Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 536, 2024 г.

А. В. Фаминский

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА–КУЗНЕЦОВА

**Посвящается выдающемуся математику
Нине Николаевне Уральцевой**

§1. Введение. Описание основных результатов

Уравнение Захарова–Кузнецова в случае трех пространственных переменных записывается в виде

$$u_t + bu_x + \Delta u_x + uu_x = f(t,x,y,z) \tag{1.1}$$

($u = u(t,x,y,z)$, b – действительная константа, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ – оператор Лапласа). Впервые это уравнение было выведено в статье [1] для описания ионно-акустических волн в плазме, помещенной в магнитное поле, причем именно в трехмерном случае. В дальнейшем это уравнение стало рассматриваться как модельное для описания нелинейных волн в средах с дисперсией, распространяющихся в заданном направлении (x) и испытывающих поперечные колебания. Строгий вывод это уравнения можно найти, например, в [2, 3]. Уравнение Захарова–Кузнецова является одним из вариантов обобщения уравнения Кортевега–де Фриза $u_t + bu_x + u_{xxx} + uu_x = f(t,x)$ на многомерный случай (другим вариантом обобщения является, например, уравнение Кадомцева–Петвиашвили).

В настоящей статье рассматриваются начально-краевые задачи в области $\Pi_T^+ = (0,T)\times\Sigma_+$, где $T>0$ – произвольно, $\Sigma_+ = \mathbb{R}_+\times\Omega$, $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ – полуось по переменной x, а Ω – некоторая ограниченная область по переменным y,z (условия на эту область будут уточнены далее) с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\Sigma_+, \tag{1.2}$$

Ключевые слова: уравнение Захарова–Кузнецова, начально-краевая задача, глобальная разрешимость, единственность, убывание решений при больших временах .

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 23-11-00056.

краевым условием на левой границе

$$u\big|_{x=0} = \mu(t,y,z), \quad (t,y,z) \in B_T = (0,T)\times\Omega, \tag{1.3}$$

и одним из двух видов однородных краевых условий на $\Gamma_T^+ = (0,T)\times\mathbb{R}_+\times\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} &\text{или условие Дирихле} \qquad a)\ u\big|_{\Gamma_T^+} = 0, \\ &\text{или условие Неймана} \qquad b)\ \frac{\partial u}{\partial\bar n}\Big|_{\Gamma_T^+} = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

(символ $\frac{\partial}{\partial\bar n}$ как обычно обозначает производную по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$). В дальнейшем будем использовать обозначение "задача (1.1)–(1.4)" для каждого из этих двух случаев.

Теория начально-краевых задач в наибольшей степени разработана для случая двумерного уравнения Захарова–Кузнецова

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = f(t,x,y)$$

(и его обобщений на нелинейности более высокого порядка роста). Здесь мы не будем приводить библиографию по этому вопросу.

Случай же трехмерного уравнения Захарова–Кузнецова (и его обобщений на нелинейности более высокого порядка роста) изучен значительно меньше. Наиболее исследованной является задача Коши, где применяются достаточно тонкие методы анализа. Здесь можно отметить статьи [4–12]. В частности в [12] установлена глобальная корректность задачи Коши при начальной функции из $L_2(\mathbb{R}^3)$ или $H^1(\mathbb{R}^3)$. Ряд результатов получен для начально-краевых задач на областях вида $I\times\mathbb{R}^2$, где I – некоторый ограниченный или неограниченный интервал на оси x, в статьях [13–17].

Вместе с тем, исходя из физического смысла уравнения, не менее, а может даже более естественными являются начально-краевые задачи, в которых трансверсальные переменные изменяются в ограниченной области.

В статьях [18–20] изучались начально-краевые задачи для уравнения (1.1), заданного на ограниченном прямоугольнике в $\mathbb{R}^3$. В [18] рассматривалась задача на $(0,1)\times(-\pi/2,\pi/2)^2$ с краевыми условиями $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u_x\big|_{x=1} = 0$ и либо однородными условиями Дирихле, либо периодическими условиями при $y = \pm\pi/2, z = \pm\pi/2$. Были получены результаты о существовании глобального по времени решения для начальной функции из пространства L_2. В статье [19] рассматривалась задача для уравнения (1.1) на аналогичной области, при этом в отличие от предыдущей работы краевые условия по x предполагались только периодическими. Были получены результаты о существовании глобального по времени более регулярного решения при начальной функции из пространства H^1. Наконец, в статье [20] рассматривалась задача на области $(0, L_0) \times (0, L_1) \times (0, L_2)$ с однородными условиями Дирихле на границе области и дополнительным условием $u_x\big|_{x=L_0} = 0$. При условии либо малости одной из величин L_j либо малости регулярной начальной функции был установлен результат о существовании и единственности глобального по времени регулярного решения и его убывании при больших временах.

Задача аналогичная (1.1)–(1.4) при $\mu \equiv 0$ и однородных условиях Дирихле на Γ_T^+ в случае $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ ранее была рассмотрена в статье [21]. При условии либо малости одной из величин L_j, либо малости регулярной экспоненциально быстро убывающей при $x \to +\infty$ начальной функции ($u_0, u_{0x}, u_{0yy}, u_{0zz}, \Delta u_{0x}$ лежат в весовом пространстве L_2 на области Σ_+ с экспоненциальным весом при $x \to +\infty$) был установлен результат о существовании и единственности глобального по времени регулярного решения и его убывании при больших временах.

В статье [8] для уравнения (1.1) была рассмотрена начально-краевая задача на слое $\Sigma = \mathbb{R} \times \Omega$, где Ω либо ограниченная область с границей класса C^3, либо прямоугольник $(0, L_1) \times (0, L_2)$, с однородным краевым условием Дирихле. Начальная функция предполагалась принадлежащей некоторому весовому пространству при $x \to +\infty$ либо L_2, либо H^1. В качестве весов допускались как степенные , так и экспоненциальные функции. В случае L_2 был установлен результат о существовании глобального по времени слабого решения, а в случае H^1 — существовании и единственности более регулярного глобального решения. Более того, при экспоненциальных весах и малости начальной функции, а в случае $b > 0$ также некотором ограничении на размер области Ω, было доказано экспоненциальное убывание слабого решения при больших временах.

С физической точки зрения постановка начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) означает моделирование распространения трехмерных волн в канале ограниченной ширины от начальной стенки. Однородное условие Дирихле a) соответствует ситуации отсутствия деформаций на границах канала, а однородное условия Неймана b) — условию непротекания через эти границы.

Целью работы являются результаты о существовании и единственности глобальных по времени решений начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) в весовых пространствах Соболева, а также их убывании при больших временах. В качестве весов допускаются как степенные, так и экспоненциальные функции. Результаты о существовании и единственности совпадают для обоих типов граничных условий (1.4), причем без каких-либо ограничений на размер входных данных, результаты об убывании при больших временах установлены только в случае условий Дирихле, применения экспоненциальных весов, $\mu \equiv 0$, $f \equiv 0$ и малости начальных данных. В случае двумерного уравнения Захарова–Кузнецова аналогичные результаты были ранее установлены в статье [22].

Глобальные результаты основаны на оценках, которые являются аналогами законов сохранения для однородного уравнения Захарова–Кузнецова в случае задачи Коши, а именно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} u^2\,dxdydz = \text{const}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - \frac{1}{3}u^3\right) dxdydz = \text{const}. \quad (1.5)$$

В дальнейшем мы будем различать ситуации, когда используется только аналог первого из законов сохранения (1.5), и называть подобные решения слабыми, и когда используются аналоги обоих, и называть в этом случае решения сильными.

Во всей последующей части работы предполагается, что область Ω ограничена и удовлетворяет следующему условию:
либо 1) $\partial\Omega \in C^{10}$ (в общепринятом смысле, см., например, [23]),
либо 2) Ω – прямоугольник $(0, L_1) \times (0, L_2)$ для некоторых $L_1, L_2 > 0$
(можно ввести более сложные условия на Ω, так что приведенные выше являются их частным случаем и все результаты работы сохраняются, но для простоты мы остановимся на указанном варианте).

Для мультииндекса $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ положим $\partial^\nu_{y,z} = \partial_y^{\nu_1}\partial_z^{\nu_2}$, $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$.

Положим $\Delta^\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2$. Для целого $k \in [0, 10]$ введем специальные подпространства $\widetilde{H}^k(\Omega)$ пространства $H^k(\Omega)$, учитывающие граничные условия (1.4), а именно, $\varphi(y,z) \in \widetilde{H}^k(\Omega)$, если $\varphi \in H^k(\Omega)$ и
в случае a) $(\Delta^\perp)^m\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0$ при целых $m \in [0, k/2)$,
в случае b) $\frac{\partial}{\partial\bar{n}}(\Delta^\perp)^m\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0$ при целых $m \in [0, (k-1)/2)$.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые хорошо известные факты об операторе Лапласа (см., например, [23]). Существует ортонормальная в $L_2(\Omega)$ система вещественнозначных собственных функций $\{\psi_l(y,z),\, l=1,2\dots\}$ оператора $-\Delta^{\perp}$ на Ω с однородными краевыми условиями на $\partial\Omega$ или Дирихле или Неймана (будем использовать одно и то же обозначение в обоих случаях), причем $\psi_l\in\widetilde{H}^{10}(\Omega)$. Если λ_l – соответствующие собственные числа, то $\lambda_l\geqslant 0\ \forall l$, $\lambda_l\to+\infty$ когда $l\to+\infty$. Если $\varphi_l=(\varphi,\psi_l)$, где символ $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, то для того, чтобы функция $\varphi(y,z)$ принадлежала пространству $\widetilde{H}^k(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы она разлагалась в ряд Фурье

$$\varphi=\sum_{l=1}^{+\infty}\varphi_l\psi_l,$$

сходящийся в норме пространства $H^k(\Omega)$. При этом,

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^k(\Omega)}\leqslant c_1\sum_{l=1}^{+\infty}(\lambda_l^k+1)|\varphi_l|^2\leqslant c_2\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^k(\Omega)} \tag{1.6}$$

для некоторых констант c_1, c_2, зависящих только от свойств области Ω. Кроме того, если $m\leqslant 5$, то

$$\|\varphi\|_{\widetilde{H}^{2m}(\Omega)}\leqslant c\big(\|(\Delta^{\perp})^m\varphi\|_{L_2(\Omega)}+\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}\big). \tag{1.7}$$

Для целого $k\geqslant 0$ и функции $\varphi(x,y,z)$ положим

$$|D^k\varphi|=\Big(\sum_{j+|\nu|=k}(\partial_x^j\partial_{y,z}^{\nu}\varphi)^2\Big)^{1/2},\qquad |D\varphi|=|D^1\varphi|.$$

Положим $L_{p,+}=L_p(\Sigma_+)$, $H^s_+=H^s(\Sigma_+)$, $W^k_{p,+}=W^k_p(\Sigma_+)$, $C^k_{b,+}=C^k_b(\overline{\Sigma}_+)$ (пространство ограниченных k–раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Sigma}_+$ функций со всеми ограниченными производными). Аналогично $\widetilde{H}^k(\Omega)$ для целого $k\in[0,10]$ введем подпространства $\widetilde{H}^k_+=\widetilde{H}^k(\Sigma_+)$, состоящие из функций $\varphi(x,y,z)\in H^k_+$, для которых

$$\begin{aligned}&\text{в случае } a)\ (\Delta^{\perp})^m\varphi\big|_{\mathbb{R}_+\times\partial\Omega}=0 \text{ при целых } m\in[0,k/2),\\ &\text{в случае } b)\ \frac{\partial}{\partial\bar n}(\Delta^{\perp})^m\varphi\big|_{\mathbb{R}_+\times\partial\Omega}=0 \text{ при целых } m\in[0,(k-1)/2).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Введем понятие слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 1.1. *Пусть* $u_0 \in L_{2,+}$, $\mu \in L_2(B_T)$, $f \in L_1(0,T;L_{2,+})$. *Функция* $u \in L_2(\Pi_T^+)$ *называется слабым решением задачи* (1.1)–(1.4), *если для любой функции* $\phi \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^2)$, *такой что* $\phi_t \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $\phi_x \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^2)$, $\phi\big|_{t=T} \equiv 0$, $\phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} \equiv 0$, *справедливо интегральное тождество*

$$\int\limits_{\Pi_T^+} \Big(u(\phi_t + b\phi_x + \Delta\phi_x) + \frac{1}{2}u^2\phi_x + f\phi\Big)\,dxdydzdt + \int\limits_{\Sigma_+} u_0\phi\big|_{t=0}\,dxdydz + \int\limits_{B_T} \mu\phi_{xx}\big|_{x=0}\,dydzdt = 0. \quad (1.9)$$

Замечание 1.1. В силу известного вложения $H^2 \subset L_\infty$ в любой области на $\mathbb{R}^3$ все интегралы в левой части (1.9) существуют.

Бесконечно гладкую, положительную на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функцию $\psi(x)$ будем называть допустимой весовой функцией и обозначать $\psi \in \mathcal{A}$, если

$$|\psi^{(j)}(x)| \leqslant c(j)\psi(x) \quad \text{для любого натурального } j \text{ и } \forall x \geqslant 0. \quad (1.10)$$

Заметим, что если $\psi \in \mathcal{A}$, то поскольку при $x_1, x_2 \geqslant 0$, $|x_1 - x_2| \leqslant 1$

$$\Big|\ln\frac{\psi(x_2)}{\psi(x_1)}\Big| = \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx\Big| \leqslant c(1),$$

справедливо неравенство

$$\max_{x\in[n,n+1]}\psi(x) \leqslant c\min_{x\in[n,n+1]}\psi(x) \quad \text{для некоторой константы } c>0 \text{ и } \forall n \geqslant 0. \quad (1.11)$$

Заметим, что для $\psi \in \mathcal{A}$ очевидно справедливо неравенство

$$\psi(x) \leqslant \psi(0)e^{c(1)x} \quad \forall x \geqslant 0. \quad (1.12)$$

В статье [16] было показано, что $\psi^s \in \mathcal{A}$ для любого $s \in \mathbb{R}$, если $\psi \in \mathcal{A}$. При $\alpha \in \mathbb{R}$ функции $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}, \psi(x) \equiv (1+x)^{2\alpha} \in \mathcal{A}$, более того, если $\alpha > 0$, то их производные $\psi' \in \mathcal{A}$. Другим важным примером допустимой весовой функции является $\rho_0(x) \equiv 1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Заметим, что $\rho_0' \in \mathcal{A}$.

Для допустимой весовой функции $\psi(x)$ символом $\widetilde{H}_+^{k,\psi}$ обозначим пространство функций $\varphi(x,y,z)$, таких что $\varphi\psi^{1/2} \in \widetilde{H}_+^k$, $\|\varphi\|_{\widetilde{H}_+^{k,\psi}} =$

$\|\varphi\psi^{1/2}\|_{H^k_+}$. Пусть $L^{\psi}_{2,+} = \widetilde{H}^{0,\psi}_+ = \{\varphi(x,y,z) : \varphi\psi^{1/2} \in L_{2,+}\}$, в частности, $\|\varphi\|_{L^{\psi}_{2,+}} = \|\varphi\psi^{1/2}\|_{L_{2,+}}$. Очевидно, что $L^{\rho_0}_{2,+} = L_{2,+}$.

Решения рассматриваемых задач будем строить в пространствах

$$X^{k,\psi}_w(\Pi^+_T) = C_w([0,T]; \widetilde{H}^{k,\psi}_+) \cap L_2(0,T; \widetilde{H}^{k+1,\psi'}_+)$$

(символ C_w обозначает слабую непрерывность) при $k = 0$ (слабые решения) и $k = 1$ (сильные решения) для функций $\psi(x)$, для которых $\psi, \psi' \in \mathcal{A}$. Пусть $X^{\psi}_w(\Pi^+_T) = X^{0,\psi}_w(\Pi^+_T)$.

Положим также

$$\sigma^+(u;T) = \sup_{x_0 \geqslant 0} \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} \int_\Omega u^2 \, dydzdxdt. \tag{1.13}$$

Для описания свойств граничной функции μ введем специальные анизотропные пространства. Пусть $B = \mathbb{R}\times\Omega$. Для функции $\mu(t,y,z) \in L_2(B)$ положим

$$\widehat{\mu}(\theta,l) = \mathcal{F}_{t\to\theta}[\mu_l(t)](\theta) = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} e^{-i\theta t} \int_\Omega \mu(t,y,z)\psi_l(y,z)\, dydzdt, \tag{1.14}$$

где при фиксированных θ и l предел понимается в пространстве $L_2(B)$. Для $s \in [0,10]$ (вообще говоря, нецелого) введем пространсство $\widetilde{H}^{s/3,s}(B)$ как подпространство функций $\mu \in L_2(B)$, для которых

$$\|\mu\|_{\widetilde{H}^{s/3,s}(B)} = \Big(\sum_{l=1}^{+\infty} \big\|(|\theta|^{2/3} + \lambda_l + 1)^{s/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2} < \infty$$

(здесь и далее в аналогичных ситуациях верхний индекс θ означает, что рассматривается пространство функций этой переменной). Пространство $\widetilde{H}^{s/3,s}(B_T)$ определим как пространство сужений на B_T функций из $\widetilde{H}^{s/3,s}(B)$ с естественной нормой. Например, при $s = 3$ пространство $\widetilde{H}^{1,3}(B_T)$ совпадает с пространством функций $\mu \in L_2(0,T;\widetilde{H}^3(\Omega))$, $\mu_t \in L_2(B_T)$.

Использование подобных анизотропных пространств может быть обосновано следующим рассуждением. Пусть $v(t,x,y,z)$ является решением задачи Коши

$$v_t + \Delta v_x = 0, \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x,y,z)$$

из пространства $C_b(\mathbb{R}^t; H^s(\mathbb{R}^3))$, которое легко строится с помощью преобразования Фурье. Тогда используя методы из статьи [24], можно показать, что равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\left\|D_t^{1/3} v\right\|^2_{H^{s/3,s}_{t,(y,z)}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\nabla_{x,y,z} v\right\|^2_{H^{s/3,s}_{t,(y,z)}(\mathbb{R}^3)} \sim \|v_0\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3)} \tag{1.15}$$

(здесь символ D^α обозначает потенциал Рисса порядка $-\alpha$, пространство $H^{s/3,s}_{t,(y,z)}(\mathbb{R}^3)$ – анизотропное пространство Соболева порядка $s/3$ по переменной t и порядка s по y и z, см., например, [16]).

Перейдем к описанию основных результатов работы. В них по умолчанию предполагается, что область Ω удовлетворяет введенным выше условиям.

Теорема 1.1 (Существование слабых решений). *Пусть $u_0 \in L^\psi_{2,+}$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_T)$, $f \in L_1(0,T; L^\psi_{2,+})$ для некоторых $T > 0$, $s > 2$ и функции $\psi(x)$, для которой $\psi, \psi' \in \mathcal{A}$. Тогда существует слабое решение задачи* (1.1)–(1.4) *$u \in X^\psi_w(\Pi^+_T)$, для которого $\sigma^+(|Du|; T) < \infty$.*

Замечание 1.2. Из свойств функции ρ_0 следует, что если $u_0 \in L_{2,+}$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_T)$, $f \in L_1(0,T; L_{2,+})$, то существует слабое решение задачи (1.1)–(1.4) $u \in C_w([0,T]; L_{2,+})$, для которого $\sigma^+(|Du|; T) < \infty$. В случае аналогичной начально-краевой задачи для двумерного уравнения Захарова–Кузнецова на полуполосе $\mathbb{R}_+ \times (0, L)$ в статье [22] наряду с существованием слабого решения установлена также его единственность при достаточной скорости возрастания весовой функции на $+\infty$.

Теперь перейдем к сильным решениям, под которыми будем понимать слабые решения, лежащие в более регулярном пространстве $X^{1,\psi}_w(\Pi^+_T)$.

Теорема 1.2 (Существование и единственность сильных решений). *Пусть $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\psi}_+$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_T)$, $f \in L_2(0,T; \widetilde{H}^{1,\psi}_+)$ для некоторых $T > 0$, $s > 2$ и функции $\psi(x)$, такой что $\psi, \psi' \in \mathcal{A}$, $u_0(0,y,z) \equiv \mu(0,y,z)$. Тогда существует сильное решение задачи* (1.1)–(1.4) *$u \in X^{1,\psi}_w(\Pi^+_T)$, для которого $\sigma^+(|D^2u|; T) < \infty$. Если дополнительно известно, что $\psi^{1/3}(x) \leqslant c\psi'(x)$ $\forall x \geqslant 0$, то решение задачи* (1.1)–(1.4) *единственно в пространстве $X^{1,\psi}_w(\Pi^+_T)$.*

Замечание 1.3. Если $u_0 \in \widetilde{H}^1_+$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_T)$, $f \in L_2(0,T; \widetilde{H}^1_+)$, $u_0(0,y,z) \equiv \mu(0,y,z)$, то существует слабое решение задачи (1.1)–(1.4) $u \in C_w([0,T]; \widetilde{H}^1_+)$, для которого $\sigma^+(|D^2u|; T) < \infty$. Согласно (1.15) при начальной функции из пространства $\widetilde{H}^1_+$ естественным с точки зрения гладкости краевой функции является условие $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_T)$, так что полученный результат является ε-близким к естественному. Можно показать, что локальный по времени результат существования и единственности решения можно получить при естественных условиях гладкости функции μ. Условию единственности удовлетворяет экспоненциальный вес $e^{2\alpha x}$ при любом $\alpha > 0$ и степенной вес $(1+x)^{2\alpha}$ при $\alpha \geqslant 3/4$.

В следующих результатах рассматривается только задача с краевыми условиями Дирихле (1.4). Пусть в соответствии с введенными ранее обозначениями λ_1 — наименьшее собственное число оператора $-\Delta^\perp$ в области Ω с однородными краевыми условиями Дирихле. Известно, что в этом случае $\lambda_1 > 0$. Напомним, для примера, что в случае $\Omega \subset (0, L_1) \times (0, L_2)$ справедлива оценка $\lambda_1 \geqslant \pi^2(1/L_1^2 + 1/L_2^2)$.

Теорема 1.3 (Убывание слабых решений при больших временах). *Существует $\Lambda(b)$, такое что $\Lambda(b) = 0$ при $b \leqslant 0$, $\Lambda(b) > 0$ при $b > 0$, для которого, если $\lambda_1 \geqslant \Lambda(b)$, то существуют $\alpha_0 > 0$, $\epsilon_0 > 0$ и $\beta > 0$, такие что, если $u_0 \in L^\psi_{2,+}$ для $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ при $\alpha \in (0, \alpha_0]$, $\|u_0\|_{L_{2,+}} \leqslant \epsilon_0$, $\mu \equiv 0$, $f \equiv 0$, то существует слабое решение $u(t, x, y, z)$ задачи* (1.1)–(1.4) *в случае краевого условия Дирихле* а)*, принадлежащее пространствам $X^\psi_w(\Pi^+_T)$ $\forall T > 0$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|u(t, \cdot, \cdot, \cdot)\|_{L^\psi_{2,+}} \leqslant e^{-\alpha\beta t} \|u_0\|_{L^\psi_{2,+}} \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{1.16}$$

Теорема 1.4 (Убывание сильных решений при больших временах). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3 *и пусть величины $\Lambda(b)$, a_0, ϵ_0, β определяются так же в теореме* 1.3. *Пусть дополнительно известно, что, что $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\psi}_+$, $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$, $u_0(0, y, z) \equiv 0$. Тогда для некоторой константы c, зависящей от b, α, β, $\|u_0\|_{\widetilde{H}^{1,\psi}_+}$, для соответствующего единственного сильного решения задачи* (1.1)–(1.4) *из пространств $X^{1,\psi}_w(\Pi^+_T)$ $\forall T > 0$ справедливо неравенство*

$$\|u(t, \cdot, \cdot, \cdot)\|_{\widetilde{H}^{1,\psi}_+} \leqslant c e^{-\alpha\beta t} \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{1.17}$$

Замечание 1.4. Если $b \leqslant 0$, то какие-либо ограничения на область Ω (кроме приведенных выше условий гладкости границы) в теоремах 1.3 и 1.4 отсутствуют. Из доказательства теоремы 1.3 следует, что $\Lambda(b) \leqslant 8b$ в случае $b > 0$; $\beta \geqslant \lambda_1/8$ при любом b (эти оценки заведомо неточны). В частности, $\beta \geqslant \pi^2(1/L_1^2 + 1/L_2^2)/8$, если $\Omega \subset (0, L_1) \times (0, L_2)$.

Статья организована следующим образом. В §2 введены некоторые дополнительные обозначения, приведены необходимые интерполяционные неравенства и рассмотрены начально–краевые задачи для линеаризованного уравнения Захарова–Кузнецова. §3 содержит доказательство результатов о существовании решений, §4 – об их единственности и непрерывной зависимости, а §5 – об убывании при больших временах.

§2. Вспомогательные материалы

В дальнейшем не будем указывать область интегрирования для Σ_+. Также для тройного интеграла по $P=(x,y,z)$ будем писать dP вместо $dxdydz$.

Символом $\eta(x)$ будем обозначать функцию типа срезки, а именно, бесконечно гладкую неубывающую на $\mathbb{R}$ функцию, такую что $\eta(x)=0$ при $x\leqslant 0$, $\eta(x)=1$ при $x\geqslant 1$, $\eta(x)+\eta(1-x)\equiv 1$.

Введем анизотропные пространства Соболева со свойствами гладкости только по трансверсальным переменным. Символом $\widetilde{H}_+^{(0,k)}$ обозначим пространство функций $\varphi(x,y,z)$, для которых существуют все производные $\partial^\nu_{y,z}\varphi\in L_{2,+}$ при $|\nu|\leqslant k$ и выполнены условия (1.8), с естественной нормой

$$\|\varphi\|_{\widetilde{H}_+^{(0,k)}}=\Big(\sum_{|\nu|\leqslant k}\|\partial^\nu_{y,z}\|^2_{L_{2,+}}\Big)^{1/2}.$$

.

Также введем пространство

$$H_+^{(-1,0)}=\big\{\varphi(x,y,z)=\varphi_0(x,y,z)+\partial_x\varphi_1(x,y,z):\varphi_j\in L_{2,+}\big\}$$

с естественной нормой $\|\varphi\|_{H_+^{(-1,0)}}=\big(\|\varphi_0\|^2_{L_{2,+}}+\|\varphi_1\|^2_{L_{2,+}}\big)^{1/2}$.

Лемма 2.1. *Если $\varphi\in L_{2,+}$, $\varphi_{xxx}\in H_+^{(-1,0)}$ (производная понимается в смысле обобщенных функций на области Σ_+), то $\varphi_x\in L_{2,+}$ и для некоторой константы c выполняется неравенство*

$$\|\varphi_x\|_{L_{2,+}}\leqslant c\big(\|\varphi_{xxx}\|_{H_+^{(-1,0)}}+\|\varphi\|_{L_{2,+}}\big). \tag{2.1}$$

Доказательство. Так как $\varphi(\,\cdot\,,y,z)\in L_2(\mathbb{R}_+)$, $\varphi_{xxx}(\,\cdot\,,y,z)\in H^{-1}(\mathbb{R}_+)$ для почти всех $(y,z)\in\Omega$, то данное утверждение следует из [25, лемма A.3], где оно было доказано в одномерноi случае (при более общих предположениях). $\square$

Рассмотрим еще несколько интерполяционных неравенств.

Лемма 2.2. *Если $\psi(x)$ – допустимая весовая функция, то существует константа $c>0$, зависящая от свойств функции ψ, такая что для любой функции $\varphi(x,y,z)$, для которой $\varphi_{xx},\varphi\in L_{2,+}^{\psi}$, справедливы следующие неравенства:*

$$\int \varphi_x^2\psi\,dP \leqslant c\Bigl(\int \varphi_{xx}^2\psi\,dP\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int \varphi^2\psi\,dP\Bigr)^{1/2} + c\int \varphi^2\psi\,dP, \qquad (2.2)$$

$$\int\limits_{\Omega}(\varphi_x^2\psi)\big|_{x=0}\,dydz \leqslant c\Bigl(\int \varphi_{xx}^2\psi\,dP\Bigr)^{3/4}\Bigl(\int \varphi^2\psi\,dP\Bigr)^{1/4} + c\int \varphi^2\psi\,dP. \quad (2.3)$$

Доказательство. Доказательство основано на элементарном неравенстве

$$\sup_{x\geqslant 0} f^2(x) \leqslant 2\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}_+}(f')^2\,dx\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}_+} f^2\,dx\Bigr)^{1/2}$$

и равенстве

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}(f')^2\psi\,dx = -(f'f\psi)\big|_0 - \int\limits_{\mathbb{R}_+} f''f\psi\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}_+} f'f\psi'\,dx.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega}|\varphi_x\varphi\psi|\big|_{x=0}\,dydz \leqslant 2\Bigl(\int\limits_{\Omega}\sup_{x\geqslant 0}\varphi_x^2\psi\,dydz\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_{\Omega}\sup_{x\geqslant 0}\varphi^2\psi\,dydz\Bigr)^{1/2}$$
$$\leqslant c\Bigl(\int(\varphi_{xx}^2+\varphi_x^2)\psi\,dP\Bigr)^{1/4}\Bigl(\int(\varphi_x^2+\varphi^2)\psi\,dP\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int \varphi^2\psi\,dP\Bigr)^{1/4}$$

и, следовательно, выводим с использованием (1.10), что

$$\int \varphi_x^2\psi\,dP$$
$$\leqslant c\Bigl(\int(\varphi_{xx}^2+\varphi_x^2)\psi\,dP\Bigr)^{1/4}\Bigl(\int(\varphi_x^2+\varphi^2)\psi\,dP\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int \varphi^2\psi\,dP\Bigr)^{1/4}$$
$$+\Bigl(\int \varphi_{xx}^2\psi\,dP\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int \varphi^2\psi\,dP\Bigr)^{1/2} + c\Bigl(\int \varphi_x^2\psi\,dP\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int \varphi^2\psi\,dP\Bigr)^{1/2},$$

откуда следует неравенство (2.2). Наконец,

$$\int\limits_{\Omega}(\varphi_x^2\psi)\big|_{x=0}\,dydz \leqslant c\Bigl(\int(\varphi_{xx}^2+\varphi_x^2)\psi\,dP\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int \varphi_x^2\psi\,dP\Bigr)^{1/2}$$

и неравенство (2.3) следует из (2.2). □

Лемма 2.3. *Пусть* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ *– две допустимые весовые функции, причем* $\psi_1(x) \leqslant c_0\psi_2(x)$ $\forall x \geqslant 0$ *для некоторой константы* $c_0 > 0$. *Пусть либо* 1) $k = 1, m = 0$, *либо* 2) $k = 2, m = 1$, *либо* 3) $k = 2, m = 0$; $q \in [2, 6]$ *в случаях* 1) *и* 2), $q \in [2, +\infty]$ *в случае* 3). *Тогда существует константа* $c > 0$, *зависящая от свойств весовых функций*, k, m, q *и области* Ω, *такая что для любой функции* $\varphi(x, y, z)$, *для которой* $|D^k\varphi| \in L_{2,+}^{\psi_1}$, $\varphi \in L_{2,+}^{\psi_2}$, *справедливо неравенство*

$$\big\||D^m\varphi|\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\big\|_{L_{q,+}} \leqslant c\big\||D^k\varphi|\big\|^{2s}_{L_{2,+}^{\psi_1}}\big\|\varphi\big\|^{1-2s}_{L_{2,+}^{\psi_2}} + \big\|\varphi\big\|_{L_{2,+}^{\psi_2}}, \tag{2.4}$$

где

$$s = s(k, m, q) = \frac{2m+3}{4k} - \frac{3}{2kq}. \tag{2.5}$$

Если $\varphi\big|_{\mathbb{R}_+\times\partial\Omega} = 0$, *то либо в случае* 1), *либо в случае* 2) *при* $q = 2$, *либо в случае* 3) *при* $q \leqslant 6$ *константа* c *в* (2.4) *не зависит от* Ω.

Доказательство. Доказательство при $q < +\infty$ дословно повторяет доказательство леммы 1.1 из [8], где оно было проведено для случая области $\Sigma = \mathbb{R}\times\Omega$, за исключением одной выкладки для $k = 2$, $m = 1$, $q = 2$, которая в данном случае выглядит так:

$$\begin{aligned}\int |D\varphi|^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\,dP = -\int \Delta\varphi\psi_1^{1/2}\cdot\varphi\psi_2^{1/2}\,dP \\ -\int \varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'\,dP + \int\limits_{\mathbb{R}_+\times\partial\Omega}\varphi(\varphi_y n_y + \varphi_z n_z)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dS \\ -\int\limits_{\Omega}\big(\varphi\varphi_x\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\big)\big|_{x=0}\,dydz,\end{aligned}$$

где новым является последнее слагаемое в правой части. Тогда

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_{\Omega}\big(\varphi\varphi_x\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\big)\big|_{x=0}\,dydz\Big| \\ &\leqslant \Big(\int\limits_{\Omega}\big(\varphi^2\psi_1^{1/4}\psi_2^{3/4}\big)\big|_{x=0}\,dydz\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega}\big(\varphi_x^2\psi_1^{3/4}\psi_2^{1/4}\big)\big|_{x=0}\,dydz\Big)^{1/2} \\ &\leqslant c\Big(\int(\varphi_{xx}^2\psi_1 + \varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})\,dP\Big)^{1/4}\Big(\int(\varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2} + \varphi^2\psi_2)\,dP\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\times\Big(\int \varphi^2\psi_2\,dP\Big)^{1/4}$$

и по аналогии с [8] также получаем оценку (2.4) в указанном случае.

В случае же $q=+\infty$ воспользуемся следующим интерполяционным неравенством из [26, теорема 10.1]: если $Q_n=(n,n+1)\times\Omega$, то

$$\|f\|_{L_\infty(Q_n)}\leqslant c(\Omega)\Big(\|\Delta f\|^2_{L_2(Q_n)}+\|f\|^2_{L_2(Q_n)}\Big)^{3/8}\|f\|^{1/4}_{L_2(Q_n)}.$$

Согласно свойству (1.11)

$$\sup_{(x,y)\in Q_n}|\varphi|\psi_1^{3/8}\psi_2^{1/8}\leqslant c\min_{x\in[n,n+1]}\psi_1^{3/8}(x)\min_{x\in[n,n+1]}\psi_2^{1/8}(x)\cdot\|\varphi\|_{L_\infty(Q_n)}$$
$$\leqslant c(\Omega)\Big(\int\limits_{Q_n}\big((\Delta\varphi)^2+\varphi^2\big)\psi_1\,dP\Big)^{3/8}\Big(\int\limits_{Q_n}\varphi^2\psi_2\,dP\Big)^{1/8},$$

откуда следует неравенство (2.4) при $m=0$, $k=2$, $q=+\infty$. □

При изучении вопроса об убывании решений при больших временах будем использовать неравенство Фридрихса (см. [23]): для $\varphi\in H_0^1(\Omega)$

$$\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\big(\|\varphi_y\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\varphi_z\|^2_{L_2(\Omega)}\big), \tag{2.6}$$

где $\lambda_1>0$ – наименьшее собственное число оператора $-\Delta^\perp$ в области Ω с однородными краевыми условиями Дирихле.

Теперь перейдем к изучению начально-краевых задач для линеаризованного уравнения

$$u_t+bu_x+\Delta u_x=f(t,x,y,z) \tag{2.7}$$

с начальными и краевыми условиями (1.2)–(1.4). Понятие слабого решения здесь полностью аналогично определению 1.1. Прежде всего рассмотрим одно вспомогательное утверждение о существовании регулярных решений, в котором не будем стремиться к точности условий на данные задачи. Следует, однако, отметить, что именно для справедливости этого утверждения введены условия на область Ω.

Лемма 2.4. *Пусть $\mu\equiv 0$, $\partial_x^j u_0\in\widetilde H_+^{(0,10)}$, $\partial_x^j u_0\big|_{x=0}\equiv 0$ для любого целого $j\geqslant 0$, $\partial_t^m\partial_x^j f\in C([0,T];\widetilde H_+^{(0,10)})$, $\partial_t^m f\big|_{t=0}\equiv 0$ для любых целых $j,m\geqslant 0$. Пусть также $u_0=f\equiv 0$ при $x\geqslant R$ для некоторого $R>0$.*

Тогда существует решение задачи (2.7), (1.2)–(1.4), *такое что*

$$u \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^{(0,4)}), \qquad u_x \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^2),$$
$$u_t \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^{(0,2)}), \qquad u_t \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^1), \qquad u_{tt} \in L_\infty(0,T;L_{2,+}).$$

Доказательство. Прежде всего продолжим функции u_0 и f на отрицательную полуось по x с сохранением класса и финитности. Рассмотрим начально-краевую задачу в $\Pi_T = (0,T)\times\Sigma$, $\Sigma = \mathbb{R}\times\Omega$, для уравнения (2.7) с начальным условием (1.2) на Σ и краевым условием (1.4) a) или b) на $\Gamma_T = (0,T)\times\mathbb{R}\times\partial\Omega$. Решение этой задачи обозначим через $w(t,x,y,z)$. Это решение можно построить с помощью преобразования и рядов Фурье по следующим формулам аналогично [8, лемма 2.1], а именно,

$$w(t,x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_{l=1}^{+\infty} e^{i\xi x}\psi_l(y,z)\widehat{u}(t,\xi,l)\,d\xi, \tag{2.8}$$

где

$$\widehat{u}(t,\xi,l) = \widehat{u_0}(\xi,l)e^{i(\xi^3-b\xi+\xi\lambda_l)t} + \int\limits_0^t \widehat{f}(\tau,\xi,l)e^{i(\xi^3-b\xi+\xi\lambda_l)(t-\tau)}\,d\tau,$$

$$\widehat{u_0}(\xi,l) \equiv \int\limits_\Sigma e^{-i\xi x}\psi_l(y,z)u_0(x,y,z)\,dP,$$

$$\widehat{f}(t,\xi,l) \equiv \int\limits_\Sigma e^{-i\xi x}\psi_l(y,z)f(t,x,y,z)\,dP.$$

Тогда в силу свойств функций ψ_l и пространств $\widetilde{H}^k(\Omega)$

$$(1+|x|)^n\partial_t^m\partial_x^j\partial_{y,z}^\nu w \in C([0,T];L_2(\Sigma))$$

для любых n, j и $2m+|\nu| \leqslant 10$. Кроме того, $w(t,x,\cdot,\cdot) \in \widetilde{H}^{10}(\Omega)$ для любых $t\in[0,T]$ и $x\in\mathbb{R}$.

Положим $\mu(t,y,z) \equiv -w(t,0,y,z)$ и рассмотрим в Σ_+ начально краевую задачу (2.7), (1.2)–(1.4) при $u_0 \equiv 0$, $f\equiv 0$, обозначим ее решение через $v(t,x,y,z)$.

Заметим, что $\partial_t^m\mu \in C([0,T];\widetilde{H}_+^{10-2m})$, $\partial_t^m\mu(0,y,z)\equiv 0$ при $m\leqslant 5$.

Положим $\Psi(t,x,y,z) \equiv \mu(t,y,z)\eta(1-x)$, $F(t,x,y,z) \equiv -(\Psi_t + b\Psi_x + \Delta\Psi_x)(t,x,y,z)$. Тогда $\partial_t^m\partial_x^j\Psi \in C([0,T];\widetilde{H}_+^{10-2m})$ при $m\leqslant 5$ и любом j, $\partial_t^m\partial_x^j F \in C([0,T];\widetilde{H}_+^{(0,8-2m)})$, $\partial_t^m F(0,x,y,z)\equiv 0$ при $m\leqslant 4$ и любом j.

Рассмотрим начально-краевую задачу (2.7), (1.2)–(1.4) для $u_0 \equiv 0$, $\mu \equiv 0$, $f \equiv F$. Решение этой задачи $V(t,x,y,z) = v(t,x,y,z) - \Psi(t,x,y,z)$ будем строить методом Галеркина.

Пусть $\{\varphi_j(x) : j = 1,2,\dots\}$ – произвольный базис пространства функций $\{\varphi \in H^3(\mathbb{R}_+) : \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}$. Приближенное решение рассматриваемой задачи будем искать в виде

$$V_k(t,x,y,z) = \sum_{j,l=1}^{k} c_{kjl}(t)\varphi_j(x)\psi_l(y,z), \tag{2.9}$$

исходя из условий для $t \in [0,T]$, $i,m = 1,\dots,k$

$$\begin{aligned}\int \bigl[V_{kt}\varphi_i\psi_m - V_k(b\varphi_i'\psi_m + \varphi_i'''\psi_m + \varphi_i'\Delta^{\perp}\psi_m)\bigr]\,dP \\ - \int F\varphi_i\psi_m\,dP = 0,\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$c_{kjl}(0) = 0. \tag{2.11}$$

Умножив равенство (2.10) на $2c_{kim}(t)$ и просуммировав по i и m, получим, что

$$2\int \bigl[V_{kt}V_k - V_k(bV_{kx} + 2V_{kxxx} + \Delta^{\perp}V_{kx}) - FV_k\bigr]\,dP = 0, \tag{2.12}$$

из которого после интегрирования по частям выводим равенство

$$\frac{d}{dt}\int V_k^2\,dP = 2\int FV_k\,dP, \tag{2.13}$$

откуда с учетом условия (2.11) следует, что равномерно по k

$$\|V_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leqslant c. \tag{2.14}$$

Далее, умножим равенство (2.10) на λ_m^4, тогда поскольку $\lambda_m^4\psi_m = (\Delta^{\perp})^4\psi_m$, находим, что

$$\begin{aligned}\int \bigl[V_{kt}\varphi_i(\Delta^{\perp})^4\psi_m - V_k(b\varphi_i'(\Delta^{\perp})^4\psi_m + \varphi_i'''(\Delta^{\perp})^4\psi_m + \varphi_i'(\Delta^{\perp})^5\psi_m)\bigr]\,dP \\ - \int F\varphi_i(\Delta^{\perp})^4\psi_m\,dP = 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

(именно эта выкладка потребовала, чтобы $\psi_m \in \widetilde{H}^{10}(\Omega)$, а следовательно, и соответствующие условия на область Ω). Умножив это равенство на $2c_{kim}(t)$ и просуммировав по i и m, получим аналогично

(2.12), что

$$2\int\left[V_{kt}(\Delta^{\perp})^4V_k - V_k(b(\Delta^{\perp})^4V_{kx} + 2(\Delta^{\perp})^4V_{kxxx} + (\Delta^{\perp})^5V_{kx})\right.$$
$$\left. - F(\Delta^{\perp})^4V_k\right] dP = 0, \quad (2.16)$$

откуда аналогично (2.13) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int((\Delta^{\perp})^2V_k)^2\,dP = 2\int(\Delta^{\perp})^2F\cdot(\Delta^{\perp})^2V_k\,dP, \qquad (2.17)$$

а тогда равномерно по k

$$\|(\Delta^{\perp})^2V_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leqslant c. \qquad (2.18)$$

Применив неравенство (1.7), получаем, что равномерно по k

$$\|V_k\|_{L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^{(0,4)})} \leqslant c. \qquad (2.19)$$

Далее, полагая в (2.10) $t=0$, умножая равенство на $c'_{kim}(0)$ и суммируя по i и m, находим, что

$$\int V_{kt}^2\big|_{t=0}\,dP = \int F\big|_{t=0}V_{kt}\big|_{t=0}\,dP, \qquad (2.20)$$

откуда следует, что

$$V_{kt}\big|_{t=0} = 0, \qquad (2.21)$$

так как $F\big|_{t=0} \equiv 0$. Продифференцировав равенство (2.10) по t, выводим равенство

$$\int\left[V_{ktt}\varphi_i\psi_m - V_{kt}(b\varphi_i'\psi_m + \varphi_i'''\psi_m + \varphi_i'\Delta^{\perp}\psi_m)\right]dP - \int F_t\varphi_i\psi_m dP = 0. \quad (2.22)$$

Умножив это равенство на $2c'_{kim}(t)$ и просуммировав по i и m, получим аналогично (2.12), (2.13) что

$$\frac{d}{dt}\int V_{kt}^2\,dP = 2\int F_tV_{kt}\,dP, \qquad (2.23)$$

а тогда равномерно по k

$$\|V_{kt}\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leqslant c. \qquad (2.24)$$

В свою очередь, умножим равенство (2.22) на λ_m^2, тогда поскольку $\lambda_m^2\psi_m = (\Delta^{\perp})^2\psi_m$, находим аналогично (2.15)–(2.18), что

$$\|\Delta^{\perp}V_{kt}\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leqslant c, \qquad (2.25)$$

откуда опять применяя (1.7), получаем, что равномерно по k

$$\|V_{kt}\|_{L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^{(0,2)})} \leqslant c. \tag{2.26}$$

Наконец, аналогично (2.21) из равенства (2.22) следует, что $V_{ktt}\big|_{t=0} = 0$, а потом после его дифференцирования аналогично (2.24) следует, что

$$\|V_{ktt}\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leqslant c. \tag{2.27}$$

Из оценок (2.19), (2.26) и (2.27) стандартным рассуждением находим функцию V как предел функций V_k по некоторой подпоследовательности, причем $V \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^{(0,4)})$, $V_t \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^{(0,2)})$, $V_{tt} \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $V\big|_{t=0} = 0$ и функция V является слабым решением рассматриваемой задачи в смысле аналога интегрального тождества (1.9).

Из соответствующего равенства (2.7) следует, что

$$V_{xxx} = F - V_t - bV_x - \Delta^\perp V_x. \tag{2.28}$$

Правая часть этого равенства в силу уже установленных свойств функции V принадлежит пространству $L_\infty(0,T;H_+^{(-1,0)})$, то есть $V_{xxx} \in L_\infty(0,T;H_+^{(-1,0)})$. Используя неравенство (2.1) находим, что $V_x \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$.

Далее, согласно (2.28)

$$\Delta^\perp V_{xxx} = \Delta^\perp F - \Delta^\perp V_t - b\Delta^\perp V_x - (\Delta^\perp)^2 V_x. \tag{2.29}$$

Правая часть этого равенства принадлежит пространству $L_\infty(0,T;H_+^{(-1,0)})$, то есть $(\Delta^\perp V)_{xxx} \in L_\infty(0,T;H_+^{(-1,0)})$. Используя неравенство (2.1) находим, что $\Delta^\perp V_x \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, а тогда согласно неравенству (1.7) $V_x \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^{(0,2)})$. Возвращаясь к равенству (2.28), находим, что $V_{xxx} \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, в итоге, $V_x \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^2)$.

Наконец, согласно (2.28)

$$V_{txxx} = F_t - V_{tt} - bV_{tx} - \Delta^\perp V_{tx}, \tag{2.30}$$

откуда аналогичным рассуждением получаем, что $V_{tx} \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$.

Таким образом, функция V обладает теми же свойствами гладкости, что и функция u в условии леммы. Кроме того, стандартным рассуждением получаем, что $V\big|_{x=0} = 0$.

Искомое решение $u = w + V + \Psi$. □

Лемма 2.5. *Слабое решение задачи* (2.7), (1.2)–(1.4) *единственно.*

Доказательство. Данное утверждение получается стандартным рассуждением метода Хольмгрена на основе нижеследующего результата о существовании регулярного решения сопряженной задачи. □

Лемма 2.6. *На области* Σ_+ *рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения*

$$u_t - bu_x - \Delta u_x = f(t,x,y,z) \tag{2.31}$$

с начальным условием (1.2) *и краевыми условиями* (1.4),

$$u\big|_{x=0} = \mu_0(t,y,z), \quad u_x\big|_{x=0} = \mu_1(t,y,z), \quad (t,y,z) \in B_T. \tag{2.32}$$

Пусть $u_0 \equiv 0$, $\mu_0 = \mu_1 \equiv 0$, $f \in C_0^\infty(\Pi_T^+)$. *Тогда существует решение этой задачи из того же класса, что и в лемме* 2.4.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2.4 вначале рассматривается начально-краевая задача на области Σ. Ее решение w строится по формуле аналогичной (2.8) с естественными изменениями, при этом свойства функции w не меняются.

Далее положим $\mu_0(t,y,z) \equiv -w(t,0,y,z)$, $\mu_1 \equiv -w_x(t,0,y,z)$ и рассмотрим начально-краевую задачу (2.31), (1.2), (1.4), (2.32) при $u_0 \equiv 0$, $f \equiv 0$.

Положим $\Psi(t,x,y,z) \equiv \mu_0(t,y,z)\eta(1-x) + \mu_1(t,y,z)x\eta(1-x)$ и определим функцию F так же, как в доказательстве леммы 2.4. Тогда функции Ψ и F обладают теми же свойствами, что и в доказательстве леммы 2.4.

Рассмотрим начально-краевую задачу (2.31), (1.2), (1.4), (2.32) для $u_0 \equiv 0$, $\mu_0 = \mu_1 \equiv 0$, $f \equiv F$. Ее решение $V(t,x,y,z)$ также будем строить методом Галеркина в виде (2.9), где в отличие от доказательства леммы 2.4 $\{\varphi_j(x) : j = 1,2,\ldots\}$ – базис пространства $\{\varphi \in H^3(\mathbb{R}_+) : \varphi(0) = 0\}$, исходя из условий (2.11) и

$$\int \big[V_{kt}\varphi_i\psi_m + V_k(b\varphi_i'\psi_m + \varphi_i'''\psi_m + \varphi_i'\Delta^\perp\psi_m)\big]\,dP - \int F\varphi_i\psi_m\,dP = 0,$$
$$t \in [0,T], \quad i,m = 1,\ldots,k. \tag{2.33}$$

После умножения равенства (2.33) на $2c_{kim}(t)$ и соответствующего суммирования в отличие от (2.13) получаем равенство

$$\frac{d}{dt}\int V_k^2\,dP + \int\limits_\Omega V_{kx}^2\big|_{x=0}\,dydz = 2\int FV_k\,dP, \tag{2.34}$$

которое все равно приводит к оценке (2.14). Аналогичные дополнительные неотрицательные слагаемые в левой части появляются при проведении последующих выкладок как и при доказательстве леммы 2.4, что также приводит к оценкам (2.19), (2.26), (2.27). На основании этих оценок предельным переходом находим функцию V, обладающую теми же свойствами гладкости, что и в доказательстве леммы 2.4 и являющуюся слабым решением рассматриваемой задачи в смысле интегрального тождества

$$\int_0^T\!\!\int \Big(V(\phi_t - b\phi_x - \Delta\phi_x) + F\phi\Big)\, dPdt = 0,$$

справедливого для любой функции $\phi \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}^2_+)$, такой что $\phi_t \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $\phi_x \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}^2_+)$, $\phi\big|_{t=T} \equiv 0$, $\phi\big|_{x=0} \equiv 0$.

Окончание доказательства практически дословно повторяет доказательство леммы 2.4 с естественными изменениями в равенствах (2.28)–(2.30). кроме того, здесь стандартными рассуждениями получаем, что также $V_x\big|_{x=0} = 0$. □

Лемма 2.7. *Пусть $\psi(x)$ – функция, такая что $\psi, \psi' \in \mathcal{A}$, $u_0 \in L^{\psi}_{2,+}$, $\mu \equiv 0$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, где $f_0 \in L_1(0,T;L^{\psi}_{2,+})$, $f_1 \in L_2(0,T;L^{\psi^2/\psi'}_{2,+})$. Тогда существуют (единственное) слабое решение задачи (2.7), (1.2)–(1.4) из пространства $X^{\psi}_w(\Pi^+_T)$ и функция $\mu_1 \in L_2(B_T)$, такие что для любой функции $\phi \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}^2_+)$, такой что $\phi_t \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $\phi_x \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}^2_+)$, $\phi\big|_{t=T} \equiv 0$, $\phi\big|_{x=0} \equiv 0$, справедливо равенство*

$$\int_0^T\!\!\int \Big[u(\phi_t + b\phi_x + \Delta\phi_x) + f_0\phi - f_1\phi_x\Big]\, dPdt + \int u_0\phi\big|_{t=0}\, dP - \int_{B_T} \mu_1\phi_x\big|_{x=0}\, dydzdt = 0. \tag{2.35}$$

Более того, для $t \in (0,T]$

$$\|u\|_{X^{\psi}_w(\Pi^+_t)} + \|\mu_1\|_{L_2(B_t)} \leqslant c(T)\Big(\|u_0\|_{L^{\psi}_{2,+}} + \|f_0\|_{L_1(0,t;L^{\psi}_{2,+})} + \|f_1\|_{L_2(0,t;L^{\psi^2/\psi'}_{2,+})}\Big), \tag{2.36}$$

и для почти всех $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}\int u^2(t,x,y,z)\psi(x)\,dP+\int(3u_x^2+u_y^2+u_z^2)\psi'\,dP-\int u^2\cdot(b\psi'+\psi''')\,dP \\ +\psi(0)\int\limits_{\Omega}\mu_1^2\,dydz = 2\int f_0u\psi\,dP-2\int f_1(u\psi)_x\,dP. \quad (2.37)$$

Если $f_1 \equiv 0$, *то в равенстве* (2.37) *можно положить* $\psi \equiv 1$.

Доказательство. Формально равенство (2.37) для $\mu_1 \equiv u_x\big|_{x=0}$ в предположении законности всех проводимых преобразований получается умножением равенства (2.7) на $2u(t,x,y,z)\psi(x)$ и последующим интегрированием по области Σ_+ (также оно справедливо и при $\psi \equiv 1$).

Для обоснования вначале предположим, что $u_0 \in C_0^\infty(\Sigma_+)$, $f_0, f_1 \in C_0^\infty(\Pi_T^+)$ и рассмотрим регулярное решение, построенное в лемме 2.4.

Для любого $r \geqslant 1$ положим

$$\psi_r(x) \equiv \psi(x)\eta(r+1-x)+\psi(r+1)\eta(x-r).$$

Ясно, что $\psi_r(x)=\psi(x)$ при $x \leqslant r$, $\psi_r(x)=\psi(r+1)$ при $x \geqslant r+1$, функция ψ_r ограничена вместе со всеми производными (в отличие от ψ) и $\psi_r(x) \to \psi(x)$ при $r \to +\infty$ для любого $x \geqslant 0$. Нетрудно также видеть, что ψ_r является допустимой весовой функцией (но не ψ_r'), причем соответствующие константы в (1.10), (1.11) равномерны по r. Кроме того $\psi_r(x) \leqslant c\psi(x)$ равномерно по r для любого $x \geqslant 0$.

Тогда выкладка, приводящая к равенству (2.37) для регулярных решений при замене ψ на ψ_r справедлива. Это означает, что, применяя неравенство Гроноулла, находим, что равномерно по r

$$\|u\psi_r\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})}+\big\||Du|\psi_r'\big\|_{L_2(\Pi_T^+)}+\|u_x\big|_{x=0}\|_{L_2(B_T)} \leqslant c,$$

а тогда перейдя к пределу при $r \to +\infty$, что

$$\int u^2(t,x,y,z)\psi(x)\,dP+\int\limits_0^t\!\!\int(3u_x^2+u_y^2+u_z^2)\psi'\,dPd\tau \\ -\int\limits_0^t\!\!\int u^2\cdot(b\psi'+\psi''')\,dPd\tau+\psi(0)\int\limits_0^t\!\!\int\limits_{\Omega}u_x\big|_{x=0}^2\,dydzd\tau$$

$$= \int u_0^2 \psi \, dP + 2 \int_0^t \int \big[f_0 u\psi - f_1 (u\psi)_x\big] \, dP d\tau. \quad (2.38)$$

Кроме того для функции u справедливо равенство (2.35) (с заменой μ_1 на $u_x\big|_{x=0}$). Заметим, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\Big| 2 \int f_1 u_x \psi \, dP \Big| \leqslant \varepsilon \int u_x^2 \psi' \, dP + \frac{1}{\varepsilon} \int f_1^2 \frac{\psi^2}{\psi'} \, dP. \quad (2.39)$$

Тогда из равенства (2.38) следует, что

$$\|u\|_{L_\infty(0,t;L^\psi_{2,+})} + \big\| |Du|\psi' \big\|_{L_2(\Pi_t^+)} + \|u_x\big|_{x=0}\|_{L_2(B_t)} \\ \leqslant c(T)\Big(\|u_0\|_{L^\psi_{2,+}} + \|f_0\|_{L_1(0,t;L^\psi_{2,+})} + \|f_1\|_{L_2(0,t;L^{\psi^2/\psi'}_{2,+})} \Big). \quad (2.40)$$

В общем случае, аппроксимируя функции u_0, f_0, f_1 указанными выше соответствующими гладкими функциями и переходя к пределу, получаем слабое решение рассматриваемой задачи $u \in L_\infty(0,T;L^\psi_{2,+})$, $|Du| \in L_2(0,T;L^{\psi'}_{2,+})$ и функцию $\mu_1 \in L_2(B_T)$, для которых справедливо равенство (2.35), неравенство (2.40) и равенство (2.38) (последние два – с заменой $u_x\big|_{x=0}$ на μ_1).

Заметим, что из равенства (2.38) следует, что функция

$$Y(t) \equiv \int u^2(t,x,y,z)\psi(x) \, dP$$

абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$, следовательно, для почти всех $t \in (0,T)$ справедливо равенство (2.37).

Наконец, из равенства (2.7) и оценки (2.40) следует, что $u_t \in L_1(0,T;H_+^{-3})$, а тогда стандартным рассуждением получаем, что $u \in C_w([0,T];L^\psi_{2,+})$. □

Замечание 2.1. Если слабое решение u обладает соответствующей дополнительной гладкостью, например, является сильным решением, то из равенства (2.35) следует, что $\mu_1 \equiv u_x\big|_{x=0}$.

Лемма 2.8. *Пусть $\psi(x)$ – функция, такая что $\psi, \psi' \in \mathcal{A}$, $u_0 \in \widetilde{H}_+^{1,\psi}$, $u_0\big|_{x=0} \equiv 0$, $\mu \equiv 0$, $f \equiv f_0 + f_1$, где $f_0 \in L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{1,\psi})$, $f_1 \in L_2(0,T;L^{\psi^2/\psi'}_{2,+})$. Тогда существуют (единственное) сильное решение* *задачи* (2.7), (1.2)–(1.4) $u(t,x,y,z)$ *из пространства* $X_w^{1,\psi}(\Pi_T^+)$ *и функция* $\mu_2 \in L_2(B_T)$, *такие что для любого* $t \in (0,T]$

$$\|u\|_{X_w^{1,\psi}(\Pi_t^+)} + \|\mu_2\|_{L_2(B_t)} \leqslant c(T)\Big[\|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{1,\psi}} + \|f_0\|_{L_2(0,t;\widetilde{H}_+^{1,\psi})} + \|f_1\|_{L_2(0,t;L_2^{\psi^2/\psi'})}\Big], \quad (2.41)$$

и для почти всех $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}\int |Du(t,x,y,z)|^2\psi(x)\,dP + \int (3u_{xx}^2 + 4u_{xy}^2 + 4u_{xz}^2 + (\Delta^\perp u)^2)\psi'\,dP - \int |Du|^2(b\psi' + \psi''')\,dP + \int\limits_\Omega (\mu_2^2\psi + 2\mu_2 u_x\psi' - u_x^2\psi'' + bu_x^2\psi)\big|_{x=0}\,dydz = 2\int (f_{0x}u_x + f_{0y}u_y + f_{0z}u_z)\psi\,dP + 2\int\limits_\Omega (f_0u_x\psi)\big|_{x=0}\,dydz - 2\int f_1[(u_x\psi)_x + u_{yy}\psi + u_{zz}\psi]\,dP. \quad (2.42)$$

Доказательство. В гладком случае для регулярных решений равенство (2.42), где $\mu_2 \equiv u_{xx}\big|_{x=0}$, получается умножением равенства (2.7) на $-2[(u_x\psi)_x + u_{yy}\psi + u_{zz}\psi]$ и последующем интегрировании по Σ_+.

Аналогично (2.39)

$$\Big|2\int f_1(\Delta u)\psi\,dP\Big| \leqslant \varepsilon\int |D^2u|^2\psi'\,dP + \frac{c}{\varepsilon}\int f_1^2\frac{\psi^2}{\psi'}\,dP. \quad (2.43)$$

Тогда обоснование утверждения леммы проводится полностью аналогично лемме 2.7 (с учетом уже полученной оценки (2.40)). □

Лемма 2.9. *Пусть условия леммы* 2.8 *выполнены в случае* $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ *для некоторого* $\alpha > 0$. *Рассмотрим сильное решение* $u \in X_w^{1,\psi}(\Pi_T^+)$ *задачи* (2.7), (1.2)–(1.4). *Пусть* $\rho(x)$ *– допустимая весовая функция, такая что* $\rho(x) \leqslant c\psi(x)$ *для некоторой константы* $c > 0$ *и всех* $x \geqslant 0$. *Тогда для почти всех* $t \in (0,T]$ *справедливо равенство*

$$-\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\int u^3(t,x,y,z)\rho(x)\,dP + \frac{b}{3}\int u^3\rho'\,dP + 2\int uu_x\Delta u\rho\,dP + \int u^2\Delta u\rho'\,dP = -\int fu^2\rho\,dP. \quad (2.44)$$

Доказательство. В гладком случае для регулярных решений (см. доказательство леммы 2.7) умножив равенство (2.7) на $-u^2(t,x,y,z)\rho(x)$ и проинтегрировав по Σ_+, получаем равенство (2.44).

В общем случае используем замыкание в пространстве $X_w^{1,\psi}(\Pi_T^+)$ (вначале проинтегрировав равенство (2.44) по t). Заметим, что согласно (2.4) (для $q=4$, $\psi_1=\psi_2=\psi$) так как $u\in L_\infty(0,T;H_+^{1,\psi})\cap L_2(0,T;H_+^{2,\psi})$ (здесь $\psi'\sim\psi$), то

$$u\in L_\infty(0,T;L_{4,+}^{\psi}),\qquad |Du|\in L_2(0,T;L_{4,+}^{\psi}),$$

и тогда переход к пределу как и в доказательстве леммы 2.7 легко обосновывается. $\square$

Для того, чтобы рассматривать задачу при ненулевой функции μ, введем специальные функции типа "граничных потенциалов". С этой целью рассмотрим алгебраическое уравнение

$$z^3-(\lambda_l-b)z+p=0,\qquad p=\varepsilon+i\theta\in\mathbb{C}.$$

Для $\varepsilon>0$ через $z_0(p,l)$ обозначим единственный корень этого уравнения, для которого $\operatorname{Re} z_0<0$. В статье [22, лемма 2.5] было показано, что существует

$$\lim_{\varepsilon\to+0} z_0(\varepsilon+i\theta,l)=r_0(\theta,l)=p(\theta,l)+iq(\theta,l),$$

где $r_0(\cdot,l)\in C(\mathbb{R})$, $r_0(-\theta,l)=\overline{r_0(\theta,l)}$, $p(\theta,l),q(\theta,l)\in\mathbb{R}$ и

$$p(\theta,l)\leqslant 0,\quad |r_0(\theta,l)|\leqslant c(|\theta|^{1/3}+\lambda_l^{1/2}+1),\qquad c=\mathrm{const}>0. \tag{2.45}$$

Очевидно, что $r_0(\theta,l)$ является корнем уравнения

$$r^3-(\lambda_l-b)r+i\theta=0. \tag{2.46}$$

В этой лемме были изучены и другие свойства r_0, из которых, в частности, следует, что существуют l_0 и $\theta_0\geqslant 1$, такие что 1) для $l>l_0$ и всех θ и 2) для $|\theta|>\theta_0$ и всех l справедливо неравенство

$$p(\theta,l)\leqslant -c_0(|\theta|^{1/3}+\lambda_l^{1/2}+1),\qquad c_0=\mathrm{const}>0. \tag{2.47}$$

Определение 2.1. *Пусть функция* $\mu\in L_2(B)$ *такова, что* $\widehat{\mu}(\theta,l)=0$ *при* $l\leqslant l_0$, $|\theta|\leqslant\theta_0$. *Положим при* $x\geqslant 0$, $(y,z)\in\overline{\Omega}$, $t\in\mathbb{R}$

$$J(t,x,y,z;\mu)\equiv\sum_{l=1}^{+\infty}\mathcal{F}_{\theta\to t}^{-1}\left[e^{r_0(\theta,l)x}\widehat{\mu}(\theta,l)\right](t)\psi_l(y,z), \tag{2.48}$$

где функция $\widehat{\mu}(\theta,l)$ *определена формулой* (1.14).

Лемма 2.10. *Если выполнены условия определения* 2.1, *то для любого* $x > 0$ *и любого целого* $n \geqslant 0$ *функция* $\partial_x^n J(\cdot, x, \cdot, \cdot; \mu) \in \widetilde{H}^{10/3,10}(B)$ *и для любого* $x_0 > 0$ *и любого* $s \in [0, 10]$

$$\sup_{x \geqslant x_0} \|\partial_x^n J(\cdot, x, \cdot, \cdot; \mu)\|_{\widetilde{H}^{s/3,s}(B)} \leqslant c(x_0, n, s)\|\mu\|_{L_2(B)}. \tag{2.49}$$

Кроме того, функция J *удовлетворяет уравнению* (2.7) *для* $f \equiv 0$ *при* $x > 0$, $(y, z) \in \overline{\Omega}$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В силу (2.48)

$$\partial_x^n J(t, x, y, z; \mu) \equiv \sum_{l=1}^{+\infty} \mathcal{F}_{\theta \to t}^{-1} \Big[r_0^n(\theta, l) e^{r_0(\theta, l)x} \widehat{\mu}(\theta, l) \Big](t) \psi_l(y, z), \tag{2.50}$$

а тогда согласно (2.45), (2.47)

$$\begin{aligned} &\|\partial_x^n J(\cdot, x, \cdot, \cdot; \mu)\|^2_{\widetilde{H}^{s/3,s}(B)} \\ &\quad \leqslant c \sum_{l=1}^{+\infty} \Big\| (|\theta|^{2/3} + \lambda_l + 1)^{(n+s)/2} e^{-c_0 x_0 (|\theta|^{1/3} + \lambda_l^{1/2} + 1)} \widehat{\mu}(\theta, l) \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant c(x_0)\|\mu\|^2_{L_2(B)}. \end{aligned}$$

Равенство (2.7) для $u \equiv J$, $f \equiv 0$ следует из (2.46). □

Лемма 2.11. *Пусть функция* $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B)$ *для некоторого* $s \in [0, 10]$, $\widehat{\mu}(\theta, l) = 0$ *при* $l \leqslant l_0$, $|\theta| \leqslant \theta_0$, *тогда для любого целого* $n \in [0, s]$ *существует* $\partial_x^n J(t, x, y, z; \mu) \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+^x; \widetilde{H}^{(s-n)/3,s-n}(B))$ *и равномерно по* $x \geqslant 0$

$$\|\partial_x^n J(\cdot, x, \cdot, \cdot; \mu)\|_{\widetilde{H}^{(s-n)/3,s-n}(B)} \leqslant c(s)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{s/3,s}(B)}. \tag{2.51}$$

Кроме того,

$$\lim_{x \to +0} J(t, x, y, z; \mu) = \mu(t, y, z). \tag{2.52}$$

Доказательство. Согласно (1.14) и (2.50)

$$\partial_x^n \widehat{J}(\theta, x, l; \mu) = r_0^n(\theta, l) e^{r_0(\theta, l)x} \widehat{\mu}(\theta, l) \tag{2.53}$$

и тогда утверждение леммы следует из (2.45). □

Лемма 2.12. *Пусть функция* $\mu \in \widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B)$ *для* $k=0$ *или* $k=1$, $\widehat{\mu}(\theta,l)=0$ *при* $l \leqslant l_0$, $|\theta| \leqslant \theta_0$, *тогда* $J(t,x,y,z;\mu) \in C_b(\mathbb{R}^t;\widetilde{H}^k_+)$ *и равномерно по* $t \in \mathbb{R}$

$$\|J(t,\cdot,\cdot,\cdot;\mu)\|_{\widetilde{H}^k_+} \leqslant \|\mu\|_{\widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B)}. \tag{2.54}$$

Доказательство. Будем исходить из равенства

$$\partial_x^n \partial_{y,z}^\nu J(t,x,y,z;\mu) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r_0^n(\theta,l) e^{it\theta} e^{r_0(\theta,l)x} \widehat{\mu}(\theta,l)\, d\theta\, \partial_{y,z}^\nu \psi_l(y,z), \tag{2.55}$$

справедливого, например, согласно (2.48) при $|\nu| \leqslant 10$, если функция μ равномерно по (y,z) принадлежит пространству Шварца быстро убывающих функций (общий случай получается замыканием).

Будем использовать следующее фундаментальное неравенство из [27]: если некоторая непрерывная функция $r(\kappa)$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} r(\kappa) \leqslant -\varepsilon|\kappa|$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $\kappa \in \mathbb{R}$, то

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} e^{r(\kappa)x} f(\kappa)\, d\kappa \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^x_+)} \leqslant c(\varepsilon) \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Заметим, что на носителе функции $\widehat{\mu}(\theta,l)$ справедливо неравенство (2.47), а тогда если использовать замену $\theta = \gamma^3$, то

$$\operatorname{Re} r_0(\gamma^3,l) \leqslant -c_0|\gamma|.$$

Имеем для $n=0$ или $n=1$ в силу ортонормальности системы функций ψ_l в пространстве $L_2(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\|\partial_x^n J(t,\cdot,\cdot,\cdot;\mu)\|_{L_{2,+}} \\ &\quad = \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_{l=1}^{+\infty} \Big\| \int_{\mathbb{R}} r_0^n(\theta,l) e^{it\theta} e^{r_0(\theta,l)x} \widehat{\mu}(\theta,l)\, d\theta \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^x_+)} \|\psi_l\|^2_{L_2(\Omega)} \Big)^{1/2} \\ &\quad = \frac{1}{2\pi} \Big(\sum_{l=1}^{+\infty} \Big\| \int_{\mathbb{R}} r_0^n(\gamma^3,l) e^{it\gamma^3} e^{r_0(\gamma^3,l)x} \widehat{\mu}(\gamma^3,l) 3\gamma^2\, d\gamma \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^x_+)} \Big)^{1/2} \\ &\quad \leqslant c \Big(\sum_{l=1}^{+\infty} \Big\| \int_{\mathbb{R}} (\gamma^2 + \lambda_l + 1)^{n/2} e^{-c_0|\gamma|x} |\widehat{\mu}(\gamma^3,l)| \gamma^2\, d\gamma \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^x_+)} \Big)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\leqslant c_1\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|(\gamma^2+\lambda_l+1)^{n/2}\widehat{\mu}(\gamma^3,l)\gamma^2\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\gamma)}\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant c_2\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|(|\theta|^{2/3}+\lambda_l+1)^{(n+1)/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2}=c_2\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(n+1)/3,n+1}(B)}. \tag{2.56}$$

Далее, поскольку

$$(\psi_{ly},\psi_{my})_{L_2(\Omega)}+(\psi_{lz},\psi_{mz})_{L_2(\Omega)}=0,\quad l\neq m,$$
$$\|\psi_{ly}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\psi_{lz}\|^2_{L_2(\Omega)}=\lambda_l,$$

то

$$\begin{aligned}
&\Big(\|J_y(t,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|^2_{L_{2,+}}+\|J_z(t,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|^2_{L_{2,+}}\Big)^{1/2}\\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|\int_{\mathbb{R}}e^{it\theta}e^{r_0(\theta,l)x}\widehat{\mu}(\theta,l)\,d\theta\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^x_+)}\lambda_l\Big)^{1/2}\\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|\int_{\mathbb{R}}e^{it\gamma^3}e^{r_0(\gamma^3,l)x}\widehat{\mu}(\gamma^3,l)3\gamma^2\,d\gamma\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^x_+)}\lambda_l\Big)^{1/2}\\
&\quad\leqslant c\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|\int_{\mathbb{R}}e^{-c_0|\gamma|x}|\widehat{\mu}(\gamma^3,l)|\gamma^2\,d\gamma\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^x_+)}\lambda_l\Big)^{1/2}\\
&\quad\leqslant c_1\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|\lambda_l^{1/2}\widehat{\mu}(\gamma^3,l)\gamma^2\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\gamma)}\Big)^{1/2}\\
&\quad\leqslant c_2\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|(|\theta|^{2/3}+\lambda_l+1)\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2}\\
&\quad=c_2\|\mu\|_{\widetilde{H}^{2/3,2}(B)}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

□

Лемма 2.13. *Пусть функция* $\mu\in\widetilde{H}^{(s-1/2)/3,s-1/2}(B)$ *для* $s\in[2,3]$, $\widehat{\mu}(\theta,l)=0$ *при* $l\leqslant l_0$, $|\theta|\leqslant\theta_0$, *тогда* $J(t,x,y,z;\mu)\in L_2(\mathbb{R}^t;H^s_+)$ *и*

$$\|J(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|_{L_2(\mathbb{R};H^s_+)}\leqslant\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(s-1/2)/3,s-1/2}(B)}. \tag{2.58}$$

Доказательство. Пусть целое $n\in[0,3]$, воспользуемся формулой (2.50):

$$\|\partial^n_x J(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|_{L_2(\mathbb{R}^t\times\Sigma_+)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|r_0^n(\theta,l)e^{r_0(\theta,l)x}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta\times\mathbb{R}_+)}\|\psi_l\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}\\
&= \Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|r_0^n(\theta,l)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2p(\theta,l)x}dx\Big)^{1/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant c\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|(|\theta|^{2/3}+\lambda_l+1)^{n/2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2c_0(|\theta|^{1/3}+\lambda_l^{1/2}+1)x}dx\Big)^{1/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant c_1\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|(|\theta|^{2/3}+\lambda_l+1)^{(n-1/2)/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant c_2\|\mu\|_{\widetilde{H}^{\max(0,n-1/2)/3,\max(0,n-1/2)}(B)}. \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

Далее, поскольку система функций $\Delta^\perp\psi_l$ ортогональна в $L_2(\Omega)$ и $\|\Delta^\perp\psi_l\|_{L_2(\Omega)}=\lambda_l$, то аналогично (2.59)

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta^\perp J(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|_{L_2(\mathbb{R}^t\times\Sigma_+)}\\
&\quad= \Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|e^{r_0(\theta,l)x}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta\times\mathbb{R}_+)}\|\Delta^\perp\psi_l\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}\\
&\quad= \Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2p(\theta,l)x}dx\Big)^{1/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\lambda_l^2\Big)^{1/2}\\
&\quad\leqslant c\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|\lambda_l\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2c_0(|\theta|^{1/3}+\lambda_l^{1/2}+1)x}dx\Big)^{1/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2}\\
&\leqslant c_1\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|(|\theta|^{2/3}+\lambda_l+1)^{3/4}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2}\leqslant c_1\|\mu\|_{\widetilde{H}^{1/2,3/2}(B)}. \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

Наконец, аналогично (2.57) и (2.60)

$$
\begin{aligned}
&\Big(\|\Delta^\perp J_y(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^t\times\Sigma_+)}+\|\Delta^\perp J_z(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^t\times\Sigma_+)}\Big)^{1/2}\\
&= \Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|e^{r_0(\theta,l)x}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta\times\mathbb{R}_+)}\big(\|\Delta^\perp\psi_{ly}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta^\perp\psi_{lz}\|^2_{L_2(\Omega)}\big)\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$= \Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2p(\theta,l)x}dx\Big)^{1/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\lambda_l^3\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big\|\lambda_l^{3/2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-2c_0(|\theta|^{1/3}+\lambda_l^{1/2}+1)x}dx\Big)^{1/2}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant c_1\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\big\|(|\theta|^{2/3}+\lambda_l+1)^{5/4}\widehat{\mu}(\theta,l)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)}\Big)^{1/2} \leqslant c_1\|\mu\|_{\widetilde{H}^{5/6,5/2}(B)}.$$

Дла получения оценки (2.58) при нецелых значениях s применяем интерполяцию. □

Следствие 2.1. *Пусть* $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B)$ *для некоторого* $s \in (2,3)$, $\widehat{\mu}(\theta,l)=0$ *при* $l \leqslant l_0$, $|\theta| \leqslant \theta_0$. *Тогда*

$$\|J(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mu)\|_{L_2(\mathbb{R}^t;C^1_{b,+})} \leqslant c(s)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{s/3,s}(B)}. \tag{2.61}$$

Доказательство. Данное утверждение очевидно следует из (2.58) и хорошо известного вложения $H_+^{k+3/2+\varepsilon} \subset C^k_{b,+}$. □

Для любой функции $\mu \in L_2(B)$ положим

$$\mu_0(t,y,z) \equiv \sum_{l=1}^{l_0}\mathcal{F}_{\theta^{-1}\to t}\big[\widehat{\mu}(\theta,l)\chi_{\theta_0}(\theta)\big](t)\,\psi_l(y,z),$$
$$\mu_1(t,y,z) \equiv \mu(t,y,z)-\mu_0(t,y,z),$$

где величина $\widehat{\mu}(\theta,l)$ определена формулой (1.14), χ_{θ_0} – характеристическая функция отрезка $[-\theta_0,\theta_0]$, а величины l_0 и θ_0 определены в неравенстве (2.47). Тогда функция μ_1 удовлетворяет условиям определения 2.1 и можно ввести функции

$$\Psi_0(t,x,y,z) \equiv \big[\mu_0(t,y,z)+J(t,x,y,z;\mu_1)\big]\eta(2-x), \tag{2.62}$$

$$F_0(t,x,y,z) \equiv -(\Psi_{0t}+b\Psi_{0x}+\Delta\Psi_{0x})(t,x,y,z). \tag{2.63}$$

Очевидно, что $\Psi_0 = F_0 \equiv 0$ при $x \geqslant 2$, $\Psi_0\big|_{x=0} \equiv \mu$.

Лемма 2.14. *Если* $\mu \in \widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B_T)$ *для* $k=0$ *или* $k=1$, *то* $\partial_x^n F_0 \in C([0,T];\widetilde{H}_+^{(0,8)})$ *для любого целого* $n \geqslant 0$,

$$\Psi_0 \in C([0,T];\widetilde{H}_+^k)\cap L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{k+1}), \tag{2.64}$$

а если $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_T)$ *для* $s > 2$, *то*

$$\Psi_0 \in L_2(0,T;C^1_{b,+}). \tag{2.65}$$

Доказательство. Данное утверждение является простым следствием установленных ранее свойств функций J. □

§3. Глобальная разрешимость

Для вспомогательного нелинейного уравнения

$$u_t + bu_x + \Delta u_x + (g(u))_x + (\Psi(t,x,y,z)u)_x = f(t,x,y,z) \tag{3.1}$$

в области Π_T^+ рассмотрим начально-краевую задачу с начальными и краевыми условиями (1.2)–(1.4). Слабое решение этой задачи понимается в смысле аналогичном определению 1.1.

Лемма 3.1. *Пусть* $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, $|g'(u)| \leqslant c$ $\forall u \in \mathbb{R}$, $\Psi \in L_2(0,T;L_{\infty,+})$, $u_0 \in L_{2,+}$, $f \in L_1(0,T;L_{2,+})$ *и* $u_0 = f \equiv 0$, *если* $x > R$ *для некоторого* $R > 0$, $\mu \equiv 0$. *Тогда задача* (3.1), (1.2)–(1.4) *имеет единственное решение* $u(t,x,y,z)$, *для которого* $u \in X_w^\psi(\Pi_T^+)$, $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$, *для любого* $\alpha > 0$.

Доказательство. Применим принцип сжимающих отображений. Зафиксируем $\alpha > 0$ и $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$. Для $t_0 \in (0,T]$ определим отображение Λ на $X_w^\psi(\Pi_{t_0}^+)$ следующим образом: $u = \Lambda v \in X_w^\psi(\Pi_{t_0}^+)$ – слабое решение линейной задачи

$$u_t + bu_x + \Delta u_x = f - (g(v))_x - (\Psi v)_x \tag{3.2}$$

в $\Pi_{t_0}^+$ с начальными и краевыми условиями (1.2)–(1.4).

Заметим, что $\psi^2/\psi' \sim \psi$, $|g(v)| \leqslant c|v|$ и, следовательно,

$$\|g(v)\|_{L_2(0,t_0;L_2^\psi)} \leqslant ct_0^{1/2}\|v\|_{L_\infty(0,t_0;L_2^\psi)}, \tag{3.3}$$

$$\|\Psi v\|_{L_2(0,t_0;L_2^\psi)} \leqslant \|\Psi\|_{L_2(0,t_0;L_{\infty,+})}\|v\|_{L_\infty(0,t_0;L_2^\psi)}, \tag{3.4}$$

а тогда в силу Леммы 2.7 отображение Λ существует. Более того, для функций $v, \widetilde{v} \in X_w^\psi(\Pi_{t_0}^+)$ согласно неравенству (2.36) аналогично (3.3), (3.4)

$$\begin{aligned}\|\Lambda v - \Lambda\widetilde{v}\|_{X_w^\psi(\Pi_{t_0}^+)} &\leqslant \big(ct_0^{1/2} + \|\Psi\|_{L_2(0,t_0;L_{\infty,+})}\big)\|v - \widetilde{v}\|_{L_\infty(0,t_0;L_2^\psi)} \\ &\leqslant \omega(t_0)\|v - \widetilde{v}\|_{X_w^\psi(\Pi_{t_0}^+)},\end{aligned}$$

где $\omega(t_0) \to 0$ при $t_0 \to +0$.

Так как константа в правой части этого неравенства равномерна по u_0, стандартным рассуждением решение продолжается по шагам на весь отрезок времени $[0,T]$. $\square$

Теперь перейдем к результату разрешимости из теоремы 1.1.

Доказательство. Доказательство существования слабого решения в теореме 1.1. Прежде всего обнулим граничные данные при $x=0$, для чего положим

$$U_0(x,y,z) \equiv u_0(x,y,z) - \Psi_0(0,x,y,z), \tag{3.5}$$

$$F(t,x,y,z) \equiv f(t,x,y,z) - F_0(t,x,y,z) - \Psi_0(t,x,y,z)\Psi_{0x}(t,x,y,z), \tag{3.6}$$

где Ψ_0, F_0 введены в (2.62), (2.63). Положим

$$U(t,x,y,z) \equiv u(t,x,y,z) - \Psi_0(t,x,y,z). \tag{3.7}$$

Тогда $u \in X_w^{\psi}(\Pi_T^+)$ является слабым решением задачи (1.1)–(1.4) тогда и только тогда, когда $U \in X_w^{\psi}(\Pi_T^+)$ – слабое решение начально-краевой задачи в Π_T^+ для уравнения

$$U_t + bU_x + \Delta U_x + UU_x + (\Psi_0 U)_x = F, \tag{3.8}$$

с начальными и краевыми условиями

$$U\big|_{t=0} = U_0, \qquad U\big|_{x=0} = 0 \tag{3.9}$$

и условиями (1.4) для функции U. Заметим, что в силу леммы 2.14 функции U_0, F удовлетворяют тем же условиям, что соответствующие функции u_0, f в условии теоремы.

Для $h \in (0,1]$ рассмотрим множество начально-краевых задач в Π_T^+

$$U_t + bU_x + U_{xxx} + U_{xyy} + \bigl(g_h(U)\bigr)_x + (\Psi_0 U)_x = F_h \tag{3.10}$$

с граничными условиями (1.4) и

$$U\big|_{t=0} = U_{0h}, \quad U\big|_{x=0} = 0, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered} F_h(t,x,y,z) \equiv F(t,x,y,z)\eta(1/h - x), \\ U_{0h}(x,y,z) \equiv U_0(x,y,z)\eta(1/h - x) \end{gathered} \tag{3.12}$$

и

$$g_h(u) \equiv \int_0^u \Bigl[\theta\eta(2 - h|\theta|) + \frac{2\operatorname{sign}\theta}{h}\eta(h|\theta| - 1)\Bigr]\, d\theta \tag{3.13}$$

(функция η определена в начале части 2). Заметим, что $g_h(u) = u^2/2$ если $|u| \leqslant 1/h$, $|g'_h(u)| \leqslant 2/h$ $\forall u \in \mathbb{R}$ и $|g'_h(u)| \leqslant 2|u|$ равномерно по h.

Согласно лемме 3.1 существует единственное решение этой задачи $U_h \in X_w^{e^{2\alpha x}}(\Pi_T^+)$ для $\alpha = c(1)/2$, где $c(1)$ – константа из (1.12) .

Теперь установим для функций U_h оценки, равномерные по h (для простоты будем опускать индекс h в промежуточных выкладках). Прежде всего заметим, что функции $g'(U)U_x, \Psi_0 U_x, \Psi_{0x}U, F \in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi})$, так что условия леммы 2.12 выполнены (при $f_1 \equiv 0$). Тогда из равенства (2.37) следует, что либо для $\rho(x) \equiv 1$, либо для $\rho(x) \equiv \psi(x)$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int U^2\rho\,dP + \int (3U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)\rho'\,dP \\
- \int U^2 \cdot (b\rho' + \rho''')\,dP + \rho(0)\int_\Omega \mu_1^2\,dydz = 2\int FU\rho\,dP \\
+ \int (\Psi_0\rho' - \Psi_{0x}\rho)U^2\,dP + 2\int\Big(\int_0^U g'(\theta)\theta\,d\theta\Big)\rho'\,dP. \quad (3.14)
\end{aligned}
$$

Выбирая $\rho \equiv 1$, находим, что равномерно по h (и также равномерно по Ω)

$$
\|u_h\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} + \|\mu_{1h}\|_{L_2(B_T)} \leqslant c. \quad (3.15)
$$

Далее, выберем $\rho \equiv \psi$. Заметим, что

$$
\Big|\int_0^U g'(\theta)\theta\,d\theta\Big| \leqslant c|U|^3.
$$

Применив интерполяционное неравенство (2.4) для $\psi_1 = \psi_2 \equiv \psi'$, выводим, что

$$
\begin{aligned}
\int |U|^3\psi'\,dP \leqslant \Big(\int U^2\,dP \int U^4(\psi')^2\,dP\Big)^{1/2} \\
\leqslant c\Big(\int U^2\,dP\Big)^{1/2}\Big[\Big(\int |DU|^2\psi'\,dP\Big)^{3/4}\Big(\int U^2\psi'\,dP\Big)^{1/4} + \int U^2\psi'\,dP\Big] \\
(3.16)
\end{aligned}
$$

(заметим, что здесь константа c также равномерна по Ω в случае а) краевого условия (1.4)). Так как нормы функций u_h в пространстве $L_{2,+}$ уже оценены в (3.15), из (3.14) и (3.16) следует, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{X_w^\psi(\Pi_T^+)} \leqslant c. \tag{3.17}$$

Наконец, запишем равенство (3.14) для $\rho(x) \equiv \rho_0(x-x_0)$ при любом $x_0 \geqslant 0$. Тогда по аналогии с (3.17) получаем, что (см. (1.13))

$$\sigma^+(|Du_h|;T) \leqslant c. \tag{3.18}$$

Из самого уравнения (3.10), оценки (3.15) и хорошо известного вложения $L_{1,+} \subset H_+^{-2}$ следует, что равномерно по h

$$\|u_{ht}\|_{L_1(0,T;H_+^{-3})} \leqslant c. \tag{3.19}$$

Оценки (3.17)–(3.19) позволяют стандартным рассуждением установить существование слабого решения задачи (1.1)–(1.4) $u \in X_w^\psi(\Pi_T^+)$, $\sigma^+(|Du|;T) < \infty$ (см., например, [16]) как предел функций u_h при $h \to +0$. $\square$

Перейдем к сильным решениям.

Лемма 3.2. *Пусть* $g(u) \equiv u^2/2$, $\Psi \in C([0,T];\widetilde{H}_+^1) \cap L_2(0,T;\widetilde{H}_+^2)$, $u_0 \in \widetilde{H}_+^1$, $u_0\big|_{x=0} \equiv 0$, $f \in L_2(0,T;\widetilde{H}_+^1)$ *и* $u_0 = \Psi = f \equiv 0$, *если* $x > R$ *для некоторого* $R > 0$, $\mu \equiv 0$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$ *существует* $t_0 \in (0,T]$, *для которого задача* (3.1), (1.2)–(1.4) *имеет единственное сильное решение* $u(t,x,y,z)$, *такое что* $u \in X_w^{1,\psi}(\Pi_{t_0}^+)$ *для* $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$.

Доказательство. Зафиксируем $\alpha > 0$ и $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$. Для $t_0 \in (0,T]$ определим отображение Λ на пространстве $X_w^{1,\psi}(\Pi_{t_0}^+)$ следующим образом: $u = \Lambda v \in X_w^{1,\psi}(\Pi_{t_0}^+)$ является сильным решением линейной задачи

$$u_t + bu_x + \Delta u_x = f - vv_x - (\Psi v)_x \tag{3.20}$$

в Π_{t_0} с начальными и краевыми условиями (1.2)–(1.4).

Заметим, что согласно (2.4) для $\psi_1 = \psi_2 \equiv \psi \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\|vv_x\|_{L_2(0,t_0;L_{2,+}^\psi)} &\leqslant \Big[\int_0^{t_0} \|v_x\psi^{1/2}\|_{L_{4,+}}^2 \|v\psi^{1/2}\|_{L_{4,+}}^2\,dt\Big]^{1/2} \\
&\leqslant c\Big[\int_0^{t_0} \Big(\big\||Dv_x|\big\|_{L_{2,+}^\psi}^{3/2} \|v_x\|_{L_{2,+}^\psi}^{1/2} + \|v_x\|_{L_{2,+}^\psi}^2\Big) \big\||Dv| + |v|\big\|_{L_{2,+}^\psi}^2\,dt\Big]^{1/2} \\
&\leqslant c_1 t_0^{1/8} \|v\|_{L_2(0,t_0;H_+^{2,\psi})}^{3/4} \|v\|_{L_\infty(0,t_0;H_+^{1,\psi})}^{5/4} \leqslant c_1 t_0^{1/8} \|v\|_{X_w^{1,\psi}(\Pi_{t_0}^+)}^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Аналогично

$$\|(\Psi v)_x\|_{L_2(0,t_0;L^{\psi}_{2,+})} \leqslant c_1 t_0^{1/8} \|\Psi\|_{X^{1,\psi}_w(\Pi^+_{t_0})} \|v\|_{X^{1,\psi}_w(\Pi^+_{t_0})}.$$

В частности, так как $\psi^2/\psi' \sim \psi$, то условия леммы 2.8 выполнены и, следовательно, отображение Λ существует. Аналогично (3.21)

$$\|vv_x - \widetilde{v}\widetilde{v}_x\|_{L_2(0,t_0;L^{\psi}_{2,+})} \leqslant c t_0^{1/8} \bigl(\|v\|_{X^{1,\psi}_w(\Pi^+_{t_0})} + \|\widetilde{v}\|_{X^{1,\psi}_w(\Pi^+_{t_0})}\bigr) \|v - \widetilde{v}\|_{X^{1,\psi}_w(\Pi^+_{t_0})}.$$

Тогда согласно неравенству (2.41) для малых t_0, зависящих от $\|u_0\|_{\widetilde{H}^{1,\psi}_+}$, отображение Λ является сжимающим на некотором шаре, откуда следует утверждение леммы. □

Доказательство. Доказательство существования сильного решения в Теореме 1.2. Введем функции U_0, F, U по формулам (3.5)–(3.7) и рассмотрим задачу (3.8), (3.9) (1.4) (для $u \equiv U$). В силу леммы 2.14 функции U_0, F лежат в тех же пространствах, что и соответствующие функции u_0 и f в условии теоремы. Кроме того,

$$U_0\big|_{x=0} = u_0\big|_{x=0} - \mu\big|_{x=0} \equiv 0.$$

Для $h \in (0,1]$ рассмотрим множество начально-краевых задач в Π^+_T

$$U_t + bU_x + U_{xxx} + U_{xyy} + UU_x + (\Psi_0 U)_x = F_h \tag{3.22}$$

с граничными условиями (3.11), (1.4), где функции F_h и U_{0h} заданы формулами (3.12). Согласно лемме 3.2 для $\alpha = c(1)/2$ существуют $t_0 = t_0(h) \in (0,T]$ и единственное решение этой задачи $u_h \in X^{1,e^{2\alpha x}}_w(\Pi^+_{t_0})$.

Повторив рассуждения в (3.13)– (3.17) для $g(u) \equiv u^2/2$, $\rho(x) \equiv 1$ и $\rho(x) \equiv \psi(x)$ находим, что равномерно по h и t_0

$$\|u_h\|_{X^{\psi}_w(\Pi^+_{t_0})} + \|u_{hx}\big|_{x=0}\|_{L_2(B_{t_0})} \leqslant c \tag{3.23}$$

(см. также замечание 2.1). Кроме того, повторив эти рассуждения для $\rho(x) \equiv e^{2\alpha x}$, находим, что равномерно по t_0

$$\|u_h\|_{X^{e^{2\alpha x}}_w(\Pi^+_{t_0})} \leqslant c(h). \tag{3.24}$$

Далее, так как условия леммы 2.8 и, следовательно, леммы 2.9 выполнены, запишем соответствующие равенства (2.42), (2.44) и сложим их, тогда либо для $\rho(x) \equiv \psi(x)$, либо для $\rho(x) \equiv e^{2\alpha x}$

$$\frac{d}{dt}\int \big(|DU|^2 - \frac{1}{3}U^3\big)\rho\,dP + \int (3U_{xx}^2 + 4U_{xy}^2 + 4U_{xz}^2 + (\Delta^{\perp}U)^2)\rho'\,dP$$
$$- \int |DU|^2(b\rho' + \rho''')\,dP + \int\limits_{\Omega} (\mu_2^2\rho + 2\mu_2 U_x\rho' - U_x^2\rho'' + bU_x^2\rho)\big|_{x=0}\,dydz$$
$$+ \frac{b}{3}\int U^3\rho'\,dP + \int U^2\Delta U\rho'\,dP = 2\int UU_x^2\rho'\,dP$$
$$+ \int (2F_xU_x + 2F_yU_y + 2F_zU_z - FU^2)\rho\,dP + \int\limits_{\Omega} (FU_x\rho)\big|_{x=0}\,dydz$$
$$- \frac{1}{4}\int U^4\rho'\,dP - \int\limits_{\Omega} (\Psi_0 U_x^2\rho)\big|_{x=0}\,dydz + \int \Psi_0|DU|^2\rho'\,dP$$
$$- \int \Psi_{0x}(3U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)\rho\,dP \ - 2\int (\Psi_{0y}U_y + \Psi_{0z}U_z)U_x\rho\,dP$$
$$-2\int (\Psi_{0xx}U_x + \Psi_{0xy}U_y + \Psi_{0xz}U_z)U\rho dP + \frac{1}{3}\int U^3(2\Psi_{0x}\rho - \Psi_0\rho')dP \tag{3.25}$$

(здесь и далее в промежуточных выкладках опускаем индекс h). Аналогично (3.16) с учетом уже установленных оценок (3.23) (в случае $\rho(x) \equiv \psi(x)$) или (3.24) (в случае $\rho(x) \equiv e^{2\alpha x}$)

$$\int |U|^3\rho\,dP \leqslant \Big(\int U^2\,dP\Big)^{1/2}\Big(\int U^4\rho^2\,dP\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant c\Big[\Big(\int |DU|^2\rho\,dP\Big)^{3/4}\Big(\int U^2\rho\,dP\Big)^{1/4} + \int U^2\rho\,dP\Big]$$
$$\leqslant c_1\Big(\int |DU|^2\rho\,dP\Big)^{3/4} + c_1 \tag{3.26}$$

(где здесь и далее для $\rho(x) \equiv \psi(x)$ оценки равномерные по t_0 и h, а для $\rho(x) \equiv e^{2\alpha x}$ вообще говоря зависят от h). Далее, согласно (2.4)

$$\Big|\int U^2\Delta U\rho'\,dP\Big| \leqslant c\Big(\int U^2\,dP\Big)^{1/2}\Big(\int |D^2U|^2\rho'\,dP\Big)^{1/2}\sup_{(x,y,z)\in\Sigma_+}|U|(\rho')^{1/2}$$
$$\leqslant c_1\Big(\int |D^2U|^2\rho'\,dP\Big)^{1/2}\Big[\Big(\int |D^2U|^2\rho'\,dP\Big)^{3/8}\Big(\int U^2\rho\,dP\Big)^{1/8}$$

$$+\Big(\int U^2\rho\,dP\Big)^{1/2}\Big] \leqslant \varepsilon\int |D^2U|^2\rho'\,dP + c(\varepsilon)\int U^2\rho\,dP, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}\Big|\int UU_x^2\rho'\,dP\Big| &\leqslant \Big(\int U^2\,dP\Big)^{1/2}\Big(\int |DU|^4(\rho')^2\,dP\Big)^{1/2} \\ &\leqslant c\Big[\Big(\int |D^2U|^2\rho' dP\Big)^{7/8}\Big(\int U^2\rho dP\Big)^{1/8} + \int U^2\rho dP\Big] \\ &\leqslant \varepsilon\int |D^2U|^2\rho'\,dP + c(\varepsilon)\int U^2\rho\,dP, \quad (3.28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big|\int U^4\rho'\,dP\Big| &\leqslant \int U^2\,dP \sup_{(x,y,z)\in\Sigma_+} U^2\rho' \\ &\leqslant c\Big[\Big(\int |D^2U|^2\rho' dP\Big)^{3/4}\Big(\int U^2\rho dP\Big)^{1/4} + \int |DU|^2\rho dP\Big] \\ &\leqslant \varepsilon\int |D^2U|^2\rho'\,dP + c(\varepsilon)\int U^2\rho\,dP, \quad (3.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int |F|U^2\rho\,dP &\leqslant c\Big(\int F^2\,dP\Big)^{1/2}\Big(\int U^4\rho^2\,dP\Big)^{1/2} \\ &\leqslant c_1\Big(\int F^2\,dP\Big)^{1/2}\Big[\Big(\int |DU|^2\rho\,dP\Big)^{3/4} + 1\Big].\end{aligned}$$

Далее, используя неравенство (2.3), находим:

$$\Big|\int_\Omega (FU_x\rho)\big|_{x=0}\,dydz\Big| \leqslant \int (F^2+F_x^2)\,dP + \varepsilon\int U_{xx}^2\rho'\,dP + c(\varepsilon)\int U_x^2\rho\,dP,$$

$$\Big|\int_\Omega (\Psi_0 U_x^2\rho)\big|_{x=0}\,dydz\Big| \leqslant \varepsilon\int U_{xx}^2\rho'\,dP + c(\varepsilon)\sup_{(x,y,z)\in\Sigma_+}\Psi_0^2\int U_x^2\rho\,dP,$$

$$\int \big(|D\Psi_0| + |\Psi_0|\big)|DU|^2\rho\,dP \leqslant c\|\Psi_0\|_{C^1_{b,+}}\int |DU|^2\rho\,dP,$$

$$\int \big(|\Psi_{0x}| + |\Psi_0|\big)|U^3|\rho\,dP \leqslant c\|\Psi_0\|_{C^1_{b,+}}\Big[\int |DU|^2\rho\,dP + 1\Big].$$

Наконец, так как $\rho(x) \leqslant c\rho'(x)$ для $x \in [0,2]$, то

$$\int |D^2\Psi_0| \cdot |DU| \cdot |U| \rho \, dP$$
$$\leqslant c\Big(\int |D^2\Psi_0|^2 \, dP\Big)^{1/2} \Big(\int U^4 \rho^2 \, dP \int |DU|^4 (\rho')^{7/4} \rho^{1/4} \, dP\Big)^{1/4}$$
$$\leqslant \varepsilon \int |D^2 U|^2 \rho' \, dP + c(\varepsilon) \Big[\int |D^2\Psi_0|^2 \, dP + 1\Big] \Big(\int |DU|^2 \rho \, dP + 1\Big).$$

Таким образом, из равенства (3.25) следует, что

$$\frac{d}{dt} \int \big(|DU|^2 - \frac{1}{3} U^3\big) \rho \, dP + c \int |D^2 U|^2 \rho' \, dP \leqslant \gamma(t) \Big[\int |DU|^2 \rho \, dP + 1\Big],$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)} \leqslant c$ в силу свойств функций Ψ_0 и F. Тогда, используя неравенство (3.26), находим, что равномерно по t_0

$$\|u_h\|_{X_w^{1,\rho}(\Pi_{t_{0h}}^+)} \leqslant c.$$

Применяя это неравенство для $\rho(x) \equiv e^{2\alpha x}$, получаем что это решение может продолжено на весь временной отрезок $[0,T]$, а тогда применяя его для $\rho(x) \equiv \psi(x)$, получаем, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{X_w^{1,\psi}(\Pi_T^+)} \leqslant c. \tag{3.30}$$

Аналогично (3.18) выводим, что

$$\sigma^+(|D^2 u_h|; T) \leqslant c. \tag{3.31}$$

Оценки (3.30), (3.31) и (3.19) позволяют построить искомое решение предельным переходом при $h \to +0$. □

§4. Единственность и непрерывная зависимость решений

Результат о единственности решения в Теореме 1.2 получается из следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть $\psi(x)$ – функция, для которой $\psi, \psi' \in \mathcal{A}$ и $\psi^{1/3}(x) \leqslant c_0 \psi'(x)$ $\forall x \geqslant 0$ для некоторой положительной константы c_0. Тогда для любых $T > 0$ и $M > 0$ существует константа $c = c(T,M) > 0$, такая что для любых сильных решений $u(t,x,y,z)$ и $\widetilde{u}(t,x,y,z)$ задачи (1.1)–(1.4), для которых $\|u\|_{X_w^{1,\psi}(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_w^{1,\psi}(\Pi_T^+)} \leqslant$*

M с соответствующими входными данными $u_0, \widetilde{u}_0 \in L^{\psi}_{2,+}$, $\mu, \widetilde{\mu} \in \widetilde{H}^{1/3,1}(B_T)$, $f, \widetilde{f} \in L_1(0,T;L^{\psi}_{2,+})$, справедливо следующее неравенство:

$$\|u-\widetilde{u}\|_{X^{\psi}_{w}(\Pi^+_T)} \leqslant c\bigl(\|u_0-\widetilde{u}_0\|_{L^{\psi}_{2,+}} + \|\mu-\widetilde{\mu}\|_{H^{1/3,1}(B_T)} + \|f-\widetilde{f}\|_{L_1(0,T;L^{\psi}_{2,+})}\bigr). \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть функции Ψ_0, F_0 определены формулами (2.62), (2.63), функции $\widetilde{\Psi}_0$, $\widetilde{F}_0$ аналогичным образом для $\widetilde{\mu}$ и $\Psi \equiv \Psi_0 - \widetilde{\Psi}_0$. Тогда, в частности,

$$\|\Psi\|_{X^{\psi}_{w}(\Pi^+_T)} \leqslant c(T)\|\mu-\widetilde{\mu}\|_{H^{1/3,1}(B_T)}. \quad (4.2)$$

Пусть $U_0 \equiv u_0 - \widetilde{u}_0 - \Psi\big|_{t=0}$, $F \equiv f - \widetilde{f} + F_0 - \widetilde{F}_0$, тогда

$$\|U_0\|_{L^{\psi}_{2,+}} \leqslant \|u_0-\widetilde{u}_0\|_{L^{\psi}_{2,+}} + c(T)\|\mu-\widetilde{\mu}\|_{H^{1/3,1}(B_T)}, \quad (4.3)$$

$$\|F\|_{L_1(0,T;L^{\psi}_{2,+})} \leqslant \|f-\widetilde{f}\|_{L_1(0,T;L^{\psi}_{2,+})} + c(T)\|\mu-\widetilde{\mu}\|_{H^{1/3,1}(B_T)}. \quad (4.4)$$

Функция $U(t,x,y) \equiv u(t,x,y) - \widetilde{u}(t,x,y) - \Psi(t,x,y)$ является слабым решением начально-краевой задачи в области Π^+_T для уравнения

$$U_t + bU_x + \Delta U_x = F - \frac{1}{2}(u^2 - \widetilde{u}^2)_x \quad (4.5)$$

с начальными и краевыми условиями (1.4),

$$U\big|_{t=0} = U_0, \qquad U\big|_{x=0} = 0. \quad (4.6)$$

Заметим, что так как $\psi'(x) \geqslant c\psi^{1/3}(x) \geqslant c\psi^{1/3}(0) > 0$ для любого $x \geqslant 0$, то $\psi^2(x)/\psi'(x) \leqslant c\psi^2(x)$ и тогда для любого $t \in [0,T]$

$$\|u^2\|_{L^{\psi^2/\psi'}_{2,+}} \leqslant c\|u\|^2_{\widetilde{H}^{1,\psi}_{+}},$$

в частности, $u^2 \in L_\infty(0,T;L^{\psi^2/\psi'}_{2,+})$. Применим лемму 2.7, где $f_1 \equiv -(u^2 - \widetilde{u}^2)/2$. Тогда из соответствующего неравенства (2.7) следует, что

$$\int U^2\psi\,dP + \int_0^t\!\!\int (3U_x^2 + U_y^2 + U_z^2)\psi'\,dPd\tau \leqslant \int U_0^2\psi\,dP$$
$$+c\int_0^t\!\!\int U^2\psi dPd\tau + 2\int_0^t\!\!\int FU\psi dPd\tau + \int_0^t\!\!\int (u^2-\widetilde{u}^2)(U\psi)_x\,dPd\tau. \quad (4.7)$$

Здесь

$$\int (u^2-\widetilde{u}^2)(U\psi)_x\,dP = -\frac{1}{2}\int (u+\widetilde{u})_x U^2\psi\,dP + \frac{1}{2}\int (u+\widetilde{u})U^2\psi'\,dP - \int \big((u+\widetilde{u})\Psi\big)_x U\psi\,dP.$$

Заметим, что из условия на функцию ψ следует, что

$$\Big(\frac{\psi}{\psi'}\Big)^{3/2} \leqslant c\psi,$$

а тогда

$$\begin{aligned}\int |u_x|(U^2+\Psi^2)\psi\,dP &\leqslant c\Big(\int u_x^2\Big(\frac{\psi}{\psi'}\Big)^{3/2}dP\Big)^{1/2}\Big(\int (U^4+\Psi^4)(\psi')^{3/2}\psi^{1/2}\,dP\Big)^{1/2}\\ &\leqslant c_1\Big(\int u_x^2\psi\,dP\Big)^{1/2}\Big[\Big(\int \big(|DU|^2+|D\Psi|^2\big)\psi'\,dP\Big)^{3/4}\\ &\quad\times\Big(\int (U^2+\Psi^2)\psi\,dP\Big)^{1/4} + \int (U^2+\Psi^2)\psi\,dP\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int |u\Psi_x U|\psi\,dP &\leqslant c\Big(\int u^4\psi^2\,dP\Big)^{1/4}\Big(\int U^4(\psi')^{3/2}\psi^{1/2}\,dP\Big)^{1/4}\Big(\int \Psi_x^2\psi\,dP\Big)^{1/2}\\ &\leqslant \varepsilon\int |DU|^2\psi'\,dP + c(\varepsilon)\int U^2\psi\,dP + \int \Psi_x^2\psi\,dP,\end{aligned}$$

где аналогично (4.2)

$$\|\Psi_x\|_{L_2(0,T;L^{\psi}_{2,+})} \leqslant c(T)\|\mu-\widetilde{\mu}\|_{H^{1/3,1}(B_T)},$$

поскольку $\Psi=0$ при $x\geqslant 2$. Тогда искомое неравенство следует из (4.7). □

§5. Убывание при больших временах

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $\psi(x)\equiv e^{2\alpha x}$ для некоторого $\alpha>0$. Рассмотрим множество решений $u_h\in X^{\psi}_w(\Pi_T^+)$ $\forall T>0$ начально-краевых задач для уравнений

$$u_t + bu_x + \Delta u_x + (g_h(u))_x = 0, \tag{5.1}$$

с начальными и краевыми условиями (1.4) и

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in L^{\psi}_{2,+}, \qquad u\big|_{x=0} = 0, \tag{5.2}$$

где функции g_h заданы формулой (3.13). Существование таких решений устанавливается аналогично лемме 3.1.

Прежде всего заметим, что из соответствующего аналога равенства (3.14) при $\rho \equiv 1$ следует, что для любого $t > 0$

$$\|u_h(t, \cdot, \cdot, \cdot)\|_{L_{2,+}} + \|\mu_{1h}\|_{L_2(B_t)} = \|u_0\|_{L_{2,+}}. \tag{5.3}$$

Теперь рассмотрим равенство (3.14) для $\rho(x) \equiv \psi(x)$, тогда (опять временно опускаем индекс h) для почти всех $t > 0$

$$\frac{d}{dt}\int u^2\psi\,dP + 2\alpha\int (3u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\psi\,dP + \int\limits_{\Omega} \mu_1^2\,dydz \\ \leqslant 2\alpha(b + 4\alpha^2)\int u^2\psi\,dP + 4\alpha\int\Bigl(\int\limits_0^u g'(\theta)\theta\,d\theta\Bigr)\psi\,dP. \tag{5.4}$$

Продолжая неравенство (3.16) (в котором ψ' заменено на ψ), находим с помощью (5.3), что равномерно по Ω, h и α

$$\Bigl|4\int\Bigl(\int\limits_0^u g'(\theta)\theta\,d\theta\Bigr)\psi\,dP\Bigr| \leqslant \frac{1}{2}\int |Du|^2\psi\,dP \\ + c_0\bigl(\|u_0\|_{L_{2,+}} + \|u_0\|^4_{L_{2,+}}\bigr)\int u^2\psi\,dP. \tag{5.5}$$

Применим неравенство Фридрихса (2.6), тогда

$$\frac{1}{2}\int (u_y^2 + u_z^2)\psi\,dP \geqslant \frac{\lambda_1}{2}\int u^2\psi\,dP. \tag{5.6}$$

Используя неравенства (5.4)–(5.6), находим, что равномерно по Ω, h и α

$$\frac{d}{dt}\int u^2\psi\,dP + \frac{\alpha\lambda_1}{2}\int u^2\psi\,dP + \alpha\int |Du|^2\psi\,dP + \int\limits_{\Omega}\mu_1^2\,dydz \\ \leqslant \alpha\bigl(b + 4\alpha^2 + c_0\|u_0\|_{L_{2,+}} + c_0\|u_0\|^4_{L_{2,+}}\bigr)\int u^2\psi\,dP. \tag{5.7}$$

Выберем $\Lambda = 8b$ если $b > 0$, а также α_0 и ϵ_0, удовлетворяющие неравенству $(4\alpha_0^2 + c_0\epsilon_0 + c_0\epsilon_0^4) \leqslant \lambda_1/8$, $\beta = \lambda_1/8$, тогда из неравенства (5.7) следует, что равномерно по h

$$\frac{d}{dt}\int u^2\psi\,dP + 2\alpha\beta\int u^2\psi\,dP + \alpha\int |Du|^2\psi\,dP + \int\limits_{\Omega}\mu_1^2\,dydz \leqslant 0, \quad (5.8)$$

откуда выводим, что равномерно по h

$$\|u_h(t.\cdot,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2^{\psi(x)}} \leqslant e^{-2\alpha\beta t}\|u_0\|^2_{L_2^{\psi(x)}} \quad \forall t \geqslant 0. \quad (5.9)$$

Перейдя к пределу при $h \to +0$, получаем оценку (1.16). □

Доказательство теоремы 1.4. Теперь предположим, что $u_0 \in \widetilde{H}_+^{1,\psi}$, $u_0(0,y,z) \equiv 0$. Рассмотрим единственное сильное решение $u \in X_w^{1,\psi}(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$ задачи (1.1)–(1.4). Тогда выкладки при доказательстве теоремы 1.3 могут быть проведены непосредственно для этого решения, в частности, для него справедливо неравенство (5.8), где $\mu_1 \equiv u_x\big|_{x=0}$. Более того, это неравенство может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{2\alpha\beta t}\int u^2\psi\,dP\Big] + e^{2\alpha\beta t}\Big[\int\limits_{\Omega} u_x^2\big|_{x=0}\,dydz + \alpha\int |Du|^2\psi\,dP\Big] \leqslant 0,$$

а тогда наряду с (1.16) получаем, что для любого $t > 0$

$$\int\limits_0^t e^{2\alpha\beta\tau}\Big[\int\limits_{\Omega} u_x^2\big|_{x=0}\,dydz + \alpha\int |Du|^2\psi\,dP\Big]\,d\tau \leqslant \|u_0\|^2_{L_{2,+}^{\psi}}. \quad (5.10)$$

Запишем для решения u соответствующее равенство (3.25):

$$\frac{d}{dt}\int \big(|Du|^2 - \frac{1}{3}u^3\big)\psi\,dP + 2\alpha\int (3u_{xx}^2 + 4u_{xy}^2 + 4u_{xz}^2 + (\Delta^\perp u)^2)\psi\,dP$$
$$- \int\limits_{\Omega}(\mu_2^2 + 4\alpha\mu_2 u_x - 4\alpha^2 u_x^2 + bu_x^2)\big|_{x=0}\,dydz = 2\alpha\int |Du|^2(b + 4\alpha^2)\psi\,dP$$
$$- \frac{2\alpha b}{3}\int u^3\psi dP - 2\alpha\int u^2\Delta u\psi dP + 4\alpha\int uu_x^2\psi dP - \frac{\alpha}{2}\int u^4\psi dP. \quad (5.11)$$

Оценвая интегралы в правой части этого равенства аналогично (3.26)–(3.29) и используя оценку (5.10), находим, что равномерно по t

$$e^{2\alpha\beta t}\int (u_x^2 + u_y^2 - \frac{1}{3}u^3)\psi\,dP \leqslant c,$$

где в силу (3.26)

$$\frac{1}{3}\int u^3\psi\,dxdy \leqslant c\Big[\Big(\int |Du|^2\psi\,dP\Big)^{3/4}\Big(\int u^2\psi\,dP\Big)^{1/4} + \int u^2\psi\,dP\Big],$$

откуда следует оценка (1.17). □

Автор выражает искреннюю благодарность анонимному рецензенту за труд по прочтению рукописи и полезные замечания.

Список литературы

1. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *О трехмерных солитонах.* — Журн. экспер. теорет. физ. **66**, No. 2 (1974), 594–597.
2. D. Han-Kwan, *From Vlasov–Poisson to Korteweg–de Vries and Zakharov–Kuznetsov.* — Comm. Math. Phys. **324**, No. 3 (2013), 961–993.
3. D. Lannes, F. Linares, J.-C. Saut, *The Cauchy problem for the Euler-Poisson system and derivation of the Zakharov–Kuznetsov equation.* — Progress Nonlinear Differential Equ. Appl. **84** (2013), 183–215.
4. F. Linares, J.-C. Saut, *The Cauchy problem for the 3D Zakharov–Kuznetsov equation.* — Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. A. **24**, No. 2 (2009), 547–565.
5. F. Ribaud, S. Vento, *Well-posedness results for the 3D Zakharov–Kuznetsov equation* — SIAM J. Math. Anal. **44**, No. 4 (2012), 2289–2304.
6. A. Grünrock, *Remark on the modified Zakharov–Kuznetsov equation in three space dimensions* — Math. Res. Lett. **21**, No. 1 (2014), 127–131.
7. L. Molinet, D. Pilod, *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov–Kuznetsov equation and applications.* — Ann. Inst. H. Poincaré (C) Analyse Non Linéaire. **32**, No. 2 (2015), 347–371.
8. A. V. Faminskii, *An initial-boundary value problem for three-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation.* — J. Differential Equ. **46**, No. 3 (2016), 3029–3055.
9. T. Kato, *Well-posedness for the generalized Zakharov–Kuznetsov equation in modulation spaces.* — J. Fourier Anal. Appl. **23**, No. 3 (2017), 612–655.
10. F. Linares, G. Ponce, *On special regularity properties of solutions of the Zakharov–Kuznetsov equation.* — Comm. Pure Appl. Anal. **17**, No. 4 (2018), 1561–1572.
11. F. Linares, J.P. Ramos, *The Cauchy problem for the L^2-critical generalized Zakharov–Kuznetsov equation.* — Comm. Partial Differential Equ. **46**, No. 9 (2021), 1601–1627.
12. S. Herr, S. Kinoshita, *Subcritical well-posedness results for the Zakharov–Kuznetsov equation in dimensions three and higher.* — Annales de'l Institut Fourier **73**, No. 3 (2023), 1203–1267.
13. A. V. Faminskii, *On the mixed problem for quasilinear equations of the third order.* — J. Math. Sci. **110** (2002), 2476–2507.
14. A. V. Faminskii, I. Yu. Bashlykova, *Weak solution to one initial-boundary value problem with three boundary conditions for quasilinear equations of the third order.* — Ukrainian Math. Bull. **5** (2008), 83–98.

15. J.-C. Saut, R. Temam, *An initial boundary-value problem for the Zakharov–Kuznetsov equation.* — Adv. Differential Equ. **15** (2010), 1001–1031.
16. A.V. Faminskii, *Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear evolution equations of an odd order.* — Adv. Differential Equ. **17** (2012), 421–470.
17. N. A. Larkin, M. V. Padilha, *Global regular solutions to one problem of Saut–Temam for the 3D Zakharov–Kuznetsov equation.* — Appl. Math. Optim. **77**, No. 2 (2018), 253–274.
18. J.-C. Saut, R. Temam, C. Wang, *An initial and boundary-value problem for the Zakharov–Kuznetsov equation in a bounded domain.* — J. Math. Phys. **53** (2012), 115612.
19. C. Wang, *Local existence of strong solutions to the 3D Zakharov–Kuznetsov equation in a bounded domain.* — Appl. Math. Optim. **69**, No. 1 (2014), 1–19.
20. N. A. Larkin, *Global regular solutions for the 3D Zakharov–Kuznetsov equation posed on a bounded domain.* — Differential Integral Equ. **29**, No. 7–8 (2016), 775–790
21. N. A. Larkin, *Global regular solutions for the 3D Zakharov–Kuznetsov equation posed on unbounded domains.* — J. Math. Phys. **56**, No. 9 (2015), 091508.
22. A.V. Faminskii, *Initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation.* — Ann. Inst. H. Poincaré (C) Analyse Non Linéaire. **35**, No. 5 (2018), 1235–1265.
23. В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных,* Наука, М., 1983.
24. C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations.* — Indiana Univ. Math. J. **40**, No. 1 (1991), 33–69.
25. A. V. Faminskii, *Initial-boundary value problems on a half-strip for the generalized Kawahara–Zakharov–Kuznetsov equation.* — Z. Angew. Math. Phys. **73** (2022), 93.
26. О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения,* Наука, М., 1996.
27. J. L. Bona, S. Sun, B.-Y. Zhang, *The initial-boundary-value problem for the KdV equation on a quarter plane.* — Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2001), 427–490.

Faminskii A. V. Initial-boundary value problems for the three-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation.

Initial-boundary value problems are considered for the Zakharov–Kuznetsov equation $u_t + bu_x + \Delta u_x + uu_x = f$ in the case of three spatial variables (x, y, z) posed on a domain $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, where Ω — is a bounded domain with respect to (y, z) with sufficiently smooth boundary. For $t > 0$ on the left boundary $x = 0$ the non-homogeneous Dirichlet boundary condition is set, while on $\partial\Omega$ — homogeneous either Dirichlet or Neumann condition. Results on existence of global in time weak and strong solutions, as well as on uniqueness of strong solutions are established. An initial function is assumed to belong to weighted (at $+\infty$) spaces L_2 in the case of weak solutions and H^1 in the case of strong solutions. Both power and exponential weights are allowed. In the case of Dirichlet boundary condition large-time decay of small solutions is also obtained.

Российский университет
дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая 6,
117198, Москва, Россия
E-mail: faminskiy_av@pfur.ru

Поступило 8 октября 2024 г.