} \leqslant c_2C_HB_{\mathcal{N}}(q)\frac{\|\chi_Q\|^{\circ}_{q(\,\cdot\,)}}{|Q|} = c_2T,$$

где $T = Dt_1 = C_HB_{\mathcal{N}}(q)\frac{\|\chi_Q\|^{\circ}_{q(\,\cdot\,)}}{|Q|}$. Тогда $c_2T \geqslant c_1$ и, как и в лемме, достаточно доказать неравенство

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{C\max\{c_1,c_2\}}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*\left(\frac{t}{c_1}\right), \quad c_1 \leqslant t \leqslant c_2T.$$

Положим $s=\frac{t}{c_1}$, тогда $t=c_1s$ и $1\leqslant s\leqslant \frac{c_2}{c_1}T$. При доказательстве леммы установлено (см. неравенство (5.8)), что

$$M_Q\varphi\left(\frac{s}{C}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(s), \quad 1\leqslant s\leqslant T,$$

что равносильно соотношению

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{Cc_1}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*\left(\frac{t}{c_1}\right), \quad c_1\leqslant t\leqslant c_1T.$$

Если же $\max\{1,T\}\leqslant s\leqslant \frac{c_2}{c_1}T$ (тем самым $c_1\leqslant c_2$), то

$$M_Q\varphi\left(\frac{c_1s}{Cc_2}\right) \leqslant M_Q\varphi\left(\frac{T}{C}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(\max\{1,T\}) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*(s),$$

что равносильно

$$M_Q\varphi\left(\frac{t}{Cc_2}\right) \leqslant (M_Q\varphi^*)^*\left(\frac{t}{c_1}\right), \quad \max\{c_1,c_1T\}\leqslant t\leqslant c_2T.$$

Следствие доказано. □

Как известно [5, предложение 2.14], если $p_+ < +\infty$, то константу можно вынести за знак модуляра.

Следствие 2. *Пусть в условиях следствия* 1 $p_+ < +\infty$. *Тогда*

$$\int\limits_Q (M_Q|f|)^{p(x)}\frac{dx}{p(x)} \leqslant C(p(\,\cdot\,),c_1,c_2)\int\limits_Q |f(x)|^{p(x)}\frac{dx}{p(x)},$$

где можно взять

$$C(p(\,\cdot\,), c_1, c_2) = \max\left\{d_1^{p_-}, d_1^{p_+}\right\} \cdot \max\left\{\left(\frac{1}{c_1}\right)^{p_-}, \left(\frac{1}{c_1}\right)^{p_+}\right\},$$
$$d_1 = \max\{1 + C_A, C_A C_H B_{\mathcal{N}}(q)\} \cdot \max\{c_1, c_2\}.$$

В частности, при $c_1 = c_2 = 1$ *имеем*

$$\int\limits_Q (M_Q|f|)^{p(x)}\,\frac{dx}{p(x)} \leqslant \bigl(\max\{1 + C_A, C_A C_H B_{\mathcal{N}}(q)\}\bigr)^{p_+} \int\limits_Q |f(x)|^{p(x)}\frac{dx}{p(x)}.$$

Поскольку в оценке участвуют лишь значения функции p на кубе Q, под $p_\pm$ здесь можно понимать $(p|_Q)_\pm$.

Для *доказательства* следует воспользоваться неравенствами

$$\int\limits_Q \left(\frac{M_Q|f|}{d_1}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \geqslant \min\left\{\left(\frac{1}{d_1}\right)^{p_-}, \left(\frac{1}{d_1}\right)^{p_+}\right\} \int\limits_Q (M_Q|f|)^{p(x)}\,\frac{dx}{p(x)},$$

$$\int\limits_Q \left(\frac{|f(x)|}{c_1}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \leqslant \max\left\{\left(\frac{1}{c_1}\right)^{p_-}, \left(\frac{1}{c_1}\right)^{p_+}\right\} \int\limits_Q (|f(x)|)^{p(x)}\,\frac{dx}{p(x)}.$$

Замечание 1. Если $p_+ = +\infty$, то неравенство следствия 2 может быть неверным. Возьмем $Q = \left[0, \frac{1}{10}\right]$, $p(x) = \frac{1}{10x}$, $f = 4\chi_{[\frac{1}{20}, \frac{1}{10}]}$. Тогда p продолжается до функции из $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, поскольку $1/p$ удовлетворяет условию Дини–Липшица (и даже Липшица); см. [3, предложение 4.1.7 и теорема 4.4.8]. Далее,

$$\int\limits_Q (f(x))^{p(x)} dx < \frac{1}{20} \cdot 4^2 = \frac{4}{5} < 1,$$

откуда $\|f\|^{\circ}_{p(\,\cdot\,)} < 1$. В то же время

$$M_Q f = 2 > 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_Q (M_Q f)^{p(x)} dx = +\infty.$$

5.4. Доказательство теоремы 1. Импликации $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ тривиальны. Равносильность $2 \Leftrightarrow 4$ следует из леммы 1. Докажем импликацию $3 \Rightarrow 1$ и неравенство (4.1).

1. Проведем доказательство в случае $L_{p(\,\cdot\,)}(E)$. Возьмем дизъюнктное семейство кубов $\mathcal{Q}$ и функцию $f \in L_{p(\,\cdot\,)}(E)$, такую что $\|f\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant 1$.

Не умаляя общности, можно считать, что $f \geqslant 0$. Разобьем семейство $\mathcal{Q}$ на две зависящие от f части:

$$\mathcal{Q}_1 = \{Q \in \mathcal{Q} : M_Q f \geqslant 1\}, \qquad \mathcal{Q}_2 = \{Q \in \mathcal{Q} : M_Q f < 1\}.$$

Пусть $C_1 = \max\{1 + C_A, C_A C_H B_{\mathcal{N}}(q)\}$ – постоянная из леммы 2, $C_2 = \|1\|_{p(\,\cdot\,)}$. По лемме 2

$$\begin{aligned}\int\limits_E \left(\frac{T_{\mathcal{Q}_1} f}{C_1}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} &= \int\limits_E \left(\sum_{Q\in\mathcal{Q}_1} \chi_Q(x) \frac{M_Q f}{C_1}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \\ &\leqslant \sum_{Q\in\mathcal{Q}_1} \int\limits_Q \left(\frac{M_Q f}{C_1}\right)^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \leqslant \sum_{Q\in\mathcal{Q}_1} \int\limits_Q (f(x))^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \\ &= \sum_{Q\in\mathcal{Q}_1} \int\limits_{Q\cap E} (f(x))^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \leqslant \int\limits_E (f(x))^{p(x)} \frac{dx}{p(x)} \leqslant 1,\end{aligned}$$

откуда по определению нормы $\|T_{\mathcal{Q}_1} f\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant C_1$. Оценка функции $T_{\mathcal{Q}_2} f$ очевидна ввиду монотонности нормы: из неравенства $T_{\mathcal{Q}_2} f \leqslant 1$ следует, что

$$\|T_{\mathcal{Q}_2} f\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant \|1\|_{p(\,\cdot\,)} = C_2.$$

Поскольку

$$T_{\mathcal{Q}} f = T_{\mathcal{Q}_1} f + T_{\mathcal{Q}_2} f,$$

имеем

$$\|T_{\mathcal{Q}} f\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant C_1 + C_2.$$

Следовательно, $\|T_{\mathcal{Q}}\|_{p(\,\cdot\,)} \leqslant C_1 + C_2$.

2. В периодическом случае положим $E = \mathbb{T}^n$. Пользуясь периодичностью семейства $\mathcal{Q}$ и инвариантностью интеграла по периоду относительно сдвига, можно считать, что все кубы Q, пересекающиеся с $\mathbb{T}^n$, содержатся в $\mathbb{T}^n$. После этого доказательство проводится аналогично.

Чтобы обеспечить ограниченность усреднений по Стеклову в пространстве $L_{p(\,\cdot\,)}(\mathbb{R}^n)$, к условию $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ требуется добавить какое-либо условие контроля поведения функции на бесконечности. Этот вопрос выходит за рамки настоящей статьи. Схожая проблема возникает при исследовании ограниченности максимального оператора, однако случай $p_- = 1$ принципиально не должен исключаться. Критерий ограниченности максимального оператора получен в [19].

Список литературы

1. О. Л. Виноградов, *Прямые и обратные теоремы теории приближений в банаховых идеальных пространствах.* — Алгебра и анализ **35**, No. 6 (2023), 14–44.
2. E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton (1993).
3. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ružička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, LNM 2017, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (2011).
4. И. И. Шарапудинов, *Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем*, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ (2012).
5. D. V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis*, Springer, Basel (2013).
6. P. Harjulehto, P. Hästö, *Orlicz spaces and generalized Orlicz spaces*, LNM 2236, Springer Nature Switzerland AG, (2019).
7. X.-L. Fan, *Some results on variable exponent analysis.* — In: H. G. W. Begehr, F. Nicolosi (eds.). More progresses in analysis. Proceedings of the 5th international ISAAC congress, Catania, Italy, July 25-30, 2005 World Scientific, Singapore (2009) pp. 93–99.
8. L. Diening, *Maximal function on Musielak–Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces.* — Bull. Sci. Math. **129**, No. 8 (2005), 657–700.
9. T. Kopaliani, *Infimal convolution and Muckenhoupt $A_{p(\,\cdot\,)}$ condition in variable L^p spaces.* — Arch. Math. **89**, No. 2 (2007), 185–192.
10. И. И. Шарапудинов, *О равномерной ограниченности в L^p $(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки.* — Мат. заметки **59**, No. 2 (1996), 291–302.
11. Т. Н. Шах-Эмиров, *О равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ некоторых семейств интегральных операторов свертки.* — Вестник Дагестанского научного центра РАН **51** (2013), 13–17.
12. A. K. Lerner, *On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces.* — Trans. Amer. Math. Soc. **362**, No. 8 (2010), 4229–4242.
13. D. V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Approximate identities in variable L^p spaces.* — Math. Nachr. **280**, No. 3 (2007), 256–270.
14. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М. (1974).
15. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи.* — Успехи мат. наук **23**, No. 6(144) (1968), 51–116.
16. R. T. Rockafellar, *Integrals which are convex functionals.* — Pacific J. Math. **24**, No. 3 (1968), 525–539.
17. M. Valadier, *Intégration de convexes fermés notamment d'épigraphes inf-convolution continue.* — Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge **4**, No. R2 (1970), 57–73.
18. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, Гос. изд. иностранной литературы, М. (1948).
19. A. K. Lerner, *A boundedness criterion for the maximal operator on variable Lebesgue spaces.* — `arxiv:2302.02475v2` (2023).

Vinogradov O. L. A boundedness criterion for averaging operators in variable exponent spaces of periodic functions.

A criterion for the uniform boundedness of Steklov averaging operators in variable exponent spaces of periodic functions is obtained. This criterion coincides with the known local analog of the Muckenhoupt condition. The boundedness of Steklov averages was previously known under the Dini–Lipschitz condition. The norms of averaging operators are estimated explicitly.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. д. 7–9, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 30 сентября 2024 г.