

В. И. Васюнин

## НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАРТИНГАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. II

### §8. МАЛЫЕ КАРМАНЫ

В этом разделе мы рассмотрим горизонтальные ёлки, ствол которых идёт из некоторой точки на границе в другую точку той же самой границы и не пересекает среднюю линию полосы. Такую фолиацию будем называть *малым карманом*, чтобы отличать от *большого кармана*. В случае большого кармана ствол ёлки также начнется и заканчивается на одной и той же границе, однако он дважды пересекает среднюю линию полосы. Большие карманы имеют совсем другое происхождение и будут рассмотрены позже.

Малые карманы возникают в областях с простой фолиацией. В силу симметрии можно рассматривать только правые простые фолиации и карманы, появляющиеся на верхней границе. Все остальные случаи могут быть получены заменой знаков переменных  $x_1$  и/или  $x_2$ .

Предположим, что при  $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)$  у нас есть стандартный кандидат с простой правой фолиацией на области  $\Omega_\varepsilon^R[u_1, u_2]$ . Это означает, что при  $u \in [u_1, u_2]$  и  $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)$  выполнены следующие два условия:

$$2\varepsilon D_+(u, \varepsilon) = f'_+(u + \varepsilon) - f'_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_+(u + \varepsilon) > 0; \quad (8.1)$$

$$2\varepsilon D_-(u, \varepsilon) = f'_+(u + \varepsilon) - f'_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_-(u - \varepsilon) > 0 \quad (8.2)$$

(см. условия (2.2) из статьи [1]). Более того, при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  одно из этих условий вырождается. Будем предполагать, что это – условие (8.1), то есть существует такая точка  $u_0 \in (u_1, u_2)$ , в которой выполнено равенство

$$D_+(u_0, \varepsilon_0) = 0, \quad (8.3)$$

а во всех остальных точках  $u \in [u_1, u_0) \cup (u_0, u_2]$  по-прежнему выполнено условие (8.1), если  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Будем предполагать, что этот корень не

---

*Ключевые слова:* функция Беллмана, мартингалное преобразование, диагонально вогнутая функция.

Работа выполнена за счёт Российского научного фонда, грант номер 19-71-100023 (<https://rscf.ru/project/19-71-100023/>).

является вырожденным в следующем смысле: при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  у функции  $\varepsilon \mapsto D_+(u_0, \varepsilon)$  только простой корень, то есть

$$\frac{\partial D_+}{\partial x_2}(u_0, \varepsilon_0) = \frac{f''_-(u_0 - \varepsilon_0) - f''_+(u_0 + \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0} - f'''_+(u_0 + \varepsilon_0) < 0, \quad (8.4)$$

а у функции  $u \mapsto D_+(u, \varepsilon_0)$  корень второго порядка в точке  $u = u_0$ , то есть

$$\frac{\partial D_+}{\partial x_1}(u_0, \varepsilon_0) = \frac{f'''_+(u_0 + \varepsilon_0) - f'''_-(u_0 - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0} - f'''_+(u_0 + \varepsilon_0) = 0, \quad (8.5)$$

и

$$\frac{\partial^2 D_+}{\partial x_1^2}(u_0, \varepsilon_0) = \frac{f''''_+(u_0 + \varepsilon_0) - f''''_-(u_0 - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0} - f''''_+(u_0 + \varepsilon_0) > 0. \quad (8.6)$$

Заметим, что условие (8.5) позволяет нам переписать неравенство (8.4) в более простом виде:

$$f'''_+(u_0 + \varepsilon_0) > 0. \quad (8.7)$$

При этих предположениях уравнение  $D_+(u, \varepsilon) = 0$  имеет два корня  $u^l(\varepsilon)$  и  $u^r(\varepsilon)$  ( $u^l < u^r$ ) при всех  $\varepsilon$  в некоторой правой окрестности значения  $\varepsilon_0$ . В некоторых утверждениях мы будем писать  $u_+$ , подразумевая под этим, что утверждение справедливо для каждого из этих двух корней, например,  $D_+(u_+, \varepsilon) = 0$ . Мы будем предполагать, что  $\varepsilon$  достаточно близко к  $\varepsilon_0$ , настолько, что  $D_+(u, \varepsilon) > 0$  при  $u \in [u_1, u^l] \cup (u^r, u_2]$  и  $D_+(u, \varepsilon) < 0$  при  $u \in (u^l, u^r)$ . Все эти предположения означают, что при  $\varepsilon$ , достаточно близком к  $\varepsilon_0$ , функция  $u \mapsto D_+(u, \varepsilon)$  убывает в точке  $u^l$  и возрастает в точке  $u^r$ . Следовательно,  $(D_+)'_u(u^l) < 0$  и  $(D_+)'_u(u^r) > 0$ , то есть

$$f''_+(u^l + \varepsilon) - f''_-(u^l - \varepsilon) - 2\varepsilon f'''_+(u^l + \varepsilon) < 0 \quad (8.8)$$

и

$$f''_+(u^r + \varepsilon) - f''_-(u^r - \varepsilon) - 2\varepsilon f'''_+(u^r + \varepsilon) > 0. \quad (8.9)$$

Мы будем предполагать  $\varepsilon$  настолько близким к  $\varepsilon_0$ , что справедливо не только неравенство (8.7), но и неравенство

$$f'''_+(u_+ + \varepsilon) > 0. \quad (8.10)$$

Для малых карманов нам понадобятся несколько новых обозначений. Карманы, возникающие на верхней границе, будем помечать индексом “+”, а индекс “−” будет использоваться для карманов на нижней границе. Если это правая ёлка, то он будет помечен буквой E (east), для левых ёлок будет использоваться буква W (west).

Теперь мы можем сформулировать главное утверждение этого раздела.

**Теорема 8.1.** Пусть граничные функции  $f_{\pm}$  обладают вышеописанными свойствами, то есть

- $D_+(u, \varepsilon) > 0$  и  $D_-(u, \varepsilon) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$  и  $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_0)$ , а значит может быть построена правая простая фолиация на области  $\Omega_{\varepsilon}^R(u_1, u_2)$ ;
- $\varepsilon_0$  является простым корнем функции  $\varepsilon \mapsto D_+(u_0, \varepsilon)$ , и  $D_+(u, \varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2] \setminus \{u_0\}$ ;
- $D_-(u, \varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$ ;
- $u_0$  является корнем второго порядка функции  $u \mapsto D_+(u, \varepsilon_0)$ .

Тогда при некотором  $\varepsilon_+$  существуют два корня  $u^l$  и  $u^r$  ( $u^l < u^r$ ) уравнения  $D_+(u, \varepsilon) = 0$ , если  $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_+)$ , и можно построить следующую фолиацию (см. рис. 17)

$$\Omega_{\varepsilon}^R(u_1, u^l) \cup \Omega_{\varepsilon}^{W+}(u^l, u^r) \cup \Omega_{\varepsilon}^R(u^r, u_2), \quad (8.11)$$

при этом фолиация на области

$$\Omega_{\varepsilon}^{W+}(u^l, u^r) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2): u^l \leq x_1 - x_2 \leq u^r, -\varepsilon \leq x_2 \leq \varepsilon\}$$

является левой горизонтальной ёлкой, растущей от точки  $(u^l + \varepsilon, \varepsilon)$  до точки  $(u^r + \varepsilon, \varepsilon)$ .

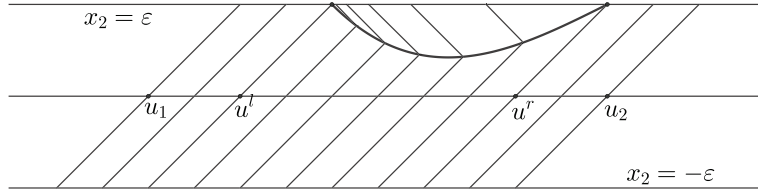


Рис. 17. Фолиация (8.11).

Теперь сформулируем теорему, описывающую симметричную ситуацию, когда функция  $D_-$  обращается на верхней границе в ноль при некотором значении параметра  $\varepsilon_0$ .

**Теорема 8.2.** Пусть граничные функции  $f_{\pm}$  обладают следующими свойствами:

- $D_+(u, \varepsilon) > 0$  и  $D_-(u, \varepsilon) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$  и  $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_0)$ , а значит может быть построена правая простая фолиация на области  $\Omega_\varepsilon^R(u_1, u_2)$ ;
- $\varepsilon_0$  является простым корнем функции  $\varepsilon \mapsto D_-(u_0, \varepsilon)$ , и  $D_-(u, \varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2] \setminus \{u_0\}$ ;
- $D_+(u, \varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$ ;
- $u_0$  является корнем второго порядка функции  $u \mapsto D_-(u, \varepsilon_0)$ .

Тогда при некотором  $\varepsilon_+$  существуют два корня  $u^l$  и  $u^r$  ( $u^l < u^r$ ) уравнения  $D_-(u, \varepsilon) = 0$  при  $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_+)$ , и можно построить следующую фолиацию (см. рис. 18)

$$\Omega_\varepsilon^R(u_1, u^l) \cup \Omega_\varepsilon^{E^-}(u^l, u^r) \cup \Omega_\varepsilon^R(u^r, u_2), \quad (8.12)$$

при этом фолиация на области

$$\Omega_\varepsilon^{E^-}(u^l, u^r) = \{(x_1, x_2) : u^l \leq x_1 - x_2 \leq u^r, -\varepsilon \leq x_2 \leq \varepsilon\}$$

является правой горизонтальной ёлкой, растущей от точки  $(u^r - \varepsilon, -\varepsilon)$  до точки  $(u^l - \varepsilon, -\varepsilon)$ .

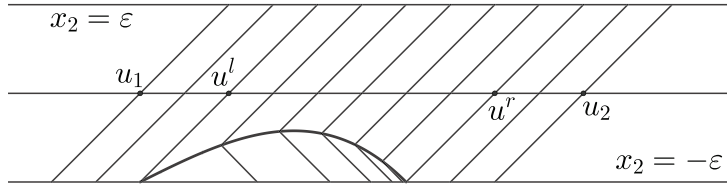


Рис. 18. Фолиация (8.12).

Если начинать с левой простой фолиации, то мы получим следующие аналогичные утверждения.

**Теорема 8.3.** Пусть граничные функции  $f_\pm$  обладают следующими свойствами:

- $D_+(u, -\varepsilon) > 0$  и  $D_-(u, -\varepsilon) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$  и  $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_0)$ , а значит может быть построена левая простая фолиация на области  $\Omega_\varepsilon^L(u_1, u_2)$ ;
- $\varepsilon_0$  является простым корнем функции  $\varepsilon \mapsto D_+(u_0, -\varepsilon)$  и  $D_+(u, -\varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2] \setminus \{u_0\}$ ;
- $D_-(u, -\varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$ ;

•  $u_0$  является корнем второго порядка функции  $u \mapsto D_+(u, -\varepsilon_0)$ . Тогда при некотором  $\varepsilon_+$  существуют два корня  $u^l$  и  $u^r$  ( $u^l < u^r$ ) уравнения  $D_+(u, -\varepsilon) = 0$  при  $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_+)$ , и можно построить следующую фолиацию (см. рис. 19)

$$\Omega_\varepsilon^L(u_1, u^l) \cup \Omega_\varepsilon^{E+}(u^l, u^r) \cup \Omega_\varepsilon^L(u^r, u_2), \quad (8.13)$$

при этом фолиация на области

$$\Omega_\varepsilon^{E+}(u^l, u^r) = \{(x_1, x_2): u^l \leq x_1 + x_2 \leq u^r, -\varepsilon \leq x_2 \leq \varepsilon\}$$

является правой горизонтальной ёлкой, растущей от точки  $(u^r - \varepsilon, \varepsilon)$  до точки  $(u^l - \varepsilon, \varepsilon)$ .

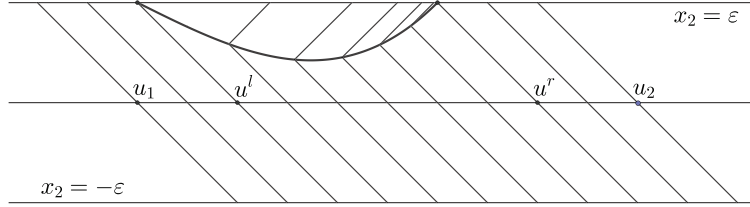


Рис. 19. Фолиация (8.13).

**Теорема 8.4.** Пусть граничные функции  $f_\pm$  обладают следующими свойствами:

- $D_+(u, -\varepsilon) > 0$  и  $D_-(u, -\varepsilon) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$  и  $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_0)$ , а значит может быть построена левая простая фолиация на области  $\Omega_\varepsilon^L(u_1, u_2)$ ;
- $\varepsilon_0$  является простым корнем функции  $\varepsilon \mapsto D_-(u_0, -\varepsilon)$ , и  $D_-(u, -\varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2] \setminus \{u_0\}$ ;
- $D_+(u, \varepsilon_0) > 0$  при  $u \in [u_1, u_2]$ ;
- $u_0$  является корнем второго порядка функции  $u \mapsto D_-(u, \varepsilon_0)$ .

Тогда при некотором  $\varepsilon_+$  существуют два корня  $u^l$  и  $u^r$  ( $u^l < u^r$ ) уравнения  $D_-(u, \varepsilon) = 0$  при  $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_+)$ , и можно построить следующую фолиацию (см. рис. 20)

$$\Omega_\varepsilon^L(u_1, u^l) \cup \Omega_\varepsilon^{W-}(u^l, u^r) \cup \Omega_\varepsilon^L(u^r, u_2), \quad (8.14)$$

при этом фолиация на области

$$\Omega_\varepsilon^{\text{W-}}(u^l, u^r) = \{(x_1, x_2) : u^l \leq x_1 + x_2 \leq u^r, -\varepsilon \leq x_2 \leq \varepsilon\}$$

является левой горизонтальной ёлкой, растущей от точки  $(u^l + \varepsilon, -\varepsilon)$  до точки  $(u^r + \varepsilon, -\varepsilon)$ .

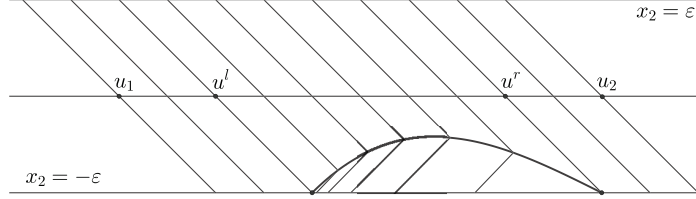


Рис. 20. Фолиация (8.14).

Будем доказывать только теорему 8.1. Остальные три теоремы могут быть получены с помощью симметрии.

**Доказательство теоремы 8.1.** Начнём с исследования поля (5.3) в небольшой области, включающей стационарные точки  $U^l \stackrel{\text{def}}{=} (u^l, \varepsilon)$  и  $U^r \stackrel{\text{def}}{=} (u^r, \varepsilon)$ . Для начала рассмотрим три кривые  $X_0$ ,  $X_1$  и  $X_\infty$ , на которых наклон интегральных кривых нашего поля соответственно, равен 0 (т. е.  $\dot{x}_2 = 0$ ), равен 1 (т. е.  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1$ ) и равен  $\infty$  (т. е.  $\dot{x}_1 = 0$ ).

Используя обозначения не вполне корректно, мы одним и тем же символом  $X_i$  будем обозначать не только кривые, но и следующие функции:

$$\begin{aligned} X_0(x_1, x_2) &= f'_- - f'_+ - (\varepsilon - x_2)f''_- + (\varepsilon + x_2)f''_+; \\ X_1(x_1, x_2) &= f'_+ - f'_- - 2x_2f''_+; \\ X_\infty(x_1, x_2) &= \varepsilon(f'_+ - f'_-) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- - x_2(\varepsilon + x_2)f''_+. \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (5.3) кривые  $X_i$  задаются уравнениями  $X_i = 0$ . Напомним, что у функции  $f_+$  и её производных аргументом является  $x_1 + x_2$ , а у функции  $f_-$  и её производных аргумент  $x_1 - x_2$ .

**Лемма 8.5.** *Все три кривые  $X_0$ ,  $X_1$  и  $X_\infty$  проходят через точки  $U^l$  и  $U^r$ . Если  $\varepsilon$  достаточно близко к  $\varepsilon_0$ , то между этими двумя точками упомянутые кривые расположены в следующем порядке:  $X_\infty$  лежит*

ниже прямой  $x_2 = \varepsilon$  и выше кривой  $X_1$ , а кривая  $X_0$  располагается под кривой  $X_1$ .

**Доказательство.** Первое утверждение леммы вытекает из следующих простых равенств:

$$\begin{aligned} X_0(x_1, \varepsilon) &= -2\varepsilon D_+(x_1, \varepsilon); \\ X_1(x_1, \varepsilon) &= 2\varepsilon D_+(x_1, \varepsilon); \\ X_\infty(x_1, \varepsilon) &= 2\varepsilon^2 D_+(x_1, \varepsilon). \end{aligned}$$

Для доказательства второго утверждения леммы о взаимном расположении кривых  $X_i$  вычислим наклоны этих кривых в точках  $U^l$  и  $U^r$ . При вычислении наклона  $\text{slope}(X_i) = -\frac{\partial X_i}{\partial x_1} / \frac{\partial X_i}{\partial x_2}$  мы будем использовать обозначение из формулы (5.18):

$$\kappa_+ = \frac{2f_+'''(u_+ + \varepsilon)}{f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)}. \quad (8.15)$$

Поскольку тут у нас два корня  $u^l$  и  $u^r$  уравнения  $D_+(u, \varepsilon) = 0$  вместо одного  $u_+$  в (5.18), соответствующие значения  $\kappa_+$  будут обозначаться символами  $\kappa^l$  и  $\kappa^r$ . Заметим, что в силу неравенств (8.8)–(8.10) у нас  $\kappa^l < 0$  и  $\kappa^r > 0$ . Более того,  $\kappa^l \rightarrow -\infty$  и  $\kappa^r \rightarrow +\infty$ , когда  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  сверху. Действительно, в этой ситуации  $u^{l,r} \rightarrow u_0$ , и следовательно, знаменатель в (8.15) стремится к нулю.

Непосредственным вычислением получаем (напомним, что  $u_+$  — это любой из корней  $u^{l,r}$ , и естественно,  $\kappa_+$  — это соответствующий коэффициент  $\kappa^{l,r}$ ):

$$\text{slope}(X_0)(u_+, \varepsilon) = \frac{f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)}{2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon \kappa_+};$$

$$\text{slope}(X_1)(u_+, \varepsilon) = \frac{f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)}{f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) + 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon \kappa_+};$$

$$\text{slope}(X_\infty)(u_+, \varepsilon) = \frac{f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)}{2f_+''(u_+ + \varepsilon) - 2f_-''(u_+ - \varepsilon) + 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)} = \frac{1}{2 + 3\varepsilon \kappa_+}.$$

Поскольку  $\kappa^r > 0$ , справедлива цепочка неравенств

$$2 + 3\varepsilon \kappa^r > 1 + 2\varepsilon \kappa^r > \varepsilon \kappa^r > 0,$$

то есть в точке  $U^r$  получаем соотношения

$$0 < \text{slope}(X_\infty)(u^r, \varepsilon) < \text{slope}(X_1)(u^r, \varepsilon) < \text{slope}(X_0)(u^r, \varepsilon).$$

Отметим, что в промежутке между точками  $U^l$  и  $U^r$  эти кривые не могут пересекать одна другую, и все они равномерно близки к горизонтальной прямой  $x_2 = \varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ . Теорема о неявной функции и условие (8.7) дают нам возможность говорить о взаимном расположении этих кривых, если параметр  $\varepsilon$  чуть больше  $\varepsilon_0$ . Приведённая выше цепочка неравенств является достаточной для того, чтобы взаимное положение рассматриваемых кривых было таким, как описано в формулировке леммы.  $\square$

Взаимное расположение кривых  $X_0$ ,  $X_1$  и  $X_\infty$  иллюстрирует рис. 21.

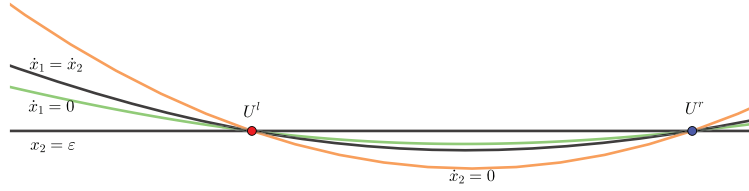


Рис. 21. Кривые  $X_0$ ,  $X_1$  и  $X_\infty$ , описанные в лемме 8.5.

Теперь мы рассмотрим поле (5.3) вблизи стационарных точек  $U^l$  и  $U^r$ . Матрица Якоби в точках  $U^l$  и  $U^r$  была сосчитана в формуле (5.17). Исследуем эту матрицу более детально при  $\varepsilon$  чуть бóльших, чем  $\varepsilon_0$ . Несколько более удобным будет использование параметра  $s = 1 + \varepsilon\kappa_+$  вместо  $\kappa_+$ . Тогда матрица, которую мы хотим исследовать, примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 - 3s \\ -1 & s - 1 \end{pmatrix}, \quad (8.16)$$

её характеристический многочлен равен  $\lambda^2 - s\lambda - 2s$ , а собственные значения

$$\lambda = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 8s}}{2}. \quad (8.17)$$

Собственные векторы матрицы (8.16) имеют вид

$$\begin{pmatrix} s - 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$



Если  $s > 0$ , то у нас два вещественных собственных значения разных знаков, и, следовательно, стационарная точка является седловой точкой. Если  $s \in (-8, 0)$ , то у нас пара комплексно сопряжённых собственных значений, и, следовательно, стационарная точка является спиральной точкой. Если  $s < -8$ , то у нас два отрицательных собственных значения, и, таким образом, стационарная точка является узлом. Поскольку  $\kappa^r > 0$  (см. (8.9)), точка  $U^r$  всегда является седловой точкой нашего поля. В точке  $U^l$  возможны все три ситуации, но сейчас нам интересно то, что происходит при  $\varepsilon$ , слегка превышающих значение  $\varepsilon_0$ , а в этом случае точка  $U^l$  является узлом. Действительно, мы уже знаем, что  $\kappa^l \rightarrow -\infty$ , когда  $\varepsilon$  сверху приближается к  $\varepsilon_0$ , то есть  $s \rightarrow -\infty$ . Следовательно, если  $\varepsilon$  чуть больше  $\varepsilon_0$ , то у матрицы (8.16) два отрицательных собственных значения.

Теперь рассмотрим поведение собственных векторов (8.18). Поскольку

$$s - 1 - \lambda = \frac{s - 2 \mp \sqrt{s^2 + 8s}}{2} = \frac{2(1 - 3s)}{s - 2 \pm \sqrt{s^2 + 8s}}, \quad (8.19)$$

для одного знака перед квадратным корнем при  $s \rightarrow +\infty$  получаем  $s - 1 - \lambda = s + 1 + O(s^{-1})$ , а для другого знака  $s - 1 - \lambda \rightarrow -3$ . Это означает, что, если  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  сверху, то у одного собственного вектора в точке  $U^r$  небольшой положительный наклон, стремящийся к нулю, а наклон второго собственного вектора стремится к  $-1/3$ , и поведение интегральных кривых нашего поля таково, как на рис. 22.

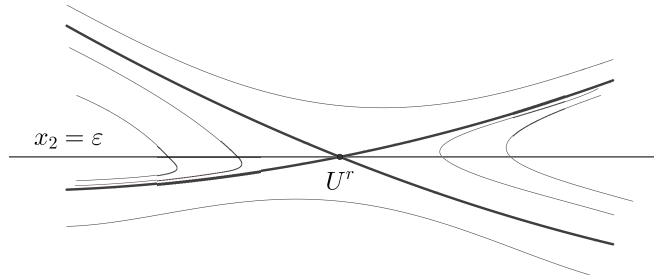


Рис. 22. Интегральные кривые в окрестности точки  $U^r$ .

В точке  $U^l$  один из собственных векторов имеет небольшой отрицательный наклон, который также стремится к нулю, а наклон второго

собственного вектора тоже стремится к  $-1/3$ , и поведение интегральных кривых нашего поля таково, как на рис. 23.

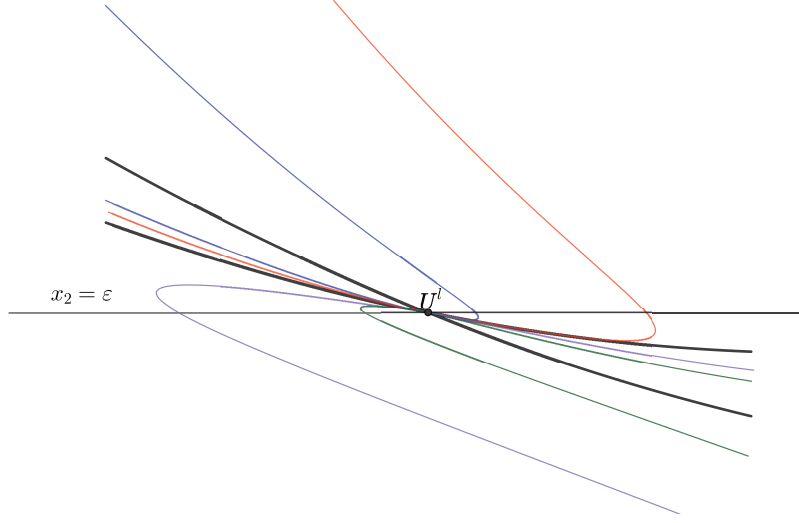


Рис. 23. Интегральные кривые в окрестности точки  $U^l$ .

Рассмотрим интегральную кривую, выходящую из точки  $U^r$  вдоль того собственного вектора матрицы Якоби, который имеет положительный наклон. Назовём эту кривую  $\ell_\epsilon$ . После сдвига вправо на  $\epsilon$  эта кривая будет стволем нашей левой ёлки. Для этого надо проверить, что  $\ell_\epsilon$  проходит в области, где  $D_+ > 0$  и  $D_- > 0$ .

Первым делом отметим, что  $\ell_\epsilon$  может выйти из полосы только через отрезок  $[U^l, U^r)$  на верхней границе, поскольку от нижней границы, а равно и от той части верхней границы, которая левее точки  $U^l$ , она отделена интегральной кривой поля, которая выходит из точки  $U^l$  с наклоном, близким к  $-1/3$ . Как уже было отмечено,  $s - 1 - \lambda \approx s + 1 = 2 + \epsilon\kappa^r$ , то есть  $\ell_\epsilon$  выходит из точки  $U^r$  между кривыми  $X_0$  и  $X_1$ , поскольку  $\epsilon\kappa^r < 2 + \epsilon\kappa^r < 1 + 2\epsilon\kappa^r$  (если  $\epsilon$  не слишком далеко от  $\epsilon_0$ , то есть  $\epsilon\kappa^r$  достаточно велико). Так как интегральные линии поля в точках кривой  $X_1$  имеют единичный наклон, а сама кривая  $X_1$  имеет наклон, близкий к нулю на интервале  $x_1 \in (u^l, u^r)$ , то интегральные

линии пересекают  $X_1$  справа сверху налево вниз. А так как интересующая нас кривая  $\ell_\varepsilon$  выходит из точки  $U^r$  под кривой  $X_1$ , то она не может её пересечь внутри промежутка  $(u^l, u^r)$ . Таким образом,  $\ell_\varepsilon$  покидает полосу  $\Omega_\varepsilon$  в точке  $U^l$ , оставаясь в полосе ниже кривой  $X_1$ , то есть в области, где  $D_+ > 0$ .

Проверка того, что наклон кривой  $\ell_\varepsilon$  больше  $-1$ , сводится к проверке неравенства  $D_-(u_0, \varepsilon_0) > 0$ , поскольку тогда при  $\varepsilon$ , достаточно близких к  $\varepsilon_0$ , неравенство  $D_-(x) > 0$  будет выполняться и на той части кривой  $\ell_\varepsilon$ , которая находится внутри полосы. Из неравенств (8.5) и (8.7) следует, что

$$f_+''(u_0 + \varepsilon_0) - f_-''(u_0 - \varepsilon_0) > 0,$$

поэтому мы имеем желаемую оценку

$$D_-(u_0, \varepsilon_0) = D_+(u_0, \varepsilon_0) + f_+''(u_0 + \varepsilon_0) - f_-''(u_0 - \varepsilon_0) > 0.$$

Приведённое выше рассуждение почти доказывает теорему 8.1. Напомним, что ствол левой ёлки сдвинут вправо на  $\varepsilon$  по сравнению с интегральной кривой  $\ell_\varepsilon$ . Таким образом, мы построили область  $\Omega_\varepsilon^{w+}(u^l, u^r)$  с левой ёлкой, фолирующей эту область.

Осталось проверить, что с обеих сторон от этой области может быть построена простая правая фолиация, то есть проверить, что условия (2.2) выполняются при  $u \in (u_1, u^l)$  и при  $u \in (u^r, u_2)$  для некоторых  $u_1$  и  $u_2$ . Однако это является непосредственным следствием определения точек  $u^r$  and  $u^l$ : это — соседние простые корни уравнения  $D_+(u, \varepsilon) = 0$ , причём  $D_+(u, \varepsilon) < 0$ , если  $u \in (u^l, u^r)$ . Это означает, что  $D_+(u, \varepsilon) > 0$  на некоторых интервалах  $(u_1, u^l)$  и  $(u^r, u_2)$ . Поскольку мы предполагали, что условия (8.1) и (8.2) не вырождаются одновременно в точке  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , то есть условие  $D_-(u, \varepsilon) > 0$  остаётся справедливым на  $[u_1, u_2]$ , можно построить правые простые фолиации на областях  $\Omega_\varepsilon^R(u_1, u^l)$  и  $\Omega_\varepsilon^R(u^r, u_2)$ .  $\square$

Мы будем часто пользоваться символом  $\ell_\varepsilon$ , поэтому дадим ему формальное определение

**Определение 8.6.** Символ  $\ell_\varepsilon$  обозначает часть той интегральной кривой поля (5.3), которая расположена внутри полосы  $\Omega_\varepsilon$  и проходит под положительным углом через стационарную точку  $(u, \varepsilon)$ , в которой  $D_+(u, \varepsilon) = 0$ .

**Замечание 8.7.** Тем же самым символом  $\ell_\varepsilon$  будем обозначать аналогичные кривые в симметричных ситуациях. Если понадобится одновременное рассмотрение двух таких кривых, то будем добавлять какой-нибудь индекс, например,  $\ell_\varepsilon^+$  и  $\ell_\varepsilon^-$ .

Теперь мы хотим исследовать взаимное расположение кривых  $\ell_\varepsilon$  в зависимости от  $\varepsilon$ . Фактически мы повторим рассуждения, содержащиеся в доказательстве предложения 6.1.

**Предложение 8.8.** Пусть функция  $D_+$  обращается в ноль в точке  $(u, \varepsilon)$ . Предположим, что

$$\kappa_+^L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2f_+'''(u + \varepsilon)}{f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon)} > 0. \quad (8.20)$$

Тогда до тех пор, пока кривая  $\ell_\varepsilon$  идёт в области, где  $x_2 D_+ D_- > 0$ , её наклон находится в промежутке между  $-1$  и  $1$  (то есть она может рассматриваться как график функции от аргумента  $x_1$ ). Более того, при  $\varepsilon' < \varepsilon''$  кривая  $\ell_{\varepsilon'}$  располагается строго выше кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ , пока они находятся в рассматриваемой области.

**Доказательство.** Поскольку мы рассматриваем область, где выполняется строгое неравенство  $x_2 D_+ D_- > 0$ , и наша кривая  $\ell_\varepsilon$  начинается на верхней границе полосы, мы рассматриваем эту кривую только пока она проходит в верхней половине полосы. Более того, так как на начальном участке кривая  $\ell_\varepsilon$  проходит в области, где  $D_+ > 0$  и  $D_- > 0$ , то мы рассматриваем эту кривую только пока эти два условия тоже выполнены. Отсюда следует, что наклон кривой  $\ell_\varepsilon$  находится строго между  $-1$  и  $1$ . Следовательно, утверждение о том, что одна кривая проходит ниже другой, является осмысленным.

Зададим функцию  $\varepsilon \mapsto u(\varepsilon)$  неявно с помощью уравнения  $D_+(u, \varepsilon) = 0$ , то есть

$$f_+'(u + \varepsilon) - f_-'(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+''(u + \varepsilon) = 0.$$

Вычисляя производную по  $\varepsilon$ , получаем

$$u'(\varepsilon) = \frac{f_+'' - f_-'' + 2\varepsilon f_+'''}{f_+'' - f_-'' - 2\varepsilon f_+'''} = 1 + 2\varepsilon \kappa_+^L.$$

Следовательно, наклон этой кривой равен

$$\frac{1}{u'} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon \kappa_+^L} = \frac{1}{2s - 1},$$

где  $s = 1 + \varepsilon \kappa_+^L$ . Отметим, что по условию  $\kappa_+^L > 0$ , таким образом  $s > 1$ .

С другой стороны, кривая  $\ell_\varepsilon$  выходит из точки  $(u, \varepsilon)$  вдоль собственного вектора матрицы Якоби с наклоном

$$\frac{1}{s-1-\lambda} = \frac{2}{s-2+\sqrt{s^2+8s}}$$

(см. (8.19)).

Нетрудно проверить, что

$$2s-1 > \frac{s-2+\sqrt{s^2+8s}}{2}$$

при  $s > 1$ , то есть наклон кривой  $\ell_\varepsilon$  строго больше наклона кривой  $u(\varepsilon)$  в их общей точке  $(u(\varepsilon), \varepsilon)$ . Таким образом, можно сделать вывод, что, когда  $\varepsilon'$  достаточно близко к  $\varepsilon''$ , точка  $(u(\varepsilon'), \varepsilon')$  лежит над кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ . Следовательно, некоторый начальный участок кривой  $\ell_{\varepsilon'}$  находится над кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ . Продолжая эти кривые влево, предположим, что они пересеклись в некоторой точке. Поскольку кривая  $\ell_{\varepsilon'}$  до этой точки шла над кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ , её наклон в точке пересечения должен быть не меньше наклона кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ . Однако, согласно предложению 5.4, это невозможно внутри области, где  $x_2 D_+ D_- > 0$ .  $\square$

Чтобы не ограничиваться словами о том, что в симметричных случаях всё аналогично, сформулируем эти симметричные утверждения.

**Предложение 8.9.** Пусть функция  $D_-$  обращается в ноль в точке  $(u, -\varepsilon)$ . Предположим, что

$$\kappa_-^L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2f_-'''(u+\varepsilon)}{f_-''(u+\varepsilon) - f_+''(u-\varepsilon) - 2\varepsilon f_-'''(u+\varepsilon)} > 0. \quad (8.21)$$

Обозначим символом  $\ell_\varepsilon$  интегральную кривую поля (5.3) внутри полосы  $\Omega_\varepsilon$ , которая с отрицательным наклоном проходит через точку  $(u, -\varepsilon)$ . Тогда до тех пор, пока кривая  $\ell_\varepsilon$  идёт в области, где  $x_2 D_+ D_- < 0$ , её наклон находится в промежутке между  $-1$  и  $1$  (то есть она может рассматриваться как график функции от аргумента  $x_1$ ). Более того, при  $\varepsilon' < \varepsilon''$  кривая  $\ell_{\varepsilon'}$  располагается строго ниже кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ , пока они находятся в рассматриваемой области.

Данные два предложения относятся к построению левых горизонтальных ёлок с концами на верхней и, соответственно, нижней границе полосы. Если же мы будем иметь дело с правыми ёлками, то

нам потребуются утверждения, относящиеся к ситуации, получающейся отражением относительно вертикальной оси. Стволы правых ёлок получаютс я сдвигом влево на  $\varepsilon$  интегральных кривых поля

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\varepsilon + x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2 f''_+ \right] + (\varepsilon - x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2 f''_- \right], \\ \dot{x}_2 = (\varepsilon + x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2 f''_+ \right] - (\varepsilon - x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2 f''_- \right], \end{cases} \quad (8.22)$$

или в несколько иначе сгруппированном виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(f'_- - f'_+) - x_2(\varepsilon + x_2)f''_+ - x_2(\varepsilon - x_2)f''_-, \\ \dot{x}_2 = x_2(f'_- - f'_+) - x_2(\varepsilon + x_2)f''_+ + x_2(\varepsilon - x_2)f''_-, \end{cases} \quad (8.23)$$

где  $f_+ = f_+(x_1 - x_2)$  и  $f_- = f_-(x_1 + x_2)$ .

Отметим, что возможность построить правую ёлку по интегральной кривой  $\ell_\varepsilon$  определяется тем, где проходит сопряжённая кривая  $\bar{\ell}_\varepsilon$ . По аналогии с комплексными числами, будем называть сопряжённой кривую, симметричную данной относительно оси  $x_2 = 0$ .

**Предложение 8.10.** Пусть функция  $D_-$  обращается в ноль в точке  $(u, \varepsilon)$ . Предположим, что

$$\kappa_-^R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2f'''_-(u - \varepsilon)}{f''_+(u + \varepsilon) - f''_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f'''_-(u - \varepsilon)} > 0. \quad (8.24)$$

Обозначим символом  $\ell_\varepsilon$  интегральную кривую поля (8.22) внутри полосы  $\Omega_\varepsilon$ , которая с положительным наклоном проходит через точку  $(u, -\varepsilon)$ . Тогда до тех пор, пока кривая  $\bar{\ell}_\varepsilon$ , сопряжённая к  $\ell_\varepsilon$ , идёт в области, где  $x_2 D_+ D_- > 0$ , её наклон находится в промежутке между  $-1$  и  $1$  (то есть она может рассматриваться как график функции от аргумента  $x_1$ ). Более того, при  $\varepsilon' < \varepsilon''$  кривая  $\ell_{\varepsilon'}$  располагается строго ниже кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ , пока они находятся в рассматриваемой области.

**Предложение 8.11.** Пусть функция  $D_+$  обращается в ноль в точке  $(u, -\varepsilon)$ . Предположим, что

$$\kappa_+^R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2f'''_+(u - \varepsilon)}{f''_-(u + \varepsilon) - f''_+(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f'''_+(u - \varepsilon)} > 0. \quad (8.25)$$

Обозначим символом  $\ell_\varepsilon$  интегральную кривую поля (8.22) внутри полосы  $\Omega_\varepsilon$ , которая с положительным наклоном проходит через точку  $(u, \varepsilon)$ . Тогда до тех пор, пока кривая  $\bar{\ell}_\varepsilon$ , сопряжённая к  $\ell_\varepsilon$ , идёт в области, где  $x_2 D_+ D_- < 0$ , её наклон находится в промежутке между  $-1$  и  $1$  (то есть она может рассматриваться как график функции

от аргумента  $x_1$ ). Более того, при  $\varepsilon' < \varepsilon''$  кривая  $\ell_{\varepsilon'}$  располагается строго выше кривой  $\ell_{\varepsilon''}$ , пока они находятся в рассматриваемой области.

Сделаем замечание, которое нам в ближайшее время не понадобится, но в дальнейшем позволит не повторять уже приведённые рассуждения, а ограничиться ссылкой на данное предложение.

**Замечание 8.12.** В только что доказанном предложении предполагалось, что мы рассматриваем кривую  $\ell_\varepsilon$  только в верхней или нижней половине полосы. Однако нетрудно распространить утверждение и на другую половину, если интегральная кривая  $\ell_\varepsilon$  пересекает середину полосы в точке  $(u_0, 0)$ , где  $u_0$  — простой корень уравнения  $f'_+(u) = f'_-(u)$ . В этом случае при переходе в другую половину полосы соотношения ниже и выше меняются местами. Общее правило можно сформулировать так: чем больше  $\varepsilon$ , тем ближе кривая  $\ell_\varepsilon$  к середине полосы  $x_2 = 0$ .

### §9. ПРИМЕРЫ. МНОГОЧЕНЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ: СЛУЧАЙ ОДНОГО МАЛОГО КАРМАНА

В разделе 7, где мы начали рассмотрение многочленов третьей степени

$$f_\pm(t) = a_3^\pm t^3 + a_2^\pm t^2 + a_1^\pm t + a_0^\pm,$$

был полностью описан случай  $a_3^+ = a_3^-$ , а фолиация в случае  $a_3^+ \neq a_3^-$  была исследована только при малых  $\varepsilon$ . Теперь мы готовы описать фолиацию тогда, когда дискриминант квадратичного полинома

$$f'_+(t) - f'_-(t) = 3(a_3^+ - a_3^-)t^2 + 2(a_2^+ - a_2^-)t + (a_1^+ - a_1^-)$$

отрицателен, то есть

$$3(a_3^+ - a_3^-)(a_1^+ - a_1^-) > (a_2^+ - a_2^-)^2. \quad (9.1)$$

Пользуясь симметрией, мы можем предполагать, что  $|a_3^+| > |a_3^-|$  (в противном случае поменяем местами  $f_+$  и  $f_-$ ) и что  $a_3^+ > 0$  (в противном случае заменим  $t$  на  $-t$ ). Теперь мы будем исследовать поле (5.3), чтобы показать, что ситуация подпадает под условия теоремы 8.1 для

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^+ \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{12a_3^+} \left[ a_1^+ - a_1^- - \frac{(a_2^+ - a_2^-)^2}{3(a_3^+ - a_3^-)} \right]}. \quad (9.2)$$

Начнём с вычисления функций  $D_{\pm}$ :

$$2x_2 D_+(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)(x_1 - x_2)^2 + 2(a_2^+ - a_2^-)(x_1 - x_2) + (a_1^+ - a_1^-) - 12a_3^+ x_2^2; \quad (9.3)$$

$$2x_2 D_-(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)(x_1 + x_2)^2 + 2(a_2^+ - a_2^-)(x_1 + x_2) + (a_1^+ - a_1^-) + 12a_3^- x_2^2; \quad (9.4)$$

Мы видим, что  $D_+(u, \varepsilon) \geq 0$  и  $D_-(u, \varepsilon) \geq 0$  при всех  $u$ , если  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , а следовательно, у нас имеется простая правая фолиация  $\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(-\infty, +\infty)$ . Для  $\varepsilon = \varepsilon_0^+$  и

$$u_0^+ = \varepsilon_0^+ - \frac{a_2^+ - a_2^-}{3(a_3^+ - a_3^-)} \quad (9.5)$$

выполнены условия (8.3). Более того, корень  $\varepsilon_0^+$  является простым, то есть выполняются также все условия (8.4)–(8.7). Это станет очевидным, если условие (9.3) мы перепишем в виде:

$$2x_2 D_+(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)((x_1 - u_0^+) - (x_2 - \varepsilon_0^+))^2 - 12a_3^+(x_2^2 - (\varepsilon_0^+)^2). \quad (9.6)$$

Таким образом, из теоремы 8.1 мы знаем, что около точки  $(u_0^+ + \varepsilon_0^+, \varepsilon_0^+)$  начинает расти малый карман. И вопрос заключается в том, что произойдёт, если значение параметра  $\varepsilon$  будет не слишком близким к  $\varepsilon_0^+$ . Мы увидим, что ситуация зависит от знака коэффициента  $a_3^-$ .

Сперва мы рассмотрим случай  $a_3^- \geq 0$ . Если  $\varepsilon \leq \varepsilon_0^+$ , то у нас простая правая фолиация:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(-\infty, +\infty), \quad (9.7)$$

поскольку для таких  $\varepsilon$  выполнены неравенства  $D_+ \geq 0$  и  $D_- \geq 0$  на верхней границе (на самом деле — во всей полосе), и можно применить предложение 2.2 ([1]). Мы намереваемся показать, что при всех  $\varepsilon$ , больших чем  $\varepsilon_0^+$ , фолиация описывается разложением

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(-\infty, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{W}^+}(v_+, u_+^r) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(u_+^r, +\infty), \quad (9.8)$$

то есть ёлка продолжается от точки  $(v_+ + \varepsilon, \varepsilon)$  до точки  $(u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)$ .

Из выражения (9.6) видно, что при  $\varepsilon > \varepsilon_0^+$  уравнение  $D_+(u, \varepsilon) = 0$  имеет ровно два корня  $u_+^l$  и  $u_+^r$ :

$$u_+^{l,r} = u_0^+ + (\varepsilon - \varepsilon_0^+) \pm 2\sqrt{\frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-}(\varepsilon^2 - (\varepsilon_0^+)^2)}. \quad (9.9)$$



А из выражения (9.4) ясно, что  $D_-(u, \varepsilon) > 0$  при всех  $u$  и  $\varepsilon$ . Следовательно, чтобы построить фолиацию, представленную формулой (9.8), нам нужно найти интегральную кривую поля (5.3), соединяющую точки  $(v_+, \varepsilon)$  и  $(u_+^r, \varepsilon)$ .

Матрица Якоби в точках  $U_+^r$  и  $U_+^l$  была частично исследована после доказательства леммы 8.5, где матрица, пропорциональная матрице Якоби, была записана в виде (см. (8.16)):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 - 3s \\ -1 & s - 1 \end{pmatrix}, \quad (9.10)$$

где  $s = 1 + \varepsilon\kappa_+$ , а  $\kappa_+$  задаётся равенством (8.15). В рассматриваемом примере у нас

$$\kappa_+^l = -\kappa_+^r \quad \text{и} \quad \kappa_+^r = \sqrt{\frac{a_3^+}{(a_3^+ - a_3^-)(\varepsilon^2 - (\varepsilon_0^+)^2)}}. \quad (9.11)$$

Характеристический многочлен матрицы (9.10) равен  $\lambda^2 - s\lambda - 2s$ , и собственные числа равны

$$\lambda = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 8s}}{2}. \quad (9.12)$$

Соответствующие собственные векторы имеют вид

$$\begin{pmatrix} s - 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

Точка  $U_+^r$  всегда является седловой, и картина интегральных кривых в её окрестности выглядит так, как показано на рис. 22. Интересующая нас интегральная кривая  $\ell_\varepsilon$  начинается в точке  $U_+^r$  и идёт вдоль собственного вектора, соответствующего значению  $\lambda = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 + 8s})$ , то есть её наклон в точке  $U_+^r$  равен

$$\frac{1}{s - 1 - \lambda} = \frac{2}{s - 2 + \sqrt{s^2 + 8s}}.$$

Когда  $\varepsilon$  возрастает от  $\varepsilon_0^+$  до  $+\infty$ , параметр  $s$  убывает от  $+\infty$  до некоторого значения, большего единицы, и, следовательно, упомянутый наклон возрастает от нуля до некоторого значения, меньшего единицы.

Как было уже упомянуто, тип стационарной точки  $U_+^l$  зависит от  $\varepsilon$ . Мы знаем, что при  $\varepsilon$ , достаточно близких к  $\varepsilon_0^+$  (когда  $s < -8$ ), матрица Якоби в точке  $U_+^l$  имеет два отрицательных собственных значения,

то есть точка  $U_+^l$  является узлом, и картина интегральных кривых в окрестности этой точки выглядит так, как показано на рис. 23. В этой ситуации интересующая нас интегральная кривая пересекает границу ровно в точке  $U_+^l$ . Такая ситуация имеет место при всех  $\varepsilon$ , если  $80a_3^+ \leq 81a_3^-$ . Действительно, в этом случае  $81(a_3^+ - a_3^-) \leq a_3^+$ , и поэтому

$$s = 1 + \varepsilon \kappa_+^l = 1 - \sqrt{\frac{a_3^+ \varepsilon^2}{(a_3^+ - a_3^-)(\varepsilon^2 - (\varepsilon_0^+)^2)}} \leq 1 - \sqrt{\frac{81\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - (\varepsilon_0^+)^2}} < 1 - 9 = -8.$$

Если  $81(a_3^+ - a_3^-) > a_3^+$ , то при

$$\varepsilon < \varepsilon_1^+ \stackrel{\text{def}}{=} 9\varepsilon_0^+ \sqrt{\frac{a_3^+ - a_3^-}{80a_3^+ - 81a_3^-}} \quad (9.14)$$

у нас  $s < -8$ , точка  $U_+^l$  является узлом, и наша интегральная кривая  $\ell_\varepsilon$  пересекает верхнюю границу в точке  $U_+^l$ . При  $\varepsilon = \varepsilon_1^+$  собственные значения матрицы Якоби совпадают, и  $J(U_+^l)$  является клеткой Жордана, то есть  $U_+^l$  — несобственный узел, и наша интегральная кривая всё ещё проходит через точку  $U_+^l$ . Картина интегральных кривых подобна той, что изображена на рис. 23. Острый угол между интегральными кривыми, идущими вдоль собственных векторов матрицы Якоби (более жирные кривые на рис. 23), сужается, когда  $\varepsilon \nearrow \varepsilon_1^+$ , и при  $\varepsilon = \varepsilon_1^+$  эти две кривые сливаются в одну.

Картина меняется при  $\varepsilon > \varepsilon_1^+$ , когда  $s \in (-8, 0)$ , и  $U_+^l$  — спиральная точка (фокус). Тогда наша интегральная кривая не может пересекать верхнюю границу не только на промежутке  $(u_+^l, u_+^r)$ , но также и в точке  $U_+^l$ , то есть при  $\varepsilon > \varepsilon_1^+$  справедливо неравенство  $v_+ < u_+^l$ . В результате мы получили то, что хотели: при  $a_3^- \geq 0$  мы нашли интегральную кривую нашего поля, которая соединяет две точки на верхней границе, первые координаты которых равны  $v_+$  ( $v_+ \leq u_+^l$ ) и  $u_+^r$ , то есть можно построить фолиацию (9.8). Действительно, условие  $D_+ > 0$  выполнено на  $\ell_\varepsilon$ , поскольку кривая  $\ell_\varepsilon$  проходит строго ниже кривой  $X_1$ , на которой  $D_+ = 0$ , и  $D_+ > 0$  на всей верхней границе за исключением промежутка  $[u_+^l, u_+^r]$ . Неравенство  $D_- > 0$  верно всюду в полосе  $\Omega_\varepsilon$ .

Скажем несколько слов о поведении концов нашего кармана. В первых, следует отметить, что значение  $v_+$  всегда существует. Действительно, кривая  $\ell_\varepsilon$  может рассматриваться как график функции

аргумента  $x_1$  (см. предложение 8.8), и она не может пересекать середину полосы. Поэтому достаточно убедиться в том, что вторая координата точки на кривой не может быть ограничена, когда  $x_1 \rightarrow -\infty$ . Но это справедливо для любой интегральной кривой, поскольку при фиксированном  $x_2$  и больших по модулю отрицательных значениях  $x_1$  обе функции, и  $D_+$ , и  $D_-$  ведут себя как  $3(a_3^+ - a_3^-)x_1^2/2x_2$ , а значит, наклон интегральной кривой стремится к  $-x_2/\varepsilon$ , то есть интегральные кривые имеют отрицательный наклон и выпуклы и, следовательно, при движении по ним влево мы обязательно пересечём верхнюю границу полосы.

Во-вторых, из формулы (9.9) мы делаем вывод, что правый конец кармана задаётся выражением

$$u_+^r + \varepsilon = 2\varepsilon \left( 1 + \sqrt{\frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-}} \right) + u_0^+ - \varepsilon_0^+ + o(1),$$

которое всегда стремится к  $+\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Левая граница кармана  $v_+ + \varepsilon$  стремится к  $-\infty$ , если  $a_3^- > 0$ , поскольку

$$u_+^l + \varepsilon = 2\varepsilon \left( 1 - \sqrt{\frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-}} \right) + u_0^+ - \varepsilon_0^+ + o(1).$$

Если  $a_3^- = 0$ , то мы ничего не можем сказать об асимптотическом поведении левого конца, так как величина  $u_+^l + \varepsilon$  в этом случае ограничена, а никакой информации о значении  $v_+$  при больших  $\varepsilon$ , кроме неравенства  $v_+ < u_+^l$ , у нас нет.

#### §10. ПРИМЕРЫ. МНОГОЧЛЕНЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ: СЛУЧАЙ ДВУХ МАЛЫХ КАРМАНОВ

Теперь мы обратимся к более сложному случаю  $a_3^- < 0$ . Напомним, что мы предполагаем выполненным условие  $a_3^+ \geq |a_3^-|$ , то есть нам надо рассмотреть значения  $a_3^- \in [-a_3^+, 0)$ . В этой ситуации у нас есть ещё одно критическое значение параметра  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_0^- = \sqrt{\frac{1}{12|a_3^-|} \left[ a_1^+ - a_1^- - \frac{(a_2^+ - a_2^-)^2}{3(a_3^+ - a_3^-)} \right]} = \sqrt{\frac{a_3^+}{|a_3^-|}} \varepsilon_0^+. \quad (10.1)$$

Это то значение  $\varepsilon$ , при котором на границе полосы появляется корень функции  $D_-$ :

$$D_-(u_0^-, \varepsilon_0^-) = 0,$$

а именно,

$$u_0^- = -\varepsilon_0^- - \frac{a_2^+ - a_2^-}{3(a_3^+ - a_3^-)}. \quad (10.2)$$

Если  $\varepsilon \leq \varepsilon_0^+$ , то у нас как и раньше простая правая фолиация:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(-\infty, +\infty). \quad (10.3)$$

В момент  $\varepsilon = \varepsilon_0^+$  на верхней границе появляется малый карман и фолиация приобретает вид

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(-\infty, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{E}^+}(v_+, u_+^r) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(u_+^r, +\infty), \quad (10.4)$$

где  $v_+ = u_+^l$  при  $\varepsilon_0^+ \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1^+$  (см. (9.14)). При  $\varepsilon > \varepsilon_1^+$  можно только утверждать, что  $v_+ < u_+^l$ . Чтобы сосчитать значение величины  $v_+(\varepsilon)$ , нам нужно решить задачу Коши (5.3) с начальными условиями  $x_1(0) = u_+^r$  и  $x_2(0) = \varepsilon$ . Поскольку  $(u_+^r, \varepsilon)$  является седловой точкой поля, нам нужно задать ещё и начальный наклон интегральной кривой. Это должен быть наклон одного из собственных векторов матрицы Якоби. Как уже говорилось, нас интересует собственный вектор (8.18) с положительным наклоном, то есть с  $\lambda = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 + 8s})$  и  $s = 1 + \varepsilon\kappa_+^r$ . Значением величины  $v_+(\varepsilon)$  будет первая координата следующей точки пересечения этой интегральной кривой с границей  $x_2 = \varepsilon$ .

Если

$$v_+(\varepsilon_0^-) > u_0^-, \quad (10.5)$$

то в момент  $\varepsilon = \varepsilon_0^-$  на нижней границе возникает малый карман. Мы можем гарантировать выполнение неравенства (10.5) только в том случае, когда нам известно явное выражение для  $v_+$ , что бывает, если  $80(a_3^+)^2 \leq 81(a_3^-)^2$ . Действительно, в этом случае

$$\frac{a_3^+}{|a_3^-|} \leq \frac{81(a_3^+ + |a_3^-|)}{80a_3^+ + 81|a_3^-|},$$

или

$$\varepsilon_0^+ \sqrt{\frac{a_3^+}{|a_3^-|}} \leq 9\varepsilon_0^+ \sqrt{\frac{a_3^+ - a_3^-}{80a_3^+ - 81a_3^-}},$$

где выражение в левой части неравенства — это  $\varepsilon_0^-$  (см. (10.1)), в то время как выражение в правой части — это  $\varepsilon_1^+$  (см. (9.14)). Следовательно, при  $80(a_3^+)^2 \leq 81(a_3^-)^2$  выполняется равенство  $v_+(\varepsilon_0^-) =$

$u_+^l(\varepsilon_0^-)$ . Более того, всегда верно неравенство  $u_+^l(\varepsilon_0^-) > u_0^-$ . Действительно, согласно формуле (9.9)

$$u_+^l(\varepsilon_0^-) = u_0^+ + (\varepsilon_0^- - \varepsilon_0^+) - 2\sqrt{\frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-}((\varepsilon_0^-)^2 - (\varepsilon_0^+)^2)}.$$

Если мы подставим сюда выражение (9.5) для  $u_0^+$ , выражение (10.1) для  $\varepsilon_0^-$ , и используем выражение (10.2) для  $u_0^-$ , мы получим

$$u_+^l(\varepsilon_0^-) - u_0^- = 2\varepsilon_0^+ \sqrt{\frac{a_3^+}{|a_3^-|}} \left( 1 - \sqrt{\frac{a_3^+ - |a_3^-|}{a_3^+ + |a_3^-|}} \right) > 0.$$

В общем случае неравенство (10.5) может не выполняться. Фолиацию, которая возникает в этом случае, мы рассмотрим чуть позже, а пока будем предполагать условие (10.5) выполненным. Тогда при  $\varepsilon \in (\varepsilon_0^+, \varepsilon_0^-]$  у нас будет фолиация (10.4), поскольку при  $\varepsilon = \varepsilon_0^-$  малый карман появляется на нижней границе.

При  $\varepsilon > \varepsilon_0^-$  у нас есть два корня  $u_-^{l,r}$  уравнения  $D_-(u, \varepsilon) = 0$ . Если переписать тождество (9.4) в виде

$$2x_2 D_-(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)((x_1 - u_0^-) + (x_2 + \varepsilon_0^-))^2 + 12a_3^-(x_2^2 - (\varepsilon_0^-)^2),$$

то сразу становится ясно, что

$$u_-^{l,r} = u_0^- - \varepsilon + \varepsilon_0^- \pm 2\sqrt{\frac{|a_3^-|}{a_3^+ - a_3^-}(\varepsilon^2 - (\varepsilon_0^-)^2)}. \quad (10.6)$$

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 8.2: в точке  $(u_0^- - \varepsilon_0^-, -\varepsilon_0^-)$  на нижней границе начинает расти малый карман. Этот новый карман является правой ёлкой, следовательно, нам надо исследовать поле (8.22). Напомним, что стволом правой ёлки будет сдвинутая влево на  $\varepsilon$  интегральная кривая этого поля.

Матрица Якоби (сравните с формулой (5.5) в работе [1]) этого поля имеет вид

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) \\ J_{21}(x) & J_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} J_{11}(x) &= \varepsilon(f_-'' - f_+''') - x_2(\varepsilon - x_2)f_-'' - x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\ J_{12}(x) &= 2x_2(f_-'' - f_+''') - x_2(\varepsilon - x_2)f_-'' + x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\ J_{21}(x) &= x_2(f_-'' - f_+''') + x_2(\varepsilon - x_2)f_-'' - x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\ J_{22}(x) &= (f_-' - f_+') + (\varepsilon - x_2)(f_-'' + x_2f_-''') - (\varepsilon + x_2)(f_+'' - x_2f_+'''). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Если  $\varepsilon > \varepsilon_0^-$ , у нас есть две стационарные точки на нижней границе:  $U_-^{l,r} = (u_-^{l,r}, -\varepsilon)$ . В этих точках

$$J(U_-) = \varepsilon(f_-'' - f_+'' + 2\varepsilon f_-''') \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3s \\ -1 & s - 1 \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

где  $s = 1 + \varepsilon\kappa_-$  и

$$\kappa_- = \kappa_-^R = \frac{2f_-'''(u_- - \varepsilon)}{f_+''(u_- + \varepsilon) - f_-''(u_- - \varepsilon) - 2\varepsilon f_-'''(u_- - \varepsilon)}. \quad (10.9)$$

В рассматриваемом примере

$$\kappa_-^l = -\kappa_-^r \quad \text{и} \quad \kappa_-^l = \sqrt{\frac{|a_3^-|}{(a_3^+ - a_3^-)(\varepsilon^2 - (\varepsilon_0^-)^2)}}. \quad (10.10)$$

В случае рассмотренного кармана на верхней границе интегральная кривая начинается в точке  $U_+^r$ . Мы называли её  $\ell_\varepsilon$ , но теперь будем добавлять индекс +, чтобы отличать  $\ell_\varepsilon^+$  от аналогичной интегральной кривой  $\ell_\varepsilon^-$ , начинающейся в точке  $U_-^l$ . Точка  $U_-^l$  всегда является седловой, и кривая  $\ell_\varepsilon^-$  идёт в ней вдоль собственного вектора матрицы Якоби (10.7). Этот вектор имеет вид (9.13) с  $\lambda = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 + 8s})$ . Следовательно, когда  $\varepsilon$  возрастает от  $\varepsilon_0^-$  до бесконечности, параметр  $s$  убывает от  $+\infty$  до некоторого значения, большего 1, а наклон кривой  $\ell_\varepsilon^-$  в точке  $U_-^l$ , который равен

$$\frac{1}{s - 1 - \lambda} = \frac{2}{s - 2 + \sqrt{s^2 + 8s}},$$

возрастает от 0 до некоторой величины, меньшей 1. Кривая  $\ell_\varepsilon^+$  после сдвига на  $\varepsilon$  вправо была стволом левой ёлки и породила карман на верхней границе. Аналогично, кривая  $\ell_\varepsilon^-$  после сдвига на  $\varepsilon$  влево будет стволом правой ёлки и будет порождать карман на нижней границе.

Характер второй стационарной точки  $U_-^r$  зависит от  $\varepsilon$ . Мы знаем, что при  $\varepsilon$ , достаточно близких к  $\varepsilon_0^-$  (когда  $s < -8$ ), у матрицы Якоби два отрицательных собственных значения. Это случается, если

$$\varepsilon_0^- < \varepsilon < \varepsilon_1^- \stackrel{\text{def}}{=} 9\varepsilon_0^- \sqrt{\frac{a_3^+ - a_3^-}{81a_3^+ - 80a_3^-}}. \quad (10.11)$$

Для таких  $\varepsilon$  у нас  $s < -8$ , точка  $U_-^r$  является узлом, и кривая  $\ell_\varepsilon^-$  пересекает нижнюю границу в точке  $U_-^r$ . При  $\varepsilon = \varepsilon_1^-$  собственные значения матрицы Якоби одинаковы и  $J(U_-^r)$  представляет собой клетку

Жордана, то есть  $U_-^r$  является несобственным узлом, а кривая  $\ell_\varepsilon^-$  всё ещё проходит через точку  $U_-^r$ . Картина меняется для  $\varepsilon > \varepsilon_1^-$ , когда  $s \in (-8, 0)$  и  $U_-^r$  является спиральной точкой (фокусом). Тогда наша интегральная кривая не может пересекать нижнюю границу не только на интервале  $(u_-^l, u_-^r)$ , но также и в точке  $U_-^r$ , то есть при  $\varepsilon > \varepsilon_1$  у нас есть некоторая точка  $(v_-, -\varepsilon)$  с  $v_- = v_-(\varepsilon) > u_-^r$ , где наша интегральная кривая пересекает нижнюю границу второй раз. Таким образом, у нас есть две интегральных кривых: интегральная кривая  $\ell_\varepsilon^+$  поля (5.3), которая соединяет две точки на верхней границе с первыми координатами  $v_+$  ( $v_+ \leq u_+^l$ ) и  $u_+^r$ , и вторая интегральная кривая  $\ell_\varepsilon^-$  поля (8.22), которая соединяет две точки на нижней границе с первыми координатами  $u_-^l$  и  $v_-$  ( $v_- \geq u_-^r$ ).

Напомним, что мы сейчас предполагаем, что в момент возникновения кармана на нижней границе левый конец кармана на верхней границе не ушёл слишком далеко влево, а именно, выполнено неравенство (10.5). Тогда в момент  $\varepsilon_0^-$  возникает карман на нижней границе с концами  $u_-^l - \varepsilon$  и  $v_- - \varepsilon$ . Мы знаем, что с ростом  $\varepsilon$  кривая  $\ell_\varepsilon^+$  опускается, и значение  $v_+$  убывает. Аналогично кривая  $\ell_\varepsilon^-$  поднимается, и  $v_-$  возрастает. Поэтому наступит момент, который мы назовём  $\varepsilon_2$ , когда  $v_- = v_+$ . Тогда при  $\varepsilon \in (\varepsilon_0^-, \varepsilon_2]$  мы имеем фолиацию

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(-\infty, u_-^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{E}^-}(u_-^l, v_-) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(v_-, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{W}^+}(v_+, u_+^r) \cup \Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(u_+^r, +\infty). \quad (10.12)$$

В момент  $\varepsilon = \varepsilon_2$  разделяющая карманы область с простой правой фолиацией  $\Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(v_-, v_+)$  схлопывается в одну линию, и для описания того, что происходит дальше, нам потребуется новый элемент в нашей коллекции элементарных фолиаций, который мы опишем в следующем разделе.

## §11. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Нам потребуется новое обозначение для областей, заметаемых ёлками. Поскольку раньше все ёлки начинались и заканчивались на границе, соответствующую область было удобно измерять тем отрезком, который ёлка вырезала из средней линии полосы. Теперь нам потребуются ёлки, ствол которых соединяет произвольные две точки из полосы  $\Omega_\varepsilon$ . Если ствол идёт из точки  $A$  в точку  $C$ , то соответствующую

область мы будем обозначать символом  $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(A, C)^1$ . По аналогии с комплексными числами будем обозначать символом  $\bar{x}$  точку  $(x_1, -x_2)$ , а также  $x + a \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + a, x_2)$ .

Используя эти обозначения, сформулируем основное утверждение этого раздела, которое показывает, как могут сопрягаться две разнонаправленные ёлки в общей фолляции.

**Предложение 11.1.** *Пусть существует такая точка  $C = (C_1, C_2) \in \Omega_\varepsilon$ , что можно построить левую ёлку  $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(C + \varepsilon, C^r)$  и правую ёлку  $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(\bar{C} - \varepsilon, C^l)$ . Тогда, если в прямоугольнике между ними с вершинами в точках  $(C_1 + C_2, \varepsilon)$ ,  $C + \varepsilon$ ,  $(C_1 - C_2, -\varepsilon)$  и  $\bar{C} - \varepsilon$  задать билинейную функцию, которая однозначно определяется своими граничными значениями, мы получим диагонально вогнутую  $C^1$ -гладкую функцию.*

**Доказательство.** Билинейная функция в общем случае имеет вид

$$a(x_1^2 - x_2^2) + bx_1 + cx_2 + d. \quad (11.1)$$

Коэффициенты мы найдём, зная значения функции в четырёх вершинах:

$$\begin{aligned} f_+(C_1 + C_2) &= B(C_1 + C_2, \varepsilon) = a(C_1 + C_2)^2 - a\varepsilon^2 + b(C_1 + C_2) + c\varepsilon + d; \\ A^l(C_1 + \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} B(C_1 + \varepsilon, C_2) = a(C_1 + \varepsilon)^2 - aC_2^2 + b(C_1 + \varepsilon) + cC_2 + d; \\ f_-(C_1 - C_2) &= B(C_1 - C_2, -\varepsilon) = a(C_1 - C_2)^2 - a\varepsilon^2 + b(C_1 - C_2) - c\varepsilon + d; \\ A^r(C_1 - \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} B(C_1 - \varepsilon, -C_2) = a(C_1 - \varepsilon)^2 - aC_2^2 + b(C_1 - \varepsilon) - cC_2 + d. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Решая эту систему линейных уравнений, мы получим

<sup>1</sup>Буквы HB взяты из слова HerringBone, что является английским переводом нашего термина “ёлка”.



$$\begin{aligned}
 a &= \frac{A^r + A^l - f_+ - f_-}{4(\varepsilon^2 - C_2^2)}; \\
 b &= \frac{(C_1 - C_2)f_+ + (C_1 + C_2)f_- - (C_1 - \varepsilon)A^l - (C_1 + \varepsilon)A^r}{2(\varepsilon^2 - C_2^2)}; \\
 c &= \frac{\varepsilon(f_+ - f_-) + C_2(A^r - A^l)}{2(\varepsilon^2 - C_2^2)}; \\
 d &= \frac{[\varepsilon^2 - (C_1 - C_2)^2]f_+ + [\varepsilon^2 - (C_1 + C_2)^2]f_-}{4(\varepsilon^2 - C_2^2)} + \\
 &\quad + \frac{[(C_1 - \varepsilon)^2 - C_2^2]A^l + [(C_1 + \varepsilon)^2 - C_2^2]A^r}{4(\varepsilon^2 - C_2^2)}.
 \end{aligned} \tag{11.3}$$

Формулы примут чуть более простой вид, если мы выразим величины  $A^l$  и  $A^r$  через граничные значения  $f_+$  и  $f_-$ , воспользовавшись формулой (4.16) для  $A = A^l$  и формулой (4.44) для  $A = A^r$ :

$$\begin{aligned}
 A^l &= A(C_1 + \varepsilon, C_2) \\
 &= \frac{\varepsilon^2 - C_2^2}{2\varepsilon C_2} \left[ (\varepsilon + C_2)f'_+ - (\varepsilon - C_2)f'_- \right] + \frac{(\varepsilon + C_2)f_+ + (\varepsilon - C_2)f_-}{2\varepsilon}; \\
 A^r &= A(C_1 - \varepsilon, -C_2) \\
 &= \frac{\varepsilon^2 - C_2^2}{-2\varepsilon C_2} \left[ (\varepsilon + C_2)f'_- - (\varepsilon - C_2)f'_+ \right] + \frac{(\varepsilon - C_2)f_+ + (\varepsilon + C_2)f_-}{2\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Напомним, что значения функций  $f_+$  и  $f_-$  вычисляются в точках, соответствующих вершинам прямоугольника, лежащим на границе:  $f_+ = f_+(C_1 + C_2)$  и  $f_- = f_-(C_1 - C_2)$ . В результате алгебраических преобразований получаем:

$$a = \frac{f'_+ - f'_-}{4C_2}; \tag{11.4}$$

$$b = \frac{(C_1 + C_2)f'_- - (C_1 - C_2)f'_+}{2C_2}; \tag{11.5}$$

$$c = \frac{f_+ - f_- - C_2(f'_+ + f'_-)}{2\varepsilon}; \tag{11.6}$$

$$d = \frac{f_+ + f_-}{2} + \frac{(C_1^2 + \varepsilon^2 - C_2^2 - 2C_1C_2)f'_+ - (C_1^2 + \varepsilon^2 - C_2^2 + 2C_1C_2)f'_-}{4C_2}. \tag{11.7}$$

В силу симметрии нам достаточно проверить непрерывность градиента на какой-нибудь одной из сторон прямоугольника. Более того, поскольку производная вдоль стороны прямоугольника непрерывна, нам достаточно проверить непрерывность производной вдоль какого-нибудь направления, трансверсального этой стороне. Мы будем проверять непрерывность производной  $B_{x_1}$  на стороне, соединяющей точки  $(C_1 + C_2, \varepsilon)$  и  $C + \varepsilon$ .

Производную на ёлке нам даёт формула (4.14). Нам нужна верхняя половина этой формулы, которая задаёт линейную функцию:

$$B_{x_1}(x) = (\varepsilon - x_2)N_+(u) + f'_+.$$

Производная в прямоугольнике

$$B_{x_1}(x) = 2ax_1 + b$$

тоже является линейной функцией, поэтому для их совпадения нам достаточно проверить, что они совпадают в концах отрезка:

$$2a(C_1 + C_2) + b = f'_+ \quad \text{в точке } x = (C_1 + C_2, \varepsilon) \quad (11.8)$$

и

$$2a(C_1 + \varepsilon) + b = (\varepsilon - C_2)N_+ + f'_+ \quad \text{в точке } x = (C_1 + \varepsilon, C_2). \quad (11.9)$$

Первое равенство немедленно вытекает из (11.4) и (11.5). Чтобы проверить второе равенство, мы должны вспомнить определение функции  $N_+$  (см. формулы (4.11) и (4.5)), которое применим в точке  $(u, T) = (C_1 + \varepsilon, C_2)$ :

$$N_+ = \frac{\frac{1}{2}R - f'_+}{\varepsilon - C_2}, \quad (11.10)$$

где

$$R = R_+ + R_-, \quad R_- = \frac{A^l - f_-}{\varepsilon + C_2}, \quad R_+ = \frac{A^l - f_+}{\varepsilon - C_2}. \quad (11.11)$$

Таким образом, равенство (11.9) можно переписать в виде

$$R = 4a(C_1 + \varepsilon) + 2b, \quad (11.12)$$

которое легче проверять, не пользуясь явным видом коэффициентов  $a$  и  $b$ , а непосредственно из уравнений (11.2):

$$R_- = \frac{A^l - f_-}{\varepsilon + C_2} = 2a(C_1 + \varepsilon - C_2) + b + c;$$

$$R_+ = \frac{A^l - f_+}{\varepsilon - C_2} = 2a(C_1 + \varepsilon + C_2) + b - c,$$

откуда немедленно вытекает равенство (11.12).  $\square$

Построенную в данном предложении фолиацию будем обозначать символом  $\Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C)$ .

## §12. ПРИМЕРЫ. МНОГОЧЛЕНЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ: СЛУЧАЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ДВУМЯ ЁЛКАМИ

Вспомним, что мы следили за интегральными кривыми  $\ell_\varepsilon^+$  и  $\ell_\varepsilon^-$ , которые нам давали стволы ёлок: первая после сдвига на  $\varepsilon$  вправо давала левую ёлку, а вторая после сдвига на  $\varepsilon$  влево давала правую ёлку. Нам будет удобнее вместо кривой  $\ell_\varepsilon^-$  следить за отражённой относительно оси  $x_1$  кривой  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$ . Как ведут себя эти интегральные кривые за пределами полосы  $\Omega_\varepsilon$ , нас не интересует, а внутри полосы они были дизъюнкты при  $\varepsilon < \varepsilon_2$ . В момент  $\varepsilon = \varepsilon_2$  кривые  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  и  $\ell_\varepsilon^+$  пересеклись в точке верхней границы. Обозначим точку их пересечения буквой  $C = C(\varepsilon)$ , тогда  $C_1(\varepsilon_2) = v_+(\varepsilon_2) = v_-(\varepsilon_2)$ ,  $C_2(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ . Обе линии (и  $\ell_\varepsilon^+$ , и  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$ ) опускаются с ростом  $\varepsilon$ , поэтому точка их пересечения  $C$  опускается тоже, то есть функция  $C_2(\varepsilon)$  строго монотонно убывает. Следовательно, при всех  $\varepsilon, \varepsilon > \varepsilon_2$ , как кусок кривой  $\ell_\varepsilon^+$  между точками  $C$  и  $U_+^r$ , так и кусок кривой  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  между точками  $\bar{U}_-^l$  и  $C$ , расположены в области, где и  $D_+ > 0$  и  $D_- > 0$ . Поэтому левая ёлка, построенная по  $\ell_\varepsilon^+$ , и правая ёлка, построенная по  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$ , порождают диагонально вогнутые функции. (Напомним, что  $D_\pm^R(u) = D_\pm(u + \varepsilon, -T_R(u))$ , поэтому условие диагональной вогнутости соответствующей функции ( $D_\pm^R \geq 0$ ) переписывается как условие  $D_\pm \geq 0$  на кривой  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$ .)

Итак, построенная точка  $C$  удовлетворяет предложению 11.1, поэтому мы можем построить фолиацию

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_-^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(\bar{C} - \varepsilon, U_-^l - \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C) \cup \\ \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(C + \varepsilon, U_+^r + \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+^r, +\infty), \end{aligned} \quad (12.1)$$

которая порождает искомую минимальную диагонально вогнутую функцию при всех  $\varepsilon, \varepsilon \geq \varepsilon_2$ .

Вспомним, что до сих пор мы рассуждали, предполагая выполненным неравенство (10.5). Теперь мы рассмотрим ситуацию, когда это неравенство не выполнено. В этом случае фолиация (10.4) сохраняется вплоть до момента  $\varepsilon_2$ , который теперь будет определяться равенством  $v_+(\varepsilon_2) = u_-^l(\varepsilon_2)$ . После чего возникнет такая же фолиация,

какая после момента  $\varepsilon_2$  возникает в случае выполнения условия (10.5): две разнонаправленные ёлки, разделённые прямоугольником.

Поясним это более подробно. Будем следить за кривой  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  и убедимся, что она расположена строго над  $\ell_\varepsilon^+$  при  $\varepsilon < \varepsilon_2$ . Кривая  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$ , как мы знаем, возникает на верхней границе в момент  $\varepsilon = \varepsilon_0^-$  в виде точки  $(u_0^-, \varepsilon_0^-)$ . Напомним, что теперь мы рассматриваем ситуацию, когда неравенство (10.5) не выполнено. В пограничном случае  $v_+(\varepsilon_0^-) = u_0^-$  мы полагаем  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0^-$ , а если  $v_+(\varepsilon_0^-) < u_0^-$ , то точка  $(u_0^-, \varepsilon_0^-)$  лежит строго над кривой  $\ell_\varepsilon^+$ , так как правый конец  $U_+^r$  кривой  $\ell_\varepsilon^+$  всегда лежит правее этой точки (ср. формулы (9.5) и (10.2)).

Итак, пусть  $\varepsilon_2$  — наименьшее значение  $\varepsilon$ , при котором кривые  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  и  $\ell_\varepsilon^+$  имеют общую точку в полосе  $\Omega_\varepsilon$ . Покажем, что эта точка лежит на границе полосы. Сперва допустим, что данная точка лежит строго внутри полосы. Тогда это — точка касания кривых  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  и  $\ell_\varepsilon^+$ . Приравняем выражения для тангенсов углов между касательными к кривым  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  и  $\ell_\varepsilon^+$  с осью  $x_1$  (см. формулы (8.22) и (5.2)):

$$-\frac{(\varepsilon - x_2)D_+ - (\varepsilon + x_2)D_-}{(\varepsilon - x_2)D_+ + (\varepsilon + x_2)D_-} = \frac{(\varepsilon - x_2)D_- - (\varepsilon + x_2)D_+}{(\varepsilon - x_2)D_- + (\varepsilon + x_2)D_+},$$

что сводится к равенству  $x_2 D_+ D_- = 0$  и выполняться не может, поскольку наши кривые проходят в верхней половине полосы ( $x_2 > 0$ ) и рассматриваются в той области, где  $D_+ > 0$  и  $D_- > 0$ .

Итак, кривые  $\bar{\ell}_{\varepsilon_2}^-$  и  $\ell_{\varepsilon_2}^+$  могут пересекаться только в точках верхней границы  $x_2 = \varepsilon_2$ . Это не могут быть правые концы кривых, то есть это не точка  $U_+^r$ . Действительно, наклон кривой  $\bar{\ell}_{\varepsilon_2}^-$  в этой точке равен 1, в то время как наклон кривой  $\ell_{\varepsilon_2}^+$  строго меньше 1, то есть вблизи точки  $U_+^r$  кривая  $\bar{\ell}_{\varepsilon_2}^-$  должна идти под кривой  $\ell_{\varepsilon_2}^+$ , что невозможно, поскольку по определению значения  $\varepsilon_2$  при всех  $\varepsilon < \varepsilon_2$  кривая  $\bar{\ell}_{\varepsilon_2}^-$  располагалась строго над кривой  $\ell_{\varepsilon_2}^+$ . Следовательно, эти кривые должны пересекаться в точке  $\bar{U}_-^l = (v_+(\varepsilon_2), \varepsilon_2)$ . Таким образом, как и было заявлено, значение параметра  $\varepsilon_2$  является решением уравнения  $v_+(\varepsilon) = u_-^l(\varepsilon)$ . Очевидно, что решение этого уравнения единственно (если оно существует), поскольку, как уже отмечалось, кривые  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  и  $\ell_\varepsilon^+$  опускаются с ростом  $\varepsilon$ , то есть вторая координата их точки пересечения  $C = C(\varepsilon)$  строго монотонно убывает. Если уравнение  $v_+(\varepsilon) = u_-^l(\varepsilon)$  не имеет решения, то формально можно считать  $\varepsilon_2 = \infty$ , и в этом случае фолляция (10.4) имеет место при всех  $\varepsilon, \varepsilon > \varepsilon_0^+$ .

Построенная в разделе 11 фолиация  $\Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C)$  позволяет нам сопрячь не только два кармана, но и два разнонаправленных пробоя, как в случае, описанном на рис. 15 в статье [1].

Напомним, что в случае положительного дискриминанта квадратного многочлена  $f'_+ - f'_-$  и разных знаков у старших коэффициентов  $a_3^\pm$  полиномов  $f_\pm$  (мы выбирали  $a_3^+ > 0$  и  $a_3^- < 0$ ) фолиация при малых  $\varepsilon$  описывается формулой

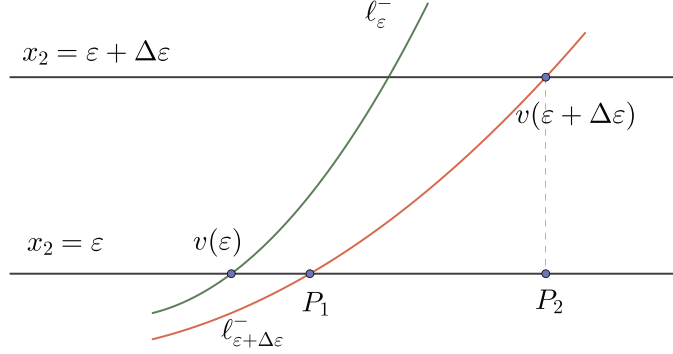
$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(-\infty, u_{-1}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(u_{-1}, v_{+1}) \cup \\ & \cup \Omega_\varepsilon^{\text{L}}(v_{+1}, v_{-2}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{NE}}(v_{-2}, u_{+2}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_{+2}, +\infty), \end{aligned} \quad (12.2)$$

Эта фолиация имеет место до тех пор, пока  $v_{+1} < v_{-2}$ . В момент  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , который определяется равенством  $v_{+1}(\varepsilon_2) = v_{-2}(\varepsilon_2)$ , область  $\Omega_\varepsilon^{\text{L}}(v_{+1}, v_{-2})$  схлопывается в одну левую экстремаль, после чего на этом месте возникает прямоугольник  $\Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C)$ . Точка  $C$  теперь поднимается с нижней границы и определяется она следующим образом. Пусть  $\ell_\varepsilon^+$  — интегральная кривая поля (5.3), которая стартует из точки  $(u_{+2}, \varepsilon)$  с положительным наклоном (то есть это та кривая, которая порождает пробой, расположенный справа), и пусть  $\ell_\varepsilon^-$  — интегральная кривая поля (8.22), которая стартует из точки  $(u_{1-}, -\varepsilon)$  с положительным наклоном (то есть это та кривая, которая порождает пробой, расположенный слева). Тогда точка  $C = C(\varepsilon)$  — это точка пересечения кривых  $\ell_\varepsilon^+$  и  $\ell_\varepsilon^-$ .

Таким образом нам надо только убедиться в том, что функции  $v_{+1}$  и  $v_{-2}$  не стремятся к конечному пределу. Мы знаем, что первая функция монотонно возрастает, а вторая — монотонно убывает. Более того производные этих функций по модулю не меньше единицы. Действительно, посмотрим на рис. 24: поскольку наклон любой интегральной кривой  $\ell_\varepsilon$  строго меньше единицы внутри полосы  $\Omega_\varepsilon$ , расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$  строго больше  $\Delta\varepsilon$ , и поэтому тем более  $v(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - v(\varepsilon) > \Delta\varepsilon$ , то есть  $v'(\varepsilon) \leq 1$ . Это рассуждение относится не только к случаю  $v = v_{+1}$ , для которого расположение кривых такое, как на рисунке, но и к симметричному случаю  $v = v_{-2}$ .

Итак, в момент  $\varepsilon = \varepsilon_2$  происходит перестройка фолиации, и при всех ббльших  $\varepsilon$  мы получаем фолиацию

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(-\infty, u_{1-}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(\bar{C} - \varepsilon, (u_{1-} - \varepsilon, -\varepsilon)) \cup \\ & \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(C + \varepsilon, (u_{2+} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_{2+}, +\infty), \end{aligned} \quad (12.3)$$

Рис. 24. Кривые  $l_\varepsilon^-$  и  $l_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}^-$ .

или в чуть других обозначениях

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(-\infty, u_-^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(\bar{C} - \varepsilon, U_-^l - \varepsilon) \cup \\ & \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(C + \varepsilon, U_+^r + \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_+^r, +\infty). \end{aligned} \quad (12.4)$$

Завершая этот раздел, опишем ещё один случай появления прямоугольника, соединяющего две разнонаправленные ёлки. Это ещё не упоминавшийся случай нулевого дискриминанта выражения  $f'_+ - f'_-$ . До сих пор мы предполагали, что это выражение не имеет кратных корней. Мы только что рассмотрели случай, когда у выражения  $f'_+ - f'_-$  два корня и при этом  $a_3^+ > 0$  и  $a_3^- < 0$ . Если мы будем сближать корни, сохраняя старшие коэффициенты полиномов, то значение критической ширины полосы  $\varepsilon_2$ , до которой имеет место фолиация (12.2), будет стремиться к нулю, и в предельном случае кратного корня никаких пробоев ни при каких  $\varepsilon$  не будет. Мы сейчас покажем, что в этом случае при всех  $\varepsilon$  имеет место фолиация (12.4).

Итак, мы рассматриваем случай, когда

$$(a_2^+ - a_2^-)^2 = 3(a_3^+ - a_3^-)(a_1^+ - a_1^-), \quad a_3^+ > 0 \quad \text{и} \quad a_3^- < 0.$$

Начнём с рассмотрения нулей функций  $D_+$  и  $D_-$ . В нашем случае формулы (9.3) и (9.4) можно записать следующим образом:

$$2x_2 D_+(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)(x_1 - u_0 - (1 + 2k_+)x_2)(x_1 - u_0 - (1 - 2k_+)x_2); \quad (12.5)$$

$$2x_2 D_-(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)(x_1 - u_0 + (1 + 2k_-)x_2)(x_1 - u_0 + (1 - 2k_-)x_2), \quad (12.6)$$

где

$$u_0 = -\frac{a_2^+ - a_2^-}{3(a_3^+ - a_3^-)}, \quad k_+ = \sqrt{\frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-}}, \quad k_- = \sqrt{\frac{|a_3^-|}{a_3^+ - a_3^-}}. \quad (12.7)$$

Таким образом, в данном случае кривые  $D_+ = 0$  и  $D_- = 0$  являются прямыми линиями, проходящими через точку  $(u_0, 0)$ . Как и при построении пробоев, нас будут интересовать точки пересечения прямых  $D_{\pm} = 0$  с граничной прямой  $x_2 = \varepsilon$ . Причём из каждой пары точек нам понадобится правая точка для  $D_+$

$$(u_+, \varepsilon), \quad \text{где} \quad u_+ = u_0 + (1 + 2k_+)\varepsilon \quad (12.8)$$

и левая точка для  $D_-$

$$(u_-, \varepsilon), \quad \text{где} \quad u_- = u_0 - (1 + 2k_-)\varepsilon. \quad (12.9)$$

Точка  $(u_+, \varepsilon)$  является седловой точкой поля (5.3), а точка  $(u_-, -\varepsilon)$  — это седловая точка поля (8.22). Матрица Якоби в точке  $(u_+, \varepsilon)$  равна (см. (5.17))

$$J(u_+, \varepsilon) = 12(a_3^+ - a_3^-)k_+\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & -2 - 3k_+ \\ -1 & k_+ \end{pmatrix}. \quad (12.10)$$

Нас интересует собственный вектор этой матрицы с положительным наклоном. Нетрудно проверить, что таким вектором будет вектор

$$\begin{pmatrix} k_+ - 1 + \sqrt{(1 + k_+)(9 + k_+)} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (12.11)$$

угол наклона которого к оси  $x_1$  больше, чем у прямой  $x_1 = (1 + 2k_+)x_2$  (на которой, напомним,  $D_+ = 0$ ). Действительно, так как  $k_+ > 0$ , то легко проверить, что

$$\frac{2}{k_+ - 1 + \sqrt{(1 + k_+)(9 + k_+)}} > \frac{1}{1 + 2k_+}.$$

Итак, интегральная кривая  $\ell_\varepsilon^+$  поля (5.3), проходящая через точку  $(u_+, \varepsilon)$  вдоль вектора (12.11), входит в полосу  $\Omega_\varepsilon$  под прямой  $x_1 =$

$u_0 + (1 + 2k_+) \varepsilon$ . По тем же соображениям, которые были использованы ранее, кривая  $\ell_\varepsilon^+$  не может пересечь данную прямую ни в какой точке верхней половины полосы, поскольку в любой точке этой прямой интегральные кривые имеют угол наклона  $\frac{\pi}{4}$ , то есть из области под прямой интегральные кривые пересекают прямую слева направо, а правая часть кривой  $\ell_\varepsilon^+$ , как мы выяснили, расположена под прямой  $x_1 = u_0 + (1 + 2k_+) \varepsilon$ . Таким образом, кривая  $\ell_\varepsilon^+$  проходит через точку  $(u_0, 0)$ , поскольку ось  $x_1$  она тоже не может пересечь ни в какой другой точке. Важный вывод для нас заключается в том, что в верхней половине полосы  $\Omega_\varepsilon$  кривая  $\ell_\varepsilon^+$  находится справа от прямой  $x_1 = u_0 + (1 + 2k_+) \varepsilon$ , то есть в области, где  $D_+ > 0$  и  $D_- > 0$ , следовательно, после сдвига вправо на  $\varepsilon$  может быть стволом левой ёлки.

Совершенно симметрично строится правая ёлка, точнее, интегральная линия  $\ell_\varepsilon^-$  векторного поля (8.22), которая под положительным углом пересекает нижнюю границу в седловой точке  $(u_-, -\varepsilon)$ . Матрица Якоби поля (8.22) имеет вид (10.7). Вычисляя значение матрицы в точке  $(u_-, -\varepsilon)$ , получаем

$$J(u_-, -\varepsilon) = -12(a_3^+ - a_3^-)k_- \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & -2 - 3k_- \\ -1 & k_- \end{pmatrix}. \quad (12.12)$$

Собственный вектор, вдоль которого мы выпускаем линию  $\ell_\varepsilon^-$ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_- - 1 + \sqrt{(1 + k_-)(9 + k_-)} \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (12.13)$$

Поскольку

$$\frac{2}{k_- - 1 + \sqrt{(1 + k_-)(9 + k_-)}} > \frac{1}{1 + 2k_-},$$

сопряжённая линия  $\bar{\ell}_\varepsilon^-$  стартует из точки  $(u_-, \varepsilon)$  под прямой  $x_1 = u_0 - (1 + 2k_-)x_2$ , а тогда она вплоть до точки  $(u_0, 0)$  идёт под этой прямой, то есть в области, где  $D_+ > 0$  и  $D_- > 0$ . Следовательно, после сдвига влево на  $\varepsilon$  кривая  $\ell_\varepsilon^-$  может быть стволом правой ёлки.

Итак, мы при любом  $\varepsilon$  находимся в условиях предложения 11.1 с точкой  $C = (u_0, 0)$ , тем самым искомая фолиация построена.

### БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор признателен Д. М. Столярову за проведение компьютерных экспериментов, которые помогли понять некоторые типы фолиаций, и



П. Б. Затицкому, критические замечания которого помогли улучшить данный текст.

ФОРМУЛЫ И УТВЕРЖДЕНИЯ ИЗ РАБОТЫ [1], ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ  
В НАСТОЯЩЕЙ СТАТЬЕ

$$B(x_1, x_2) = \frac{\varepsilon + x_2}{2\varepsilon} f_+(x_1 - x_2 + \varepsilon) + \frac{\varepsilon - x_2}{2\varepsilon} f_-(x_1 - x_2 - \varepsilon). \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} f'_+(u + \varepsilon) - f'_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_+(u + \varepsilon) &\geq 0; \\ f'_+(u + \varepsilon) - f'_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_-(u - \varepsilon) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Предложение 2.1.** *Функция  $B$ , определённая формулой (2.1), является беллмановским кандидатом на области  $\Omega_\varepsilon^R(u_1, u_2)$  тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.2) для всех  $u$ ,  $u \in (u_1, u_2)$ .*

$$R_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A - f_-}{\varepsilon + T}, \quad R_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A - f_+}{\varepsilon - T}, \quad \text{и} \quad R \stackrel{\text{def}}{=} R_- + R_+. \quad (4.5)$$

$$N_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{2}R - f'_+}{\varepsilon - T} \quad \text{и} \quad N_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{2}R - f'_-}{\varepsilon + T}. \quad (4.11)$$

$$B_{x_1}(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x_2)N_+ + f'_+, & \text{if } x_2 \geq T(u); \\ (\varepsilon + x_2)N_- + f'_-, & \text{if } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.14)$$

$$A = \frac{\varepsilon^2 - T^2}{2\varepsilon T} \left[ (\varepsilon + T)f'_+ - (\varepsilon - T)f'_- \right] + \frac{(\varepsilon + T)f_+ + (\varepsilon - T)f_-}{2\varepsilon}. \quad (4.16)$$

$$A = \frac{\varepsilon^2 - T^2}{2\varepsilon T} \left[ (\varepsilon - T)f'_- - (\varepsilon + T)f'_+ \right] + \frac{(\varepsilon + T)f_+ + (\varepsilon - T)f_-}{2\varepsilon}. \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\varepsilon - x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_- \right] + (\varepsilon + x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_+ \right], \\ \dot{x}_2 = (\varepsilon - x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_- \right] - (\varepsilon + x_2) \left[ \frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_+ \right], \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(f'_+ - f'_-) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- - x_2(\varepsilon + x_2)f''_+, \\ \dot{x}_2 = x_2(f'_- - f'_+) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- + x_2(\varepsilon + x_2)f''_+. \end{cases} \quad (5.3)$$

**Предложение 5.4.** *Наклон интегральной кривой поля (5.2) в точке  $x$  строго возрастает с ростом  $\varepsilon$ , если  $x_2 D_+(x) D_-(x) > 0$ , и строго убывает, если  $x_2 D_+(x) D_-(x) < 0$ .*

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) \\ J_{21}(x) & J_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} J_{11}(x) &= \varepsilon(f_+'' - f_-'') - x_2(\varepsilon - x_2)f_-''' - x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\ J_{12}(x) &= 2x_2(f_-'' - f_+'') + x_2(\varepsilon - x_2)f_-''' - x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\ J_{21}(x) &= x_2(f_-'' - f_+'') - x_2(\varepsilon - x_2)f_-''' + x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\ J_{22}(x) &= (f_-' - f_+'') - (\varepsilon - x_2)(f_-'' - x_2 f_-''') + (\varepsilon + x_2)(f_+'' + x_2 f_+'''). \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$J(u_+, \varepsilon) = \varepsilon(f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)) \times \begin{pmatrix} 1 & -2 - 3\varepsilon\kappa_+ \\ -1 & \varepsilon\kappa_+ \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\kappa_+ = \frac{2f_+'''(u_+ + \varepsilon)}{f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)}. \quad (5.18)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. И. Васюнин, П. Б. Затицкий, *Некоторые экстремальные задачи для мартингальных преобразований. I.* — Зап. Научн. Сем. ПОМИ **527** (2023), 5–53. English transl., J. Math. Sci., **284** (2024), no. 6, 735–766.

Vasyunin V. I. Some extremal problems for martingale transforms. II.

This paper is a direct continuation of the paper with the same title (V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Some extremal problem for martingale transforms. I*, Zap. Nauchn. Semin. POMI, **527** (2023), 5–530). For this reason neither the introductory part nor the list of references are duplicated. However for the reader convenience, the formulas from the first paper that are cited here are collected in a special addendum at the end of the paper with their original numbers.

At this paper two new local foliations are investigated: minor pockets and rectangles. The emergence of such local foliations is illustrated by

the further investigation of examples in which the boundary functions are polynomials of the third degree.

Санкт-Петербургский  
государственный университет  
Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: vasyunin@pdmi.ras.ru

Поступило 8 апреля 2024 г.