Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 536, 2024 г.

В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин

ОБ АТТРАКТОРАХ МГД-ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ ЛАДЫЖЕНСКОЙ. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА АСИМПТОТИКУ СКОРОСТИ.

**Посвящается Нине Николаевне Уральцевой,
выдающемуся учёному,
прекрасному педагогу и замечательному человеку**

§1. Введение

При обтекании твёрдых тел жидкостью в тонком слое около поверхности тела возникает пограничный слой (см. рис. 1). Математиче-

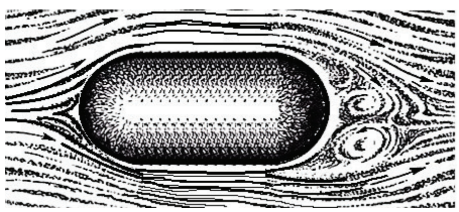

Рис. 1. Обтекание тела.

ские работы, связанные с исследованиями системы уравнений Прандтля ([1]) для пограничного слоя жидкости, появились во второй половине XX-го века (см. [2, 3], а также монографию [4] и библиографию в ней). Были рассмотрены и успешно решены основные краевые задачи для системы пограничного слоя. Кроме доказательства существования и единственности решений, исследовалось асимптотическое поведение

Ключевые слова: жидкость с реологическим законом О. А. Ладыженской, уравнения пограничного слоя жидкости, переменные Крокко, асимптотики, асимптотические разложения.

Результаты в параграфах 3 и 5 получены при поддержке РНФ (проект 20-11-20272). Результаты в разделе 4 частично поддержаны комитетом науки Министерства науки и высшего образования республики Казахстан (грант No. AP14869553). Результаты раздела 6 получены при финансовой поддержке гранта на создание и развитие МЦФПМ МГУ, соглашение No. 075-15-2022-284.

решений по различным направлениям в области существования. Это важно для установления естественных пространств функций, в которых задачи корректно разрешимы. Далее были решены задачи о пограничном слое в окрестности стационарной точки потока, задачи об образовании пограничного слоя, изучен пограничный слой электропроводной жидкости в присутсвии внешнего магнитного поля. Также были рассмотрены задачи усреднения для таких моделей с малым параметром, определяющим быстрые осцилляции параметров уравнений и граничных условий (см. [5–13]).

Для описания динамики вязких сплошных сред со сложной реологией применяются дифференциальные уравнения более сложной структуры по сравнению с системой Навье–Стокса. О. А. Ладыженская предложила модификацию уравнений Навье–Стокса, в которой учитывается влияние скорости потока на вязкость среды (см. [14]). При такой модификации меняются и уравнения, описывающие пограничный слой жидкости. Укажем некоторые работы, в которых изучается модифицированная система типа Прандтля см. [15–18] и др.). О других неньютоновских жидкостях см. [19–21].

Результаты об обтекании конфузора электропроводной жидкостью с реологическим законом О. А. Ладыженской получены в [22]. В настоящей работе пограничный магнитогидродинамический слой расматривается в окрестности стационарной точки потока.

Замена Крокко для МГД-жидкостей также изучалась в [23].

§2. Постановка задачи

В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений МГД-пограничного слоя имеет вид:

$$\begin{cases} \nu\Big(1+3d\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} + B^2(U-u) = -U\dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ν – кинематическая вязкость среды и d – малая положительная постоянная, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $B(x)$, $U(x)$ – заданные функции. Скорость внешнего потока $U(x)$ связана с давлением $p(x)$, компонентами электрического $E(x)$ и магнитного $B(x)$

полей соотношением

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} - EB - B^2U.$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(0,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x),\\ &u(x,y) \to U(x) \quad \text{при} \quad y \to \infty, \end{aligned} \tag{2}$$

где $U(0) = 0,\quad U(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0) > 0$, функции $u_0(x), v_0(x)$ предполагаются заданными, $B_x(x)$ ограничена при $0 \leqslant x \leqslant X$, $B(0) = B_0 = \text{const}$.

Определение 2.1. *Классическим решением задачи* (1), (2) *называются функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, обладающие следующими свойствами: u непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, v непрерывна в D по x,y, а в $\overline{D}$ по y; u и v имеют в D непрерывные производные, входящие в уравнение* (1)*; удовлетворяют поточечно уравнениям* (1) *и граничным условиям* (2).

§3. Замена переменных Крокко

Задачу (1), (2) сведем к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения (см. аналогично [24]).

Введем новые независимые переменные и новую неизвестную функцию

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{u(x,y)}{U(x)}, \quad w(\xi,\eta) = \frac{u_y(x,y)}{U(x)}. \tag{3}$$

Приведем задачу (1) к одному квазилинейному уравнению. Исключим v из системы (1), продифференцировав эти уравнения по y:

$$\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)u_{yyy} + \nu u_{yy}6du_{yy}u_y - u_yu_x - uu_{xy} - v_yu_y - vu_{yy} - B^2u_y = 0$$

Пусть

$$v = \frac{1}{u_y}\Big(-uu_x + \nu\big(1+3d(u_y)^2\big)u_{yy} + B^2(U-u) + UU_x\Big); \qquad v_y = -u_x.$$

Подставим v в продифференцированное уравнение:

$$\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)u_{yyy}-\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)\frac{u_{yy}^2}{u_y}+\nu u_{yy}^2 6du_y$$
$$-\Big(uu_{xy}-\frac{u_{yy}}{u_y}uu_x\Big)-\frac{u_{yy}}{u_y}UU_x-B^2u_y-\frac{u_{yy}}{u_y}B^2(U-u)$$
$$=\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)\frac{u_{yyy}u_y-u_{yy}^2}{u_y}-u\frac{u_{xy}u_y-u_{yy}u_x}{u_y}+6\nu du_yu_{yy}^2$$
$$-\frac{u_{yy}}{u_y}UU_x-\frac{u_{yy}}{u_y}B^2U+\frac{u_{yy}}{u_y}B^2u-B^2u_y=0$$

Вернемся к замене (3):

$$u=\eta U;\qquad u_y=wU;\qquad x=\xi$$
$$u_{yy}=w_\eta\eta_yU=w_\eta u_y;\qquad \frac{u_{yy}}{u_y}=w_\eta;$$
$$u_{yyy}=w_{\eta\eta}\eta_yu_y+w_\eta u_{yy}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy};$$
$$u_{yx}=wU_\xi+Uw_\xi+w_\eta u_\xi-w_\eta u\frac{U_\xi}{U};\qquad u_yu_{yy}^2=w_\eta^2w^3U^3;$$
$$\frac{u_{xy}u_y-u_xu_{yy}}{u_y}=w_\xi U+wU_\xi-w_\eta u_\xi+w_\eta u_\xi-w_\eta\eta U_\xi;$$
$$\frac{u_{yyy}u_y-u_{yy}^2}{u_y}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy}-\frac{u_{yy}}{u_y}u_{yy}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy}-w_\eta u_{yy}$$
$$=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U^2}U=w_{\eta\eta}w^2U;$$
$$-\frac{u}{U}\Big(\frac{u_{xy}u_y-u_xu_{yy}}{u_y}+\frac{u_{yy}}{u_y}UU_x\Big)=-\frac{u}{U}\big(w_\xi U+wU_\xi-w_\eta\eta U_\xi\big)-w_\eta U_\xi$$
$$=-\eta w_\xi U-\eta wU_\xi+\eta^2w_\eta U_\xi-w_\eta U_\xi=(\eta^2-1)w_\eta U_\xi-\eta w_\xi U-\eta wU_\xi;$$
$$\frac{u_{yy}}{u_y}B^2u-\frac{u_{yy}}{u_y}B^2U=w_\eta B^2u-w_\eta B^2U=w_\eta B^2\eta-w_\eta B^2=(\eta-1)B^2w_\eta;$$
$$B^2u_y=B^2\frac{u_y}{U}U=B^2wU.$$

Окончательно имеем

$$vu_y=-uu_x+\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)u_{yy}+UU_x+B^2U-B^2u$$
$$v\frac{u_y}{U}=-u\frac{u_x}{U}+\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)\frac{u_{yy}}{U}+U_x+B^2-B^2\frac{u}{U}$$

$$v\frac{u_y}{U} = -u\frac{u_x}{U} + \nu\big(\frac{u_y}{U} + 3d\frac{u_y^3}{U^3}U^2\big)\frac{u_{yy}}{u_y} + U_x + B^2 - B^2\frac{u}{U}$$
$$vw = -u\frac{u_\xi}{U} + \nu\big(w + 3dU^2w^3\big)w_\eta + U_\xi + B^2 - B^2\eta.$$

При $y = 0$ задано $u = 0$ и поэтому

$$\nu\big(1 + 3dU^2w^2\big)ww_\eta - vw + U_\xi + B^2 = 0.$$

Тогда получим одно квазилинейное уравнение пограничного слоя в форме Крокко

$$\nu\big(1 + 3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - \eta Uw_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w \\ + 6\nu dU^2w_\eta^2w^3 + (\eta - 1)B^2w_\eta - B^2Uw = 0 \quad (4)$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X,\, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi, 1) = 0, \quad \Big(\nu ww_\eta\big(1 + 3dU^2w^2\big) - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2\Big)\Big|_{\eta=0} = 0. \quad (5)$$

Определение 3.1. *Функция $w(\xi, \eta)$ называется решением задачи* (4), (5)*, если: w непрерывна в $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные частные производные $w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ в Ω; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; w удовлетворяет уравнению* (4) *в Ω и граничным условиям* (5).

Доказательство существования решения задачи (4), (5) проведем на основе метода прямых, т.е. дискретизацией по ξ и заменой уравнения (4) системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для любой функции $f(\xi, \eta)$ введем обозначение

$$f^k = f^k(\eta) \equiv f(kh, \eta),\ h = \text{const} > 0,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad k = 0, 1, \dots, [X/h].$$

Положим $U(x) = xV(x), \qquad V(x) > 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant X.$

Уравнение (4) с условиями (5) заменим системой дифференциальных уравнений

$$L_k(w) \equiv \nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big)(w^k)^2w^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{w^k - w^{k-1}}{h} \\ + (\eta^2 - 1)\big(V^k + khV^k_\xi\big)w^k_\eta - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big)w^k + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3 \\ + (\eta - 1)(B^k)^2w^k_\eta - (B^k)^2khV^kw^k = 0 \quad (6)$$

на интервале $0 < \eta < 1$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} w^k(1) = 0, \\ l_k(w) = \Big(\nu w^k w^k_\eta \big(1 + 3d(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2\big) - v^k_0 w^k + \\ \big(V^k + khV^k_\xi\big) + B^2\Big)\Big|_{\eta=0} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Докажем существование решения задачи (6), (7). В дальнейшем через M_i и K_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h.

Имеют место следующие леммы, доказательства которых вынесены в Appendix.

Лемма 3.1. *Задача* (6), (7) *имеет решение* $w^k(\eta)$, $k = 0, 1, ..., [X/h]$, *которое непрерывно при* $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ *и бесконечно дифференцируемо при* $0 \leqslant \eta < 1$, *если* $V_x > 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant X$ *и* V, V_x, v_0, B, B_x *ограничены при* $0 \leqslant x \leqslant X$. *Для этого решения справедлива оценка*

$$K_1(1-\eta) \leqslant w^k(\eta) \leqslant K_2(1-\eta)\sqrt{-\ln \mu(1-\eta)} \tag{8}$$

при $kh \leqslant X$, $h \leqslant h_0$, $h_0 = \mathrm{const} > 0$, $\mu = \mathrm{const}$, $0 < \mu < 1$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой будем использовать для последующих оценок решений задачи (6), (7). Пусть $V(0) = a$, $v_0(0) = b$, $B(0) = B_0$. Согласно сделанным ранее предположениям, $a > 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_\eta - \eta a Y + (\eta - 1)B_0^2 Y_\eta = 0, \quad 0 < \eta < 1, \tag{9}$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv \Big(\nu Y Y_\eta - bY + B_0^2 + a\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \qquad Y(1) = 0 \tag{10}$$

Имеет место утверждение (доказательство см. в Appendix).

Лемма 3.2. *Задача* (9), (10) *имеет решение со следующими свойствами:*

$$M_2(1-\eta)\sigma \leqslant Y(\eta) \leqslant M_1(1-\eta)\sigma \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{11}$$

$$M_1(1-\eta)(\sigma - K_4) \leqslant Y(\eta) \quad \textit{при} \quad 0 < \eta_0 \leqslant \eta < 1, \tag{12}$$

$$-M_4\sigma \leqslant Y_\eta(\eta) \leqslant -M_3\sigma, \tag{13}$$

$$|YY_{\eta\eta}| \leqslant M_5, \qquad YY_{\eta\eta} \leqslant -M_6, \tag{14}$$

$$\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1-\eta)}, \quad \mu = \mathrm{const}, \quad 0 < \mu < 1,$$
$$\nu M_1^2 = 2a, \quad \sigma(0) \geqslant \frac{|b|}{a} + 2, \quad \frac{K_4}{\sigma} < 1 \quad \textit{при} \quad \eta > \eta_0 = \mathrm{const} \geqslant 0.$$

Доказательство существования такой функции содержатся в [4, §2.1].

Следующее утверждение посвящено оценке функции w^k. Для удобства читателя доказательство вынесено в Appendix.

Лемма 3.3. *Предположим, что* $V(x) = a + xa_1(x)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$, *и функции* $a_1(x)$, $a_{1_x}(x)$, $b_1(x)$ *ограничены при* $0 \leqslant x \leqslant X$.

Тогда при $0 \leqslant kh \leqslant X$, *где* X *зависит от* $V(x)$, $v_0(x)$ *для решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (6), (7) *имеют место неравенства*

$$Ye^{-C_1 kh} \leqslant w^k(\eta) \leqslant Ye^{C_2 kh}, \tag{15}$$

где $Y(\eta)$ – *решение задачи* (9), (10).

Для обоснования предельного перехода в задаче (6), (7) при $h \to 0$ оценим величины

$$r^k = \frac{w^k - w^{k-1}}{h}, \qquad z^k = w^k_\eta, \qquad w^k w^k_{\eta\eta}$$

равномерно по h. Доказательство леммы см. Appendix.

Лемма 3.4. *Пусть выполнены предположения леммы 3.3; кроме того,* $a_{1xx}(x)$ *и* $b_{1x}(x)$ *ограничены.*

Тогда при достаточно малом X *и* $0 \leqslant kh \leqslant X$ *решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (6), (7) *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\frac{w^k - w^{k-1}}{h}\right| \leqslant C_3 Y(\eta), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{X}{h}, \tag{16}$$

$$Y_\eta e^{C_4 kh} \leqslant w^k_\eta \leqslant Y_\eta e^{-C_5 kh}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \tag{17}$$

$$\left|w^k w^k_{\eta\eta}\right| < C_6, \quad w^k w^k_{\eta\eta} < -C_7, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \tag{18}$$

где $Y(\eta)$ – *решение задачи* (9), (10).

Основной результат (теоремы существования и единственности) для задачи в переменных Крокко сформулирован ниже.

Теорема 3.1 (Существования)**.** *Пусть выполнены предположения лемм* 3.1–3.4.

Тогда задача (4), (5) *в области* Ω, *где* X *зависит от* U, v_0, ν, B *имеет решение положительное при* $\eta < 1$ *обладающее следующими* *свойствами:* $w(\xi,\eta)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega}$*; ее обобщенные производные* w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ *существуют и удовлетворяют неравенствам*

$$Ye^{-C_1\xi} \leqslant w \leqslant Ye^{C_2\xi}, \qquad Y_\eta e^{C_4\xi} \leqslant w_\eta \leqslant Y_\eta e^{-C_5\xi}, \tag{19}$$

$$\bigl|w_\xi(\xi,\eta)\bigr| \leqslant C_3Y, \qquad -C_6 \leqslant ww_{\eta\eta} \leqslant -C_7. \tag{20}$$

В любой замкнутой области, лежащей внутри Ω*, функция* w *и ее производные, входящие в уравнение* (4)*, удовлетворяют условию Гёльдера.*

Доказательство. Продолжим решения $w^k(\eta) \equiv w(kh,\eta)$ задачи (6), (7) линейно по ξ при $kh \leqslant \xi \leqslant (k+1)h$, $k = 0,1,2,\ldots,\frac{X}{h}$. В результате получим семейство функций $w_h(\xi,\eta)$, где

$$w_h(kh(1-\lambda)+(k+1)h\lambda,\eta) = w^k(\eta)(1-\lambda)+w^{k+1}(\eta)\lambda,$$
$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

В силу лемм 3.1–3.4, функции $w_h(\xi,\eta)$ удовлетворяют условию Липшица по ξ, $0 \leqslant \xi \leqslant X$, и при $0 \leqslant \eta \leqslant 1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ имеют равномерно по h ограниченные производные по η. По теореме Арцела получаем, что существует последовательность функций $w_{h_i}(\xi,\eta)$ равномерно сходящаяся в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant X, 0 \leqslant \eta \leqslant 1-\varepsilon$ к некоторой $w(\xi,\eta)$ при $h_i \to 0$. Так как $K_1(1-\eta) \leqslant w_h \leqslant K_2(1-\eta)\sigma$, то последовательность w_{h_i} может быть выбрана равномерно сходящейся к w в области Ω.

Из оценок величин (16)–(18) следует, что w имеет ограниченные обобщенные производные w_ξ, w_η и обобщенную производную $w_{\eta\eta}$ такую, что произведение $ww_{\eta\eta}$ ограничено, так как слабый предел ограниченной последовательности ограничен той же постоянной. Следовательно, w_η непрерывна по $\eta<1$. При этом последовательность w_{h_i} будем считать выбранной так, что производные w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ в области $\Omega = \{0<\xi<X, 0<\eta<1-\varepsilon\}$, $\varepsilon = \mathrm{const}>0$, являются слабыми пределами в $L_2(\omega_\varepsilon)$ соответствующих функций

$$h^{-1}\bigl(w_{h_i}(\xi+h_i,\eta)-w_{h_i}(\xi,\eta)\bigr), \quad w_{h_i\eta}, \quad w_{h_i\eta\eta}$$

Покажем, что уравнение (4) выполняется при $w(\xi,\eta)$ всюду в Ω. По построению функция $w_h^k(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\nu\Big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w_h^k)^2\Big)(w_h^k)^2w^k_{h\eta\eta}-\eta khV^k\frac{w_h^k-w_h^{k-1}}{h}\\ +(\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k_{h\eta}-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)w_h^k\\ +6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_{h\eta})^2(w_h^k)^3+(\eta-1)(B^k)^2w^k_{h\eta}-(B^k)^2khV^kw_h^k=0,\\ k=0,1,\dots,[X/h]=l(h).\end{gathered}\tag{21}$$

Пусть $\varphi(\xi,\eta)$ – бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой расположен внутри Ω. Умножив (21) на $h\varphi^k(\eta)\equiv h\varphi(kh,\eta)$, проинтегрировав по η от 0 до 1 и просуммировав по k от 1 до $l(h)$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{l(h)}h\int\limits_0^1\bigg[\nu\Big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w_h^k)^2\Big)(w_h^k)^2w^k_{h\eta\eta}\varphi^k\\ -\eta khV^k\frac{w_h^k-w_h^{k-1}}{h}\varphi^k+(\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k_{h\eta}\varphi^k\\ -\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)w_h^k\varphi^k+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_{h\eta})^2(w_h^k)^3\varphi^k\\ +(\eta-1)(B^k)^2w^k_{h\eta}\varphi^k-(B^k)^2khV^kw_h^k\varphi^k\bigg]d\eta=0,\\ \frac{w_h^k-w_h^{k-1}}{h}\equiv\Big(\frac{\Delta w_h}{h}\Big)^k.\end{gathered}\tag{22}$$

Обозначим через $\overline{f}(\xi,\eta)$ функцию, определенную в Ω и равную $f^k(\eta)=f(kh,\eta)$ при $(k-1)h<\xi\leqslant kh$, $k=1,2,\dots,[X/h]$. С учетом этого обозначения перепишем равенство (22) в виде

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega\bigg[\nu\Big(1+3d\xi^2\overline{V}^2\overline{w}_h^2\Big)\overline{w}_h^2\overline{w}_{h\eta\eta}\overline{\varphi}-\overline{\eta\xi V}\,\overline{\Big(\frac{\Delta w_h}{h}\Big)}\overline{\varphi}\\ +\overline{\varphi}\,\overline{(\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)}\,\overline{w}_{h\eta}-\overline{\varphi}\,\overline{\eta\big(V+\xi V_\xi\big)}\,\overline{w}_h+6\nu d\xi^2\overline{V}^2(\overline{w}_{h\eta})^2(\overline{w}_h)^3\overline{\varphi}\\ +(\eta-1)\overline{B}^2\overline{w}_{h\eta}\overline{\varphi}-\overline{B}^2\,\overline{\xi V}\,\overline{w}_h\overline{\varphi}\bigg]d\xi d\eta=0.\end{gathered}\tag{23}$$

Функции $\overline{w}_h$ равномерно сходятся к w при $h_i \to 0$, так как

$$|\overline{w}_h - w| = |\overline{w}_h - w_h + w_h - w| \leqslant M_{18} h\sigma + |w_h - w|.$$

Аналогично, заключаем, что $\overline{\eta\xi V}\overline{\varphi}$, $\overline{(\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)}\overline{\varphi}$, $\overline{\eta\big(V+\xi V_\xi\big)}\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{B}^2\overline{\varphi}$ равномерно сходятся к $\eta\xi V\varphi$, $(\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)\varphi$, $\eta\big(V+\xi V_\xi\big)\varphi$, φ, $B^2\varphi$ соответственно при $h_i \to 0$.

В области $\Omega_\varepsilon = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1-\varepsilon\}$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$ функции $\overline{\Delta w_h/h}$, $\overline{w}_{h\eta}$, $\overline{w}_{h\eta\eta}$ слабо сходится в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ к производным w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ соответственно при $h_i \to 0$. Переходя к пределу при $h_i \to 0$ в (23), получим

$$\int\limits_\Omega \Big[\nu(1+3d\xi^2V^2w^2)w^2w_{\eta\eta} - \eta\xi V w_\xi + (\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)w_\eta - \eta\big(V+\xi V_\xi\big)w \\ + 6\nu(w_\eta)^2w^3d\xi^2V^2 + (\eta-1)B^2w_\eta - B^2\xi V w\Big]\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0, \quad (24)$$

откуда в силу выбора φ следует, что уравнение (4) выполняется почти всюду в области Ω для функции $w(\xi,\eta)$.

Чтобы доказать, что производные функции w, входящие в уравнение, удовлетворяют условию Гёльдера в любой внутренней подобласти Ω, рассмотрим в прямоугольнике $\Delta = \{\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2,\ \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2\}$ уравнение

$$\nu\big(1+3d(\xi V)^2w^2\big)w^2S_{\eta\eta} - \eta\xi V S_\xi + (\eta^2-1)(V+\xi V_\xi)S_\eta \\ - \eta(V+\xi V_\xi)S + 6\nu d(\xi V)^2w^3S_\eta^2 + (\eta-1)B^2S_\eta - B^2\xi V S = 0 \quad (25)$$

с условиями

$$S\big|_{\xi=\xi_1} = w\big|_{\xi=\xi_1}, \qquad S\big|_{\eta=\eta_1} = w\big|_{\eta=\eta_1}, \qquad S\big|_{\eta=\eta_2} = w\big|_{\eta=\eta_2}, \qquad (26)$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < X$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. Поскольку w удовлетворяет условию Липшица, то задача (25), (26) в области Δ имеет решение S такое, что S_η ограничено в Δ, S_η, S_ξ, $S_{\eta\eta}$ удовлетворяют условию Гёльдера в любой внутренней подобласти Δ. Покажем, что $S = w$. Функция $W = S - w$ удовлетворяет

$$\nu\big(1+3d(\xi V)^2w^2\big)w^2W_{\eta\eta} - \eta\xi V W_\xi + (\eta^2-1)(V+\xi V_\xi)W_\eta \\ - \eta(V+\xi V_\xi)W + 6\nu d(\xi V)^2w^3W_\eta^2 + (\eta-1)B^2W_\eta - B^2\xi V W = 0 \quad (27)$$

и

$$W\Big|_{\xi=\xi_1} = W\Big|_{\eta=\eta_1} = W\Big|_{\eta=\eta_2} = 0. \tag{28}$$

Умножим уравнение (27) на $We^{-\alpha\xi}$, $\alpha = \text{const} > 0$, и проинтегрируем по Δ. Преобразуя некоторые члены интегрированием по частям, получим равенство

$$\int\limits_{\Delta} \Big[-\nu w^2 W_\eta^2 + \nu\big(w_\eta^2 + ww_{\eta\eta}\big)W^2 - 3\nu d\xi^2 V^2 w^4 W_\eta^2 + 6\nu d\xi^2 V^2\big(3w^2 w_\eta^2 + w^3 w_{\eta\eta}\big)W^2 + \eta(\xi V)_\xi \frac{1}{2}W^2 - \eta\xi V\frac{1}{2}W^2\alpha - \eta(V+\xi V_\xi)W^2 - \eta(V+\xi V_\xi)W^2 - 3\nu d\xi^2 V^2 w^3 W_{\eta\eta}W^2 - 9\nu d\xi^2 V^2 w^2 w_\eta W_\eta W^2 - \frac{1}{2}B^2W^2 - B^2\xi V W^2\Big] e^{-\alpha\xi} d\xi d\eta - \int\limits_{\xi=\xi_2} \eta\xi V\frac{1}{2}W^2 e^{-\alpha\xi} d\eta = 0,$$

а из него неравенство

$$\int\limits_{\Delta} \Big[\nu\big(w_\eta^2 + ww_{\eta\eta}\big) + 6\nu d\xi^2 V^2\big(3w^2 w_\eta^2 + w^3 w_{\eta\eta}\big) + \frac{1}{2}\eta(\xi V)_\xi - \frac{1}{2}\eta\xi V\alpha - 2\eta(V+\xi V_\xi) - \frac{1}{2}B^2 - B^2\xi V\Big] W^2 e^{-\alpha\xi} d\xi d\eta \geqslant 0 \tag{29}$$

При достаточно большом α выражение в квадратных скобках может быть сделано отрицательным, и тогда из (29) следует, что $W \equiv 0$ и $S = w$. Теорема существования доказана. □

Теорема 3.2 (Единственности)**.** *Задача* (4), (5) *в области* Ω *может иметь лишь одно неотрицательное решение* w*, обладающее свойствами:* w *непрерывна в* Ω*;* w_η, $w_{\eta\eta}$, w_ξ*, непрерывны во внутренних точках* Ω*;* $w > 0$ *при* $\eta = 0$*;* w_η *непрерывна по* η *при* $\eta = 0$*.*

Доказательство. Предположим, что задача имеет два таких решения w_1 и w_2. Их разность $\overline{w} = w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$\nu w_1^2\overline{w}_{\eta\eta} + \nu(w_1+w_2)w_{2\eta\eta}\overline{w} + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4\overline{w}_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2(w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3)w_{2\eta\eta}\overline{w} - \eta\xi V\overline{w}_\xi + (\eta^2-1)(V+\xi V_\xi)\overline{w}_\eta - \eta(V+\xi V_\xi)\overline{w} + 6\nu d\xi^2 V^2(w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2)w_{1\,\eta}^2\overline{w} + 6\nu d\xi^2 V^2(w_{1\eta} + w_{2\eta})w_2^3\overline{w}_\eta + (\eta-1)B^2\overline{w}_\eta - B^2\xi V\overline{w} = 0$$

с граничными условиями

$$\overline{w}\Big|_{\eta=1} = 0,$$

$$\Big(\nu\overline{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 \overline{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1+w_2) w_{2\eta}\overline{w} - \frac{(V+\xi V_\xi + B^2)\overline{w}}{w_1 w_2}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Для $W = \overline{w}e^{-\alpha\xi}$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$, имеем следующее уравнение в области Ω:

$$\begin{gathered}\nu w_1^2 W_{\eta\eta} + \nu(w_1+w_2)w_{2\eta\eta}W + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 W_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 \\ + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta} W - \eta\xi V W_\xi - \alpha\eta\xi V W + (\eta^2-1)(V+\xi V_\xi)W_\eta \\ - \eta(V+\xi V_\xi)W + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 W \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 W_\eta + (\eta-1)B^2 W_\eta - B^2 \xi V W = 0, \quad (30)\end{gathered}$$

а также граничные условия

$$W\Big|_{\eta=1} = 0, \quad (31)$$

$$\Big(\nu W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1+w_2) w_{2\eta} W - \frac{(V+\xi V_\xi + B^2)W}{w_1 w_2}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Для упрощения дальнейших рассуждений подчеркнём, что уравнение (30) является параболическим и может быть переписано в виде

$$\begin{gathered}\eta\xi V W_\xi = \Big(\nu w_1^2 + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4\Big) W_{\eta\eta} \\ + \Big((\eta^2-1)(V+\xi V_\xi) + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 + (\eta-1)B^2\Big) W_\eta \\ + \Big(\nu(w_1+w_2)w_{2\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta} - \eta(V+\xi V_\xi) \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 - B^2\xi V - \alpha\eta\xi V\Big) W, \quad (32)\end{gathered}$$

Отметим, что в граничном условии при $\eta = 0$ коэффициент при W_η строго положителен, а коэффициент при W строго отрицателен, поэтому ясно, что из $W_{\max}(\xi,0) > 0$ следует, что $W_\eta(\xi,0) > 0$, а из $W_{\max}(\xi,0) < 0$ следует, что $W_\eta(\xi,0) < 0$, что приводит к противоречию. Из условия (20) следует, что $w_{2\eta\eta} < 0$ при $\eta < 1$, а $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$, поэтому при достаточно большом α коэффициент при W в (32) отрицателен, $(V + \xi V_\xi) > 0$ по условию. По принципу максимума (см. принцип максимума для уравнений с неотрицательной квадратичной формой в лемме 1.1.2 и теореме 1.1.2 [25, глава 1, §. 1.1], а также [26]) из (32), (31) следует, что W не может иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума при $0 \leqslant \eta < 1$. Следовательно, $W \equiv 0$ и $\overline{w} \equiv 0$. □

Замечание 3.1. В доказательстве при применении принципа максимума мы воспользовались следующим соображением. Мы решаем задачу при достаточно малом ξ. В (32) имеем $-B^2\xi V = O(\xi)$, а возможные «нехорошие» слагаемые в сумме имеют порядок $O(\xi^2)$. При $\eta = 0$ работает граничное условие (см рассуждения выше). При $\xi = 0$ у нас никаких условий нет и они не важны, так как в этой точке (прямой) уравнение вырождается и знак производной W_ξ в общем балансе знаков при применении принципа максимума не участвует (см. [26]).

§4. Существование и единственность решения исходной задачи

Обращая преобразование переменных (3), что возможно в силу свойств решения задачи (4), (5), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (1), (2) в смысле данного нами определения. Имеет место теорема.

Теорема 4.1 (Существования)**.** *Предположим, что*

$$U(x) = x\big(a + xa_1(x)\big), \quad v_0(x) = b + xb_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant X,$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, $b = \mathrm{const}$; $U > 0$ *при* $x > 0$; a_1, a_{1x}, a_{1xx}, b_1, b_{1x} *ограничены,* B *непрерывно дифференцируема.*

Тогда задача (1), (2) *в области* D, *при* X, *зависящем от* U, v_0 *имеет решение* u, v, *которое обладает следующими свойствами:* $u_y > 0$ *при* $y \geqslant 0$ *и* $x > 0$; $\frac{u}{U}$, $\frac{u_y}{U}$ *ограничены и непрерывны в* $\overline{D}$; $u > 0$ *при* $y > 0$ *и* $x > 0$; $u \to U$ *при* $y \to \infty$, $u(x,0) = u(0,y) = 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y \geqslant 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy} *ограничены и непрерывны в* $\overline{D}$; v *непрерывна в* $\overline{D}$ *по* y *при* $x > 0$; v *непрерывна по* x *и* y *внутри* D; u_{yyy} *ограничена в* $\overline{D}$; u_{xy} *ограничена в* D *при ограниченных* y; u_{xy} *и* u_{yyy} *непрерывны в* $\overline{D}$; $\frac{u_{yy}}{u_y}$ *непрерывна в* D *по* y; *имеют место оценки*

$$U(x)Y\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-C_1x} \leqslant u_y \leqslant U(x)Y\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2x},$$
$$Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_4x} \leqslant \frac{u_{yy}}{u_y} \leqslant Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-C_5x},$$

$$e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right]} \leqslant 1-\frac{u}{U} \leqslant e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right]}.$$

где $Y(\eta)$ – *решение задачи* (9), (10).

Доказательство. Теорема 4.1 устанавливается на основе теоремы 3.1. Для начала покажем, что если $w(\xi,\eta)$ обладает свойствами, указанными в теореме 3.1, то можно с помощью замены (3) перейти от решения задачи (4), (5) к решению задачи (1), (2), существование которого утверждается в теореме 4.1.

Согласно (3) имеем

$$w(\xi,\eta) = w(x,\frac{u}{U}) = \frac{u_y}{U}, \tag{33}$$

$$x=\xi, \qquad y=\int\limits_0^{\frac{u(x,y)}{U(x)}} \frac{ds}{w(x,s)}. \tag{34}$$

Отсюда в силу непрерывности $w(\xi,\eta)$ в $\overline{\Omega}$ и неравенства $w>0$ при $0\leqslant\eta<1$ получаем, что $\frac{u(x)}{U(x)}$ непрерывна и ограничена в $\overline{D}$,

$$u(0,y)=0, \quad u(x,0)=0, \quad u(x,y)\to U(x) \quad \text{при} \quad y\to\infty,$$

u_y непрерывна и ограничена в $\overline{D}$, $u_y>0$ при $y\geqslant 0$, $x\geqslant 0$. Из (33), (34) находим, что

$$\begin{aligned}
u_y &= wU; \qquad \frac{u_{yy}}{u_y} = w_\eta;\\
u_{yy} &= Uw_\eta\eta_y = w_\eta u_y;\\
u_{yyy} &= w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U} + w_\eta u_{yy};\\
u_{xy} &= wU_\xi + Uw_\xi + u_\xi w_\eta - uw_\eta\frac{U_\xi}{U};\\
u_x &= u\frac{U_x}{U} + wU\int\limits_0^{\frac{u(x,y)}{U(x)}}\frac{w_\xi(x,s)}{w^2(x,s)}ds.
\end{aligned} \tag{35}$$

Из свойств функции w и ее производных ввиду равенств (35) следует, что обобщенные производные u_x, u_{yy}, u_{yyy} ограничены в D, u_{xy} ограничена при конечных y. Неравенства для u, утверждаемые теоремой

4.1, следуют из оценок функций w, w_ξ, w_η и $ww_{\eta\eta}$. Непрерывность u_x и u_{yy} по y следует из (35). Функцию $v(x,y)$ определим равенством

$$v = \frac{1}{u_y}\Big(- uu_x + \nu u_{yy}\big(1 + 3du_y^2\big) + B^2(U-u) + UU_x\Big). \tag{36}$$

Покажем, что u и v, определенные формулами (34), (36), удовлетворяют системе (1) и условиям (2).

Функция v имеет производную по y в D. Дифференцируя (36) по y, получим

$$v_yu_y + vu_{yy} + u_yu_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - 6\nu du_yu_{yy}^2 - 3\nu du_y^2u_{yyy} + B^2u_y = 0,$$

$$\begin{aligned} v_yu_y + \frac{u_{yy}}{u_y}\Big(- uu_x + \nu u_{yy}\big(1 + 3du_y^2\big) + UU_x\Big) + u_yu_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy}& \\ - 6\nu du_yu_{yy}^2 - 3\nu du_y^2u_{yyy} + B^2u_y = 0.& \end{aligned} \tag{37}$$

Функция $w(\xi,\eta) = \frac{u_y}{U}$ удовлетворяет уравнению (4). Заменяя в уравнении (4) производные w через производные от u, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{U}\Big\{\nu\big(1 + 3du_y^2\big)\frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - \frac{(u_{xy}u_y - u_xu_{yy})u}{u_y} - \frac{uU_x(uu_{yy} - u_y^2)}{Uu_y}& \\ + \frac{(u^2-U^2)U_x}{U}\frac{u_{yy}}{u_y} + uu_y - \frac{uu_yU_x}{U} + 6\nu du_{yy}^2u_y - B^2u_y\Big\} = 0.& \end{aligned} \tag{38}$$

Умножив (38) на U и складывая равенства (37) и (38), получим

$$u_x + v_y = 0. \tag{39}$$

Уравнения (36), (39) представляют систему (1). Покажем, что $v(x,y)$ удовлетворяет условию

$$v(x,0) = v_0(x).$$

Из (5) следует, что

$$v_0 = \left[\frac{\nu ww_\eta(1 + 3dU^2w^2) + U_x + B^2}{w}\right]\bigg|_{\eta=0}. \tag{40}$$

Из равенств (36), (40) получаем

$$v(x,0) = \left[\frac{\nu(1+3du_y^2)u_{yy} + UU_x + UB^2}{u_y}\right]\Bigg|_{y=0}$$
$$= \left[\frac{\nu(1+3dU^2w^2)ww_\eta + U_x + B^2}{w}\right]\Bigg|_{\eta=0} = v_0(x).$$

Здесь мы использовали непрерывность функций u, u_x, u_y, u_{yy} по y при $y = 0$, а также непрерывность w и ww_η по η. Как следует из (38), функция v, определенная равенством (36), непрерывна в $\overline{D}$ по y и ограничена при ограниченных y; v_y ограничена в D, так как $v_y = -u_x$, а $\frac{u}{U}$ и u ограничены.

Выведем асимптотическую формулу для отношения $\frac{u(x,y)}{U(x)}$ при $y \to \infty$. Используя оценки функций $w(\xi,\eta)$ из теоремы 3.1 и оценки $Y(\eta)$ из леммы 3.2, получаем при $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$ неравенства

$$M_1(1-\eta)(\sigma - K_4)e^{-C_1x} \leqslant w(\xi,\eta) \leqslant M_1(1-\eta)\sigma e^{C_2x}.$$

Это приводит к неравенствам

$$M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\Big(\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big) - K_4\Big)e^{-C_1x} \leqslant \frac{u_y}{U} \leqslant M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2x}.$$

Из того, что $\sigma_y = \dfrac{\frac{u_y}{U}}{2\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma}$, получаем

$$\frac{u_y}{U} \leqslant M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2x}, \quad \frac{2u_y\sigma}{2UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma e^{C_2x}\sigma} \leqslant 1, \quad \frac{2\sigma_y}{M_1e^{C_2x}} \leqslant 1,$$

$$M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\Big(\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big)-K_4\Big)e^{-C_1x} \leqslant \frac{u_y}{U}, \quad 1 \leqslant \frac{u_y}{UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)(\sigma-K_4)e^{-C_1x}},$$
$$1 \leqslant \frac{2u_y\sigma}{2UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)(\sigma-K_4)e^{-C_1x}\sigma}, \quad 1 \leqslant \frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma-K_4)e^{-C_1x}},$$

откуда

$$\frac{2\sigma_y}{M_1e^{C_2x}} \leqslant 1 \leqslant \frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma-K_4)e^{-C_1x}}.$$

Интегрируя последние неравенства по y от y_0, соответствующего η_0, до произвольного $y \in (y_0, \infty)$, получаем

$$\frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1 e^{C_2 x}} \leqslant y - y_0 \leqslant \frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1 e^{-C_1 x}} + \frac{2K_4}{M_1 e^{-C_1 x}}[\ln(\sigma - K_4) - \ln(\sigma_0 - K_4)],$$

где $\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1-\frac{u}{U})}$, $\sigma_0 = \sigma\big|_{y=y_0}$.

Из этих неравенств находим

$$\frac{(y-y_0)M_1 e^{-C_1 x}}{2} + K_4 \ln\Big(1 + \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma - K_4)}\Big) + \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2} + \sigma_0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &-\frac{y^2 M_1^2 e^{2C_2 x}}{4} + \frac{y y_0 M_1^2 e^{2C_2 x}}{2} - \frac{y_0^2 M_1^2 e^{2C_2 x}}{4} + \ln\Big(1 - \frac{u(x,y_0)}{U(x)}\Big) \\ &\quad - (y-y_0)M_1 e^{C_2 x}\sigma_0 \leqslant \ln\Big(1 - \frac{u}{U}\Big) \leqslant -\frac{y^2 M_1^2 e^{-2C_1 x}}{4} \\ &\quad + \frac{y y_0 M_1^2 e^{-2C_1 x}}{2} - \frac{y_0^2 M_1^2 e^{-2C_1 x}}{4} + \ln\Big(1 - \frac{u(x,y_0)}{U(x)}\Big) \\ &\quad - (y-y_0)M_1 e^{-2C_1 x}\sigma_0 - \Big[M_1 K_4 (y-y_0) e^{-C_1 x} \\ &+ K_4^2 \ln\Big(1 + \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma-K_4)}\Big) + 2\sigma K_4\Big] \ln\Big(1 + \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma - K_4)}\Big), \end{aligned}$$

что приводит к соотношению

$$e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{2C_2 x} + O(y)\right]} \leqslant 1 - \frac{u}{U} \leqslant e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{-2C_1 x} + O(y \ln y)\right]} \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

где $M_1^2 = \frac{2a}{\nu}$, $a = U_x(0)$. Данные неравенства доказывают справедливость формулы

$$e^{\left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{2C_2 x}\right]} \leqslant 1 - \frac{u}{U} \leqslant e^{\left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{-2C_1 x}\right]}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 4.2 (Единственности)**.** *Пусть u, v – решение задачи* (1), (2) *такое, что: производные u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy} непрерывны в D;*

$\frac{u}{U}$ *и* $\frac{u_y}{U}$ *непрерывны в* $\overline{D}$; $u_y > 0$ *при* $y \geqslant 0$, $x > 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y = 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; $\frac{u_{yy}}{u_y}$, u_x *непрерывны по* y *при* $y = 0$; $\frac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \leqslant 0$.

Тогда u, v *– единственное решение задачи* (1), (2) *с указанными свойствами.*

Доказательство. Если u, v – решение задачи (1), (2) с этими свойствами, то с помощью замены независимых переменных (3) и введения новой неизвестной функции $w = \frac{u_y}{U}$ приходим к решению w задачи (4), (5), обладающему свойствами из теоремы 3.1, аналогично доказательству теоремы 4.1. Как показано выше, такое решение w единственно. □

§5. Асимптотики решения

Задача (1), (2) решена в предположении, что $V(x)$ и $v_0(x)$ допускают асимптотическое представление при $x \to 0$ до слагаемых не ниже первого порядка по x. При этом полученные оценки функций $w(\varepsilon, \eta)$ и $u_y(x, y)$ дают возможность найти главный член асимптотики этих функций при $x \to 0$. Если известны асимптотические при $x \to 0$ разложения функций $V(x)$ и $v_0(x)$ с любым числом членов, то возможно получить асимптотическое разложение функции $u_y(x, y)$ до слагаемых любого порядка по x и оценить остаточный член разложения. Следующие далее априорные оценки решение $w(\xi, \eta)$ задачи (4), (5) мы проведем, предполагая справедливыми некоторые асимптотические разложения.

Предположим, что имеют место асимптотические разложения

$$U(x) = x\Big(a + \sum_{\beta=1}^{q} a_\beta x^\beta + a_{q+1}(x)\Big),$$

$$v_0(x) = b + \sum_{\gamma=1}^{q} b_\gamma x^\gamma + b_{q+1}(x), \tag{41}$$

$$B^2(x) = B_0^2 + \sum_{\gamma=1}^{q} c_\varkappa x^\varkappa + c_{q+1}(x),$$

где $a = \mathrm{const} > 0$; $a_\beta = \mathrm{const}$; $\beta = 1, \ldots, q$; b, $b_\gamma = \mathrm{const}$; $\gamma = 1, \ldots, q$; $\varkappa = 1, \ldots, q$;

$$|a_{q+1}(x)| \leqslant C_9 x^{q+1}, \quad \left|\frac{da_{q+1}}{dx}\right| \leqslant C_{10} x^q, \quad \left|\frac{d^2 a_{q+1}}{dx^2}\right| \leqslant C_{11} x^{q-1},$$

$$|c_{q+1}(x)| \leqslant C_{12}x^{q+1}, \quad \left|\frac{dc_{q+1}}{dx}\right| \leqslant C_{13}x^{q}, \quad \left|\frac{d^2c_{q+1}}{dx^2}\right| \leqslant C_{14}x^{q-1},$$
$$|b_{q+1}(x)| \leqslant C_{15}x^{q+1}, \quad \left|\frac{db_{q+1}}{dx}\right| \leqslant C_{16}x^{q}, \quad q \geqslant 1.$$

Эти предположения выполняются, в частности, когда производная порядка $q+2$ функций $U(x)$ и $B^2(x)$, а также производная порядка $q+1$ функции $v_0(x)$ ограничены.

Исследуем вспомогательную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Имеют место утверждения, доказательства которых для удобства читателя перенесены в Appendix.

Лемма 5.1. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для функций* $Y_m(\eta)$, $m=1,2,\dots,q$*:*

$$\nu Y_0^2 Y_{m\eta\eta} + (\eta^2-1)aY_{m\eta} - 2\eta a Y_m + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m + (\eta-1)B_0^2 Y_{m\eta}$$
$$+ \nu \sum_{\substack{\rho+l+s=m\\ \rho\neq m, l\neq m, s\neq m}} Y_\rho Y_l Y_{s\eta\eta} + (\eta^2-1)\sum_{\substack{\rho+s=m\\ \rho\neq m}}(2s+1)a_s Y_{\rho_\eta}$$
$$- \eta \sum_{\substack{\rho+s=m\\ \rho\neq m}}(2s+1)a_s Y_\rho - \eta \sum_{\substack{\rho+s=m\\ \rho\neq m}} 2\rho a_s Y_\rho = 0, \quad (42)$$

$m=1,2,\dots,q$*; и пусть граничные условия имеют вид*

$$Y_m(1)=0,$$
$$\Big(\nu Y_0 Y_{m\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_m - bY_m - \sum_{\substack{l+s=m\\ s\neq m}} b_l Y_s + \sum_{\substack{\rho+s=m\\ \rho\neq m, s\neq m}} \nu Y_s Y_{\rho_\eta} - (2m+1)a_m\Big)\Big|_{\eta=0} = 0,$$
$$m=1,2,\dots,q, \quad (43)$$

где Y_0 *– решение задачи* (9), (10)*. Утверждается, что задача* (42), (43) *имеет решение со следующими свойствами:*

$$|Y_m| \leqslant N_m(1-\eta)\sigma, \quad |Y_{m\eta}| \leqslant C_m\sigma, \quad |Y_0 Y_{m\eta\eta}| \leqslant R_m, \qquad (44)$$

где N_m, C_m, R_m*– положительные постоянные.*

Лемма 5.2. *Пусть имеют место асимптотические разложения* (41)*. Тогда для решения* $w(\xi,\eta)$ *задачи* (4), (5) *справедливы оценки*

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{17}\xi^{q+1}} \leqslant w \leqslant \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{18}\xi^{q+1}} \qquad (45)$$

при $0 \leqslant \xi \leqslant X$, *где* $Y_0(\eta)$ – *решение задачи* (9), (10); $Y_1(\eta), \ldots, Y_q(\eta)$ – *решение системы* (73), *с условиями* (74); *положительные постоянные* X, C_{17}, C_{18} *зависят от* $U(x)$, $v_0(x)$, $B^2(x)$.

Из леммы 5.2 вытекают следующие теоремы об асимптотических разложениях.

Теорема 5.1. *Предположим, что для* $U(x)$ *и* $v_0(x)$ *имеем представления* (41) *при* $q \geqslant 1$. *Тогда для решения* $w(\xi,\eta)$ *задачи* (4), (5) *справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\Big|w(\xi,\eta) - \sum_{m=0}^{q} Y_m \xi^m\Big| \leqslant C_{26} Y_0(\eta)\xi^{q+1}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant X, \tag{46}$$

при $\xi \to 0$, *где* Y_m, $m = 1, \ldots, q$ – *решения задачи* (73), (74); Y_0 – *решения уравнения* (9) *с условиями* (10); C_{26} – *положительная постоянная.*

Доказательство. Пусть $C_{27} = \max(C_{17}, C_{18})$. По лемме 5.2 имеем

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{27}\xi^{q+1}} \leqslant w \leqslant \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{27}\xi^{q+1}}$$

Отсюда легко следует (46). □

Теорема 5.2. *Предположим, что имеют место представления* (41) *при* $q \geqslant 1$. *Тогда для решения* u, v *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\Big|u_y(x,y) - U(x)\sum_{m=0}^{q} Y_m\Big(\frac{u}{U}\Big)x^{2m}\Big| \leqslant C_{16} U(x) Y_0\Big(\frac{u}{U}\Big)x^{2q+2} \tag{47}$$

где Y_j – *функции из теоремы* 5.1.

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает непосредственно из теоремы 5.1 и определения функции w. □

Из неравенства (47) вытекает, в частности, следующая оценка:

$$\Big|u_y(x,y) - U(x)\sum_{m=0}^{q} Y_m(0)x^{2m}\Big| \leqslant C_{16} U(x) Y_0(0) x^{2q+2}. \tag{48}$$

Из (48) вытекает асимптотическое разложение

$$u_y(x,y) = U(x)\sum_{m=0}^{q} Y_m(0)x^{2m} + O\big(U(x)x^{2q+2}\big), \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Поскольку касательная составляющая τ напряжения вязкого трения на поверхности обтекаемого тела равна $\nu\rho u_y(x,0)$, имеем

$$\tau = \nu\rho U(x)\sum_{m=0}^{q} Y_m(0)x^{2m} + O\big(U(x)x^{2q+2}\big), \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

для любого целого положительного q.

Замечание 5.1. Магнитное поле достаточно большой величины, как отмечалось в работах [18] и [23], предотвращает отрыв пограничного слоя электропроводной жидкости. Более того, главный член B_0^2 асимптотического разложения индукции магнтного поля меняет величину горизонтальной составляющей скорости жидкости $u(x,y)$, но при этом асимптотическое поведение $u(x,y)$ при $y \to +\infty$ качественно не меняется, т.е.

$$u(x,y) \sim U(x)(1 - e^{-Cy^2}).$$

Отметим, что степенные члены асимптотики магнитного поля существенно не влияют на это асимптотическое поведение.

Замечание 5.2. Решение задача (9), (10) по сути является траекторным аттрактором для системы уравнений Прандтля (см. теорему 5.2). Важную роль при этом играют автомодельные решения (см. [16]).

§6. Appendix

Доказательство леммы 3.1. Решение системы (6) с условиями (7) получим как предел при $\varepsilon \to 0$ решений системы

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(w) \equiv \nu\Big(\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)w^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{w^k - w^{k-1}}{h} \\ + (\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k_\eta - \eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3 \\ + (\eta-1)(B^k)^2w^k - (B^k)^2khV^kw^k = 0 \quad (49) \end{aligned}$$

при $0 < \eta < 1$, $\varepsilon > 0$, с условиями (7). Предположим, что задача (49), (7) имеет решение w^k, положительное при $\eta = 0$, получим для этого решения априорную оценку снизу. Для этого определяем новую функцию $V_1^k = V_1 = K_1(1-\eta)$. Тогда при $0 < \eta < 1$ имеем

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon,k}(V_1) &= (\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)(-K_1)-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)K_1(1-\eta)\\
&\quad+(\eta-1)(B^k)^2(-K_1)-(B^k)^2khV^kK_1(1-\eta)\\
&\quad+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(-K_1)^2(K_1(1-\eta))^3=(1+\eta)(1-\eta)\big(V^k+khV^k_\xi\big)K_1\\
&\quad-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)K_1(1-\eta)+(B^k)^2K_1(1-\eta)-(B^k)^2khV^kK_1(1-\eta)\\
&\quad+6\nu d(kh)^2(V^k)^2K_1^2K_1^2(1-\eta)^2K_1(1-\eta)\\
&=K_1(1-\eta)\Big(\big(V^k+khV^k_\xi\big)+(B^k)^2-(B^k)^2khV^k\\
&\qquad+6\nu d(kh)^2(V^k)^2K_1^2K_1^2(1-\eta)^2\Big)>0.
\end{aligned}$$

Положим

$$\lambda_{\varepsilon,k}(w)\equiv\left.\left(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)w^k_\eta-v^k_0+\frac{V^k+khV^k_\xi}{w^k}+\frac{(B^k)^2}{w^k}\right)\right|_{\eta=0}.$$

Тогда

$$\lambda_{\varepsilon,k}(V_1)=\left.\left(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(K_1)^2\big)(-K_1)-v^k_0+\frac{V^k+khV^k_\xi}{K_1}+\frac{(B^k)^2}{K_1}\right)\right|_{\eta=0}>0,$$

если K_1 достаточно мало.

Обозначим $y^k:=V_1-w^k$ и покажем, что $y^k\leqslant 0$.

Замечание 6.1. Это и будет искомой оценкой снизу, которая будет впоследствии уточнена.

При $0<\eta<1$ получим

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon,k}(V_1)-L_{\varepsilon,k}(w)&=\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(V^k_1)^2\big)(V^k_1)^2+\varepsilon\Big)V^k_{1_{\eta\eta}}\\
&\quad-\eta khV^k\frac{V^k_1-V^{k-1}_1}{h}+(\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)V^k_{1_\eta}-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)V^k_1\\
&\quad+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(V^k_{1_\eta})^2(V^k_1)^3-(B^k)^2khV^kV^k_1+(\eta-1)(B^k)^2V^k_{1_\eta}\\
&\quad-\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)w^k_{\eta\eta}+\eta khV^k\frac{w^k-w^{k-1}}{h}\\
&\quad-(\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k_\eta+\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k\\
&\quad-6\nu d(kh)^2(V^K)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3+(B^k)^2khV^kw^k\\
&\quad-(\eta-1)(B^k)^2w^k_\eta>0
\end{aligned}$$

и проведём несколько упрощающих преобразований. Находим

$$\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2\big)(V_1^k)^2+\varepsilon\Big)V^k_{1_{\eta\eta}}$$

$$-\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)w^k_{\eta\eta}$$

$$=\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2\big)(V_1^k)^2+\varepsilon\Big)V^k_{1_{\eta\eta}}$$

$$-\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)V^k_{1_{\eta\eta}}$$

$$+\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)V^k_{1_{\eta\eta}}$$

$$-\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)w^k_{\eta\eta}$$

$$=\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)y^k_{\eta\eta}$$

$$+\nu V^k_{1_{\eta\eta}}\Big(\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2\big)(V_1^k)^2-\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2\Big)$$

$$=\Big\{(V_1^k)^2+3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^4+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^4$$

$$-(w^k)^2=\big(V_1^k+w^k\big)y^k+3d(kh)^2(V^k)^2\big((V_1^k)^2+(w^k)^2\big)\big(V_1^k+w^k\big)y^k\Big\}$$

$$=\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)y^k_{\eta\eta}$$

$$+\nu V^k_{1_{\eta\eta}}\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2\big((V_1^k)^2+(w^k)^2\big)\Big)\big(V_1^k+w^k\big)y^k$$

и

$$6\nu d(kh)^2(V^k)^2(V^k_{1_\eta})^2(V_1^k)^3-6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3$$

$$=\Big\{(V^k_{1_\eta})^2(V_1^k)^3+(V^k_{1_\eta})^2(w^k)^3-(V^k_{1_\eta})^2(w^k)^3-(w^k_\eta)^2(w^k)^3$$

$$=(V^k_{1_\eta})^2\big((V_1^k)^3-(w^k)^3\big)+(w^k)^3\big((V^k_{1_\eta})^2-(w^k_\eta)^2\big)$$

$$=(V^k_{1_\eta})^2\big((V_1^k)^2+V_1^kw^k+(w^k)^2\big)y^k+(w^k)^3\big(V^k_{1_\eta}+w^k_\eta\big)y^k\Big\}$$

$$=6\nu d(kh)^2(V^k)^2(V^k_{1_\eta})^2\big((V_1^k)^2+V_1^kw^k+(w^k)^2\big)y^k$$

$$+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3\big(V^k_{1_\eta}+w^k_\eta\big)y^k_\eta;$$

Следовательно,

$$\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)y^k_{\eta\eta}-\eta(kh)V^k\,\frac{y^k-y^{k-1}}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\eta^2-1)\bigl(V^k + khV^k_\xi\bigr)y^k_\eta + \\
&+ (\eta-1)(B^k)^2 y^k_\eta + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2\Bigl((V^k_{1\ \eta})^2\bigl((V^k_1)^2 + V^k_1 w^k + (w^k)^2\bigr)y^k \\
&+ (w^k)^3\bigl(V^k_{1\ \eta} + w^k_\eta\bigr)y^k_\eta\Bigr) - \eta\bigl(V^k + khV^k_\xi\bigr)y^k - (B^k)^2 khV^k y^k > 0,
\end{aligned}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\varepsilon,k}(V_1) - \lambda_{\varepsilon,k}(w) &= \nu\bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(V^k_1(0))^2\bigr)V^k_{1_\eta}(0) - v^k_0 \\
&+ \frac{V^k + khV^k_\xi}{V^k_1(0)} + \frac{(B^k)^2}{V^k_1(0)} - \nu\bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2\bigr)w^k_\eta(0) + v^k_0 \\
&- \frac{V^k + khV^k_\xi}{w^k(0)} + \nu\bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2\bigr)V^k_{1_\eta}(0) \\
&- \nu\bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2\bigr)V^k_{1_\eta}(0) - \frac{(B^k)^2}{w^k(0)} \\
&= \nu\bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2\bigr)y^k_\eta(0) \\
&+ \nu\Bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(V^k_1(0))^2 - 1 - 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2\Bigr)V^k_{1_\eta}(0) \\
&+ \frac{(B^k)^2\bigl(w^k(0) - V^k_1(0) + \bigr)}{V^k_1(0)w^k(0)} + \frac{\bigl(V^k + khV^k_\xi\bigr)\bigl(w^k(0) - V^k_1(0)\bigr)}{V^k_1(0)w^k(0)} \\
&= \nu\bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2\bigr)y^k_\eta(0) - \frac{(B^k)^2}{V^k_1(0)w^k(0)}y^k(0) \\
&+ 3\nu d(kh)^2(V^k)^2\bigl((V^k_1(0))^2 + (w^k(0))^2\bigr)V^k_{1_\eta}(0)y^k(0) \\
&- \frac{V^k + khV^k_\xi}{V^k_1(0)w^k(0)}y^k(0) > 0.
\end{aligned}
$$

Из этих неравенств и условия $y^k(1) = 0$ следует, что $y^k \leqslant 0$. Действительно, рассмотрим $S^k = y^k e^{-\alpha kh}$. Получим

$$
\begin{aligned}
L_{\varepsilon,k}(S^k) &= \Bigl(\nu\bigl(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\bigr)(w^k)^2 + \varepsilon\Bigr)S^k_{\eta\eta} \\
&- \eta khV^k\Bigl(\frac{S^k - S^{k-1}}{h}e^{-\alpha h} + S^k\alpha e^{\alpha h'}\Bigr) + (\eta^2-1)\bigl(V^k + khV^k_\xi\bigr)S^k_\eta \\
&- \eta\bigl(V^k + khV^k_\xi\bigr)S^k + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2\bigl(V^k_{1_\eta} + w^k_\eta\bigr)(w^k)^3 S^k_\eta \\
&+ \mathfrak{D}^k S^k + (\eta-1)(B^k)^2 S^k_\eta - (B^k)^2 khV^k S^k > 0 \qquad (50)
\end{aligned}
$$

при $\eta < 1$, $0 < h' < h$,, где

$$\mathfrak{D}^k = 6\nu d(kh)^2 (V^k)^2 (V^k_{1\ \eta})^2 \big((V_1^k)^2 + V_1^k w^k + (w^k)^2\big),$$

и

$$\left(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)S^k_\eta e^{\alpha kh} - \frac{V^k + khV^k_\xi}{w^k V^k_1} S^k e^{\alpha kh} - \frac{(B^k)^2}{w^k V^k_1} S^k e^{\alpha kh}\right.$$
$$\left. + \nu V^k_{1_\eta} 3d(kh)^2 (V^k)^2 \big(V_1^k + w^k\big) S^k e^{\alpha kh}\right)\bigg|_{\eta=0} > 0. \quad (51)$$

Если $\alpha > 0$ достаточно велико и h достаточно мало, то коэффициент

$$\mathfrak{D}^k - (B^k)^2 khV^k - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big) - \alpha e^{\alpha h'} \eta khV^k$$

при S^k в (50) отрицателен.

Отметим, что оператор $L_{\varepsilon,k}$ является параболическим, поэтому к задаче (50), (51) может быть применён принцип максимума для параболических операторов. Поскольку $U^k_\xi = \big(V^k + khV^k_\xi\big) > 0$ и w^k, V^k_1 положительны при $\eta = 0$, из (50), (51) в силу принципа максимума следует, что $S^k \leqslant 0$. Действительно, в противном случае функция $S^k(\eta)$ при некотором k имела имела бы положительный максимум при $0 \leqslant \eta < 1$. При $0 < \eta < 1$ функция $S^k(\eta)$ не может принимать положительный максимум, так как в точке максимума имели бы место неравенства

$$S^k > 0, \qquad S^k_\eta = 0, \qquad S^k_{\eta\eta} \leqslant 0, \qquad \frac{S^k - S^{k-1}}{h} \geqslant 0,$$

что противоречит (50). При $\eta = 0$ положительный максимум S^k также не может достигаться, так как в противном случае приходим к противоречию между неравенствами $S^k_\eta(0) \leqslant 0$ и (51). Значит, $S^k \leqslant 0$ и $y^k = V^k_1 - w^k \leqslant 0$.

Следовательно, $w^k(\eta) \geqslant K_1(1-\eta)$ при $kh \leqslant X$. и мы окончательно получили оценку снизу, о которой упоминали.

Для доказательства существования решения задачи (49), (7) рассмотрим вместо условий (7) граничные условия вида

$$w^k(1) = 0,$$
$$\left(\nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big) w^k_\eta - v^k_0 + \tfrac{V^k + khV^k_\xi}{\psi(w^k)} + \tfrac{(B^k)^2}{\psi(w^k)}\right)\bigg|_{\eta=0} = 0, \quad (52)$$

где $\psi(w)$ – бесконечно дифференцируемая функция при $w\in(-\infty;+\infty)$ такая, что $\psi(w)=w$ при $w\geqslant K_3$, $\psi(w)=K_3/2$ при $w\leqslant K_3/4$, $0\leqslant\psi'(w)\leqslant 1$ при $K_3/4\leqslant w\leqslant K_3$. Постоянная K_3 выбрана так, что

$$w^k(0)\geqslant K_3,\quad \max\frac{|v_0|}{U_\xi}<\frac{2}{K_3},\qquad K_3\leqslant K_1.$$

Пусть $\tilde w^k$ – любое решение задачи (49), (52) при $0<\varepsilon\leqslant 1$. Покажем, что справедливо неравенство $\tilde w^k\geqslant V_1^k$. Положим $\tilde y^k=V_1^k-\tilde w^k$. Имеем

$$\left.\left(\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2\bigr)V^k_{1\,\eta}-v_0^k+\frac{V^k+khV_\xi^k}{\psi(V_1^k)}+\frac{(B^k)^2}{\psi(V_1^k)}\right)\right|_{\eta=0}$$
$$=-\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2K_1^2\bigr)K_1-v_0^k+\frac{V^k+khV_\xi^k}{K_1}+\frac{(B^k)^2}{K_1}>0$$

в силу выбора K_1, и

$$\left.\left(\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\bigr)\tilde y_\eta^k+\nu V^k_{1\,\eta}3d(kh)^2(V^k)^2\bigl(V_1^k+w^k\bigr)\tilde y^k-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{V^k+khV_\xi^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)}\tilde y^k-\frac{(B^k)^2\tilde y^k}{\psi(V^k)\psi(w^k)}\right)\right|_{\eta=0}>0,$$

$$\Bigl(\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\bigr)+\varepsilon\Bigr)(w^k)^2\tilde y^k_{\eta\eta}-\eta khV^k\frac{\tilde y^k-\tilde y^{k-1}}{h}$$
$$+(\eta^2-1)\bigl(V^k+khV_\xi^k\bigr)\tilde y_\eta^k-\eta\bigl(V^k+khV_\xi^k\bigr)\tilde y^k$$
$$+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(\tilde y_\eta^k)^2+(\eta-1)(B^k)^2\tilde y_\eta^k-(B^k)^2khV^k\tilde y^k>0$$

при $\eta<1$.

Далее, для $\tilde S^k=\tilde y^k e^{-\alpha kh}$, как и для S^k, получим, что $\tilde S^k\leqslant 0$ и $V_1^k\leqslant\tilde w^k$ при $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $kh\leqslant X$. Следовательно, $w^k(0)\geqslant V_1^k(0)\geqslant K_4$, и поэтому $\psi(\tilde w^k)=\tilde w^k$. Таким образом, решение $\tilde w^k(\eta)$ задачи (49), (52) является также решением задачи (49), (7), положительным при $\eta=0$.

Доказательство существования решения задачи (49), (52) при $\varepsilon>0$ проведем на основе теоремы Лере–Шаудера из [27].

Теорема 6.1 (Теорема Лере–Шаудера). *Пусть в банаховом пространстве X задано семейство отображений $y=T(x,\mathbf{k})$, где $x,y\in$*

X, $\mathbf{k}$ – вещественный параметр, меняющийся на отрезке $a \leqslant \mathbf{k} \leqslant b$. Предположим, что

1) *$T(x, \mathbf{k})$ определено для всех $x \in X$ и $a \leqslant \mathbf{k} \leqslant b$;*

2) *при любом фиксированном $\mathbf{k}$ оператор $T(x, \mathbf{k})$ непрерывен на X, то есть при любом $x^0 \in X$ и любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|T(x, \mathbf{k}) - T(x^0, \mathbf{k})\| < \varepsilon$, если $\|x - x^0\| < \delta$;*

3) *на ограниченных множествах из X операторы $T(x, \mathbf{k})$ равномерно непрерывны по $\mathbf{k}$, то есть для любого ограниченного множества $X_0 \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x \in X_0$ и $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| < \delta$, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in [a, b]$, то $\|T(x, \mathbf{k}_1) - T(x, \mathbf{k}_2)\| < \varepsilon$;*

4) *при любом фиксированном $\mathbf{k}$ отображение $T(x, \mathbf{k})$ вполне непрерывно, то есть отображает любое ограниченное множество из X в компактное в X множество;*

5) *существует постоянная M такая, что если x – решение уравнения $x - T(x, \mathbf{k}) = 0$ $(x \in X, \mathbf{k} \in [a, b])$, то $\|x\| \leqslant M$;*

6) *уравнение $x - T(x, a) = 0$ имеет единственное решение в X.*

Тогда уравнение $x - T(x, b) = 0$ имеет решение в X.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, зависящую от параметра γ

$$\begin{gathered}\nu\gamma\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 + \varepsilon\big)(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} \\ + (\eta^2 - 1)\big(V^k + khV^k_\xi\big)w^k_\eta - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big)w^k \\ + 6\nu\gamma d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(w^k_\eta)^2 + (\eta - 1)(B^k)^2 w^k_\eta - (B^k)^2 khV^k w^k = 0\end{gathered} \tag{53}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered}w^k(1) = 0, \\ \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)w^k_\eta - v^k_0 + \big(V^k + khV^k_\xi + (B^k)^2\big) \\ \times \Big[\varphi(\gamma w^k)w^k + \frac{1}{\psi(0)}\Big]\Big)\Big|_{\eta=0} = 0,\end{gathered} \tag{54}$$

где

$$w\varphi(w) = \frac{1}{\psi(w)} - \frac{1}{\psi(0)} = -w\int\limits_0^1 \frac{\psi'(sw)}{\psi^2(sw)}\,ds, \qquad \varphi(w) \leqslant 0.$$

При $\gamma = 0$ задача (53), (54) линейна, а при $\gamma = 1$ совпадает с задачей (49), (52).

Проверим выполнение теоремы Лере–Шаудера. Рассмотрим оператор $T(\theta,\gamma) = w$, который сопоставляет любой вектор-функции θ класса $C^2[0,1]$ вектор-функцию $w \equiv (w^1,\dots,w^m)$, $m = \left[\frac{X}{h}\right]$, являющуюся решением линейной системы дифференциальных уравнений

$$\nu\gamma\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(\theta^k)^2+\varepsilon\bigr)(\theta^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{w^k-w^{k-1}}{h}$$
$$+(\eta^2-1)\bigl(V^k+khV^k_\xi\bigr)w^k_\eta-\eta\bigl(V^k+khV^k_\xi\bigr)w^k+6\nu\gamma d(kh)^2(V^k)^2(w^k_\eta)^2(\theta^k)^3$$
$$+(\eta-1)(B^k)^2w^k_\eta-(B^k)^2khV^kw^k=0 \quad (55)$$

с граничными условиями

$$w^k(1)=0,$$
$$\Bigl(\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\bigr)w^k_\eta - v^k_0 + (V^k+khV^k_\xi$$
$$+(B^k)^2\bigr)\Bigl[\varphi(\gamma\theta^k)w^k+\frac{1}{\psi(0)}\Bigr]\Bigr)\Big|_{\eta=0}=0, \quad (56)$$

При $\gamma = 0$ существует единственное решение задачи (55), (56), поскольку она линейна, а коэффициент при w^k в уравнении (55) неположителен при малых h и $\varphi(x) \leqslant 0$, $(V^k + khV^k_\xi) > 0$.

Решения w^k нелинейной задачи (53), (54) равномерно по γ ограничены вместе с производными второго порядка. Оценим сначала w^k снизу. Пусть $V_0 = K_4(1-\eta)$. Имеем

$$\Bigl(\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(V^k_0)^2\bigr)w^k_\eta - v^k_0 + (V^k+khV^k_\xi+(B^k)^2)\Bigl[\varphi(\gamma w^k)V^k_0$$
$$+\frac{1}{\psi(0)}\Bigr]\Bigr)\Big|_{\eta=0} = \Bigl(-\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\bigr)K_4 - v^k_0$$
$$+(V^k+khV^k_\xi+(B^k)^2)\Bigl[\varphi(\gamma w^k)K_4+\frac{2}{K_3}\Bigr]\Bigr)\Big|_{\eta=0} > 0$$

при достаточно малом K_4, так как $\max(\frac{|v_0|}{U_x}) < \frac{2}{K_3}$; постоянная K_4 не зависит от γ, h, ε. Поэтому для $y^k = V^k_0 - w^k$, получаем неравенства

$$\Bigl(\nu\bigl(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\bigr)y^k_\eta+(V^k+khV^k_\xi+(B^k)^2)(\varphi(\gamma w^k)y^k)\Bigr)\Big|_{\eta=0}>0$$

$$\nu\gamma\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2+\varepsilon\big)(w^k)^2y^k_{\eta\eta}-\eta khV^k\frac{y^k-y^{k-1}}{h}$$
$$+(\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)y^k_\eta-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k$$
$$+6\nu\gamma d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(y^k_\eta)^2+(\eta-1)(B^k)^2y^k_\eta-(B^k)^2khV^ky^k>0,$$

из которых легко следует, что $y^k\leqslant 0$ и $w^k\geqslant V^k_0$ при всех γ и $kh\leqslant X$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Оценим теперь решение w^k задачи (53), (54). Для этого перейдем в уравнениях (53) и условиях (54) к новой функции $\tilde w^k$ такой, что

$$w^k=\big(K_5-e^{\beta\eta}\big)e^{lkh}\tilde w^k,$$

где K_5, l, β – положительные постоянные. При достаточно больших l, β и K_5 для $\tilde w^k$ получим уравнения

$$\nu\gamma\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2+\varepsilon\big)(w^k)^2\tilde w^k_{\eta\eta}-\eta khV^k\frac{\tilde w^k-\tilde w^{k-1}}{h}e^{\alpha h}$$
$$+(\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)\tilde w^k_\eta-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)\tilde w^k$$
$$+6\nu\gamma d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(\tilde w^k_\eta)^2+(\eta-1)(B^k)^2\tilde w_\eta-(B^k)^2khV^k\tilde w=0, \tag{57}$$

где $\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)>0$ а также получим условия

$$w^k(1)=0,\quad \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(\tilde w^k)^2\big)\tilde w^k_\eta+\tilde C^k\tilde w^k+\tilde C^k_1\Big)\Big|_{\eta=0}=0, \tag{58}$$

где $\tilde C^k<0$. По принципу максимума из (57), (58) легко следует, что $w^k\leqslant K_6$, где K_6 выбрано достаточно большим и не зависящем от γ. Поэтому w^k ограничены равномерно по γ.

Оценка производных w^k_η, равномерная по γ, следует из уравнений первого порядка, которые получены из (53) и которым удовлетворяют функции w^k_η, и оценки w^k_η при $\eta=0$, вытекающей из граничного условия (54). Производные $w^k_{\eta\eta}$ выражаются из уравнения (53), а производные $w^k_{\eta\eta\eta}$ оцениваются из уравнения, полученного дифференцированием (53).

Точно также можно оценить (равномерно по γ) решение $w^k(\eta)$ уравнений (55) с условиями (56) и его производные до третьего порядка включительно, причем постоянные в этих оценках зависят от $\sup|\theta(\eta)|$ и $\sup|\theta_\eta(\eta)|$.

Отсюда следует, что оператор $T(\theta,\gamma)$ переводит ограниченное множество функций θ из класса C^2 в компактное множество функций

$w(\eta)$. Непрерывность $T(\theta,\gamma)$ следует из уравнений и граничных условий, которым удовлетворяет разность решений задач (55), (56), соответствующих различным θ и γ, а также из равномерных по γ оценок для этих решений и их производных.

Таким образом, из теоремы Лере–Шаудера следует существование решения задачи (49), (52) из класса C^2 при $\varepsilon > 0$.

Выше мы получили равномерную по ε,h оценку снизу для решений $w^k(\eta)$ задачи (49), (52); таким образом,

$$w^k(\eta) \geqslant K_1(1-\eta).$$

Оценим теперь решение задачи (49), (52) сверху равномерно относительно ε и h. Пусть

$$V_2^k = V_2 = K_2(1-\eta)\sigma, \qquad \sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}, \quad 0<\mu<1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,k}(V_2) = \varepsilon K_2\Big(-\frac{1}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big) - (1-\eta)(1+\eta)K_2\big(V^k \\ + khV_\xi^k\big)\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big) + \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2K_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\big)K_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\Big) \\ \times\Big(-\frac{K_2}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{K_2}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big) - \eta K_2(1-\eta)\sigma\big(V^k + khV_\xi^k\big) \\ + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2K_2^3(1-\eta)^3\sigma^3K_2^2\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big)^2 \\ - (1-\eta)(B^k)^2K_2\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big) - (1-\eta)(B^k)^2K_2\sigma < 0 \end{aligned} \tag{59}$$

при $0 \leqslant \eta < 1$, если $K_2 > 0$ достаточно велико; K_2 не зависит от ε и h. Далее,

$$\begin{aligned} \lambda_k(V_2^k) = \bigg(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2K_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\big)K_2\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big) \\ -v_0^k + \frac{V^k+khV_\xi^k}{K_2(1-\eta)\sigma} + \frac{(B^k)^2}{K_2(1-\eta)\sigma}\bigg)\bigg|_{\eta=0} < 0, \end{aligned} \tag{60}$$

если K_2 достаточно велико и $\sigma^2 > 1/2$ при $\eta = 0$, т.е. $\mu < e^{-1/2}$. Из неравенств (59), (60) и условия $(w^k - V_2^k)|_{\eta=1} = 0$ по принципу максимума получаем, что

$$w^k - V_2^k \leqslant 0, \quad \text{при} \quad 0\leqslant\eta\leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant X.$$

Из уравнений (49), граничного условия (7) при $\eta = 0$ и оценок снизу и сверху для w^k следуют равномерные по ε оценки w^k_η, $w^k_{\eta\eta}$ на любом отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant 1-\delta$, $\delta = \mathrm{const} > 0$. Дифференцируя уравнение (49) по η, устанавливаем, что производные любого порядка от функций w^k ограничены на отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant 1-\delta$ равномерно по ε.

Следовательно, из совокупности решений w^k задачи (49), (7) при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ можно выделить последовательность w^k такую, что функции w^k вместе с их производными любого порядка при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходятся на отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant 1-\delta$, причем предельная функция (в силу оценок $V \leqslant w^k \leqslant V_1$) непрерывна при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, обращается в нуль при $\eta = 1$ и удовлетворяет (6), (7) при $\eta < 1$.

Очевидно, что оценки (8) верны для предельных функций w^k. □

Доказательство леммы 3.2. Предполагая, что $Y(0) \neq 0$, мы получим оценки (11) – (14) для решения задачи (9), (10), а затем докажем существование такого решения. Положим $\Phi_1 = M_1(1-\eta)\sigma$ и вычислим $L(\Phi_1)$ и $l(\Phi_1)$. Имеем

$$L(\Phi_1) = M_1(1-\eta)\sigma\Big(-\frac{\nu M_1^2}{2} - \frac{\nu M_1^2}{4\sigma^2} + a - (1+\eta)\frac{a}{2\sigma^2} - \frac{B_0^2}{2\sigma^2} + B_0^2\Big) < 0$$

при $0 \leqslant \eta < 1$, если $\nu M_1^2 \geqslant 2(a + B_0^2)$;

$$l(\Phi_1) = \Big[\nu M_1^2\sigma\Big(\frac{1}{2\sigma} - \sigma\Big) - M_1 b\sigma + a + B_0^2\Big]\Big|_{\eta=0} < 0,$$

если $\sigma(0)$ достаточно велико. Из соотношений

$$L(\Phi_1) - L(Y) < 0, \qquad l(\Phi_1) - l(Y) < 0, \qquad (\Phi_1 - Y)\big|_{\eta=1} = 0$$

следует, что $\Phi_1 - Y \geqslant 0$ при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Оценим теперь $Y(\eta)$ снизу. Для $\Phi_2 = M_2(1-\eta)\sigma$ имеем

$$L(\Phi_2) = M_2(1-\eta)\sigma\Big(-\frac{\nu M_2^2}{2} - \frac{\nu M_2^2}{4\sigma^2} + a - (1+\eta)\frac{a}{2\sigma^2} - \frac{B_0^2}{2\sigma^2} + B_0^2\Big) > 0$$

при $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$, $\eta_0 = \mathrm{const} < 1$, а также

$$l(\Phi_2) = \Big[\nu M_2^2\sigma\Big(\frac{1}{2\sigma} - \sigma\Big) - M_2 b\sigma + a + B_0^2\Big]\Big|_{\eta=0} > 0,$$

если M_2 достаточно мало. Из неравенств $L(\Phi_2) > 0$ при $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$ и $l(\Phi_2) > 0$ легко следует, что $Y \geqslant \Phi_2$ вне некоторой окрестности $\eta = 1$.

Уточним теперь оценку для $Y(\eta)$ снизу в окрестности $\eta = 1$. Для этого введем функцию $\Phi_3 = M_1(1-\eta)\sigma(1-K_4/\sigma)$ и рассмотрим $L(\Phi_3)$.

Имеем

$$L(\Phi_3) = \nu M_1^2(1-\eta)^2(\sigma - K_4)^2\Big[-\frac{M_1}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{M_1}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big]$$

$$-M_1(1-\eta^2)a\Big(-\sigma+\frac{1}{2\sigma}\Big) - M_1K_4(1-\eta^2)a - \eta a M_1(1-\eta)(\sigma-K_4)$$

$$+M_1(1-\eta)\sigma\Big(B_0^2-\frac{B_0^2}{2\sigma^2}\Big)+M_1K_4(\eta-1)B_0^2.$$

Учитывая, что $\nu M_1^2 \geqslant 2(a+B_0^2)$, и предполагая, что $K_4/\sigma < 1$ и $1-K_4/\sigma \geqslant c > 0$ при $\eta_0 \leqslant \eta < 1$, где $M_2 \geqslant M_1 c$, получим

$$L(\Phi_3) \geqslant M_1(1-\eta)\Big[aK_4\Big(1-\frac{K_4}{\sigma}\Big)+\Big(\frac{K_4 a}{\sigma^2}-\frac{aK_4^2}{2\sigma^3}\Big)-\frac{2a+a\eta}{2\sigma}$$

$$+(\sigma-K_4)B_0^2-\frac{B_0^2}{2\sigma}-B_0^2(\sigma-K_4)^2\Big(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2\sigma^3}\Big)\Big]>0,$$

если K_4 достаточно велико.

Выберем η_0 из условия $(1-K_4/\sigma)|_{\eta=\eta_0}=c$. В силу выбора η_0 и K_4 имеем $L(\Phi_3)>0$ при $\eta_0<\eta<1$. Поскольку $(\Phi_3-Y)|_{\eta=1}=0$ и

$$\Phi_3\Big|_{\eta=\eta_0} = M_1(1-\eta_0)\sigma(\eta_0)c \leqslant M_2(1-\eta_0)\sigma(\eta_0) = \Phi_2\Big|_{\eta=\eta_0} \leqslant Y(\eta_0),$$

то рассматривая выражение $L(\Phi_3)-L(Y)$ на отрезке $\eta_0 \leqslant \eta < 1$, находим, что $\Phi_3 \leqslant Y$.

Оценим теперь $z = Y_\eta$. Из уравнения (14) получим следующее уравнение для z:

$$\Lambda(z) = \nu Y^2\frac{dz}{d\eta}+(\eta^2-1)az+(\eta-1)B_0^2 z = \eta a Y, \tag{61}$$

а также граничное условие

$$z\Big|_{\eta=0} = \frac{b}{\nu}-\frac{a}{\nu Y(0)}-\frac{B_0^2}{\nu Y(0)}.$$

Положим $\varphi_1 = -M_7 e^{\alpha\eta}\sigma$. Тогда

$$\Lambda(z-\varphi_1) = M_7 e^{\alpha\eta}\Big(\nu Y^2\frac{1}{2\sigma(1-\eta)}+\alpha\sigma\nu Y^2+(\eta^2-1)a\sigma+(\eta-1)B_0^2\sigma\Big)+\eta a Y.$$

Выберем η_0 из условия $(1-K_4/\sigma)|_{\eta=\eta_0}=c$. В силу выбора η_0 и K_4 имеем $L(\Phi_3)>0$ при $\eta_0<\eta<1$. Поскольку $(\Phi_3-Y)|_{\eta=1}=0$ и

$$\Phi_3\Big|_{\eta=\eta_0} = M_1(1-\eta_0)\sigma(\eta_0)c \leqslant M_2(1-\eta_0)\sigma(\eta_0) = \Phi_2\Big|_{\eta=\eta_0} \leqslant Y(\eta_0),$$

рассматривая выражение $L(\Phi_3)-L(Y)$ на отрезке $\eta_0 \leqslant \eta < 1$, находим, что $\Phi_3 \leqslant Y$.

Выберем $\alpha > 0$ столь большим, чтобы неравенство $\Lambda(z-\varphi_1) > 0$ имело место при $\eta \leqslant \frac{1}{2}$. Выберем теперь M_7 настолько малым, чтобы при $\eta > \frac{1}{2}$ член $\eta a Y$ в выражении $\Lambda(z-\varphi_1)$ стал больше или равным первому члену. Из оценки (11) следует, что найдутся последовательности $\eta_n \to 1$ и $\eta'_n \to 1, n \to \infty$, такие, что

$$z(\eta_n) > -M_1\sigma(\eta_n), \qquad z(\eta'_n) \leqslant -\frac{1}{2}M_2\sigma(\eta'_n). \tag{62}$$

Выберем теперь M_7 настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $(z-\varphi_1)|_{\eta=\eta'_n} < 0$. Тогда очевидно, что $z-\varphi_1$ не может принимать положительных значений при $\eta \leqslant \eta'_n$, так как в противном случае нашлась бы точка $\eta = \overline{\eta}$ такая, что $(z-\varphi_1)|_{\eta=\overline{\eta}} = 0$, $z-\varphi_1 < 0$ при $\overline{\eta} < \eta \leqslant \eta'_n$ и $(z-\varphi_1)_\eta \leqslant 0$ при $\eta = \overline{\eta}$; но это противоречит неравенству $\Lambda(z-\varphi_1) > 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$. Следовательно, $z-\varphi_1 \leqslant 0$ при $\eta \leqslant \eta'_n$. Поскольку $\eta'_n \to 1$ при $n \to \infty$, имеет место $z \leqslant \varphi_1 \leqslant -M_3\sigma$ при $0 \leqslant \eta < 1$.

Рассмотрим $\varphi_2 = -M_4\sigma$. Пользуясь оценкой (11), получим, что

$$\begin{aligned}\Lambda(z-\varphi_2) = M_4\Big(\nu Y^2 \frac{1}{2\sigma(1-\eta)} + (\eta^2-1)a\sigma + (\eta-1)B_0^2\sigma\Big) + \eta a Y \\ \leqslant -M_4\eta(1-\eta)a\sigma + \eta a Y < 0\end{aligned}$$

при $0 \leqslant \eta < 1$, если M_4 достаточно велико. Согласно неравенству (62) при достаточно большом M_4 имеем $(z-\varphi_2)|_{\eta=\eta_n} > 0$. Поскольку $\Lambda(z-\varphi_2) < 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$, функция $z-\varphi_2$ не может принимать отрицательных значений при $\eta \leqslant \eta_n$. Следовательно, $z \geqslant -M_4\sigma$ при $0 \leqslant \eta < 1$.

Получим теперь оценки (14). Согласно уравнению (9) имеем

$$\nu Y Y_{\eta\eta} = (1-\eta^2)a\frac{Y_\eta}{Y} + (1-\eta)B_0^2\frac{Y_\eta}{Y} + \eta a.$$

Отсюда и из оценок (11), (13) следует, что $|YY_{\eta\eta}| \leqslant M_5$. Положим $R = YY_{\eta\eta}$. Продифференцируем уравнение (9) по η, получим для R следующее уравнение:

$$Q(R) \equiv \nu Y R_\eta + \nu Y_\eta R + (\eta^2-1)\frac{aR}{Y} - \frac{\nu Y R}{\eta} + (\eta-1)B_0^2\frac{R}{Y} = -\frac{aY_\eta}{\eta} - B_0^2 Y_\eta. \tag{63}$$

Как следует из оценки (12), найдется последовательность $\overline{\eta}_n \to 1$, $n \to \infty$, такая, что

$$Y_\eta\Big|_{\eta=\overline{\eta}_n} \leqslant \Big(-M_1\sigma + \frac{M_1}{2\sigma} + M_1K_4\Big)\Big|_{\eta=\overline{\eta}_n},$$

$$R\Big|_{\eta=\overline{\eta}_n} \leqslant \frac{1}{\nu}\Big((1-\eta^2)a\frac{Y_\eta}{Y} + (1-\eta)B_0^2\frac{Y_\eta}{Y} + a\eta\Big)\Big|_{\eta=\overline{\eta}_n}$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu}\Big[\frac{(1+\eta)a + B_0^2}{cM_1\sigma}\Big(-M_1\sigma + \frac{M_1}{2\sigma} + M_1K_4\Big) + a\eta\Big]\Big|_{\eta=\overline{\eta}_n} \leqslant -M_8,$$

если n достаточно велико. Здесь $M_8 = \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим $R + M_6$, предполагая, что $M_6 < M_8$. Имеем

$$Q(R+M_6) = -\frac{aY_\eta}{\eta} - B_0^2Y_\eta + M_6\Big(\nu Y_\eta + \frac{(\eta^2-1)a}{Y} + \frac{(\eta-1)B_0^2}{Y} - \frac{\nu Y}{\eta}\Big).$$

Легко видеть, что $Q(R+M_6) > 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$ и $(R+M_6)\Big|_{\eta=\overline{\eta}_n} < 0$ при больших n, если M_6 достаточно мало. Поэтому $R + M_6 < 0$ при $0 \leqslant \eta \leqslant \overline{\eta}_n$. Из того, что $\overline{\eta}_n \to 1$ при $n \to \infty$ следует $R < -M_6$ при $0 \leqslant \eta < 1$.

Существование решения задачи (9), (10) можно доказать на основе теоремы Лере–Шаудера, рассматривая однопараметрическое семейство краевых задач

$$(\nu Y^2 + \varepsilon)Y_{\eta\eta} + (\eta^2-1)aY_\eta - \eta aY + (\eta-1)B_0^2Y_\eta = 0. \qquad 0 < \eta < 1,$$

$$Y(1) = 0, \qquad \Big(\nu Y_\eta - b + \frac{a + B_0^2}{\Psi(Y)}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0,$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 1$; $\Psi(Y)$ – бесконечно дифференцируемая функция при $-\infty < Y < +\infty$ такая, что

$$\Psi(Y) = Y \quad \text{при} \quad Y \geqslant K_2\sqrt{-\ln\mu},$$

$$\Psi(Y) = \frac{1}{2}K_2\sqrt{-\ln\mu} \quad \text{при} \quad Y \leqslant \frac{1}{4}K_2\sqrt{-\ln\mu},$$

$$0 \leqslant \Psi'(Y) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \frac{1}{4}K_2\sqrt{-\ln\mu} \leqslant Y \leqslant K_2\sqrt{-\ln\mu}. \qquad \square$$

Доказательство леммы 3.3. Для функций $W^k = Ye^{-C_1kh}$ имеем

$$
\begin{aligned}
L_k(W) = e^{-C_1kh}\Big[&\nu Y^2 Y_{\eta\eta}\big(e^{-2C_1kh}-1\big)\\
&+\nu Y^2 Y_{\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2(V^k)^2Y^4Y_{\eta\eta}\big(e^{-4C_1kh}-1\big)\\
&+3\nu d(kh)^2\big((V^k)^2-a^2\big)Y^4Y_{\eta\eta}+6\nu d(kh)^2(V^k)^2Y^3Y_\eta^2\big(e^{-3C_1kh}-1\big)\\
&+6\nu d(kh)^2\big((V^k)^2-a^2\big)Y^3Y_\eta^2+(\eta-1)(B_k)^2Y_\eta e^{-3C_1kh}\\
&-(B_k)^2khV^kYe^{-3C_1kh}+\eta khV^kYC_1e^{C_1h'}+(\eta^2-1)kh(a_1^k+V_x^k)Y_\eta\\
&-\eta kh(a_1^k+V^k)\Big]=0,
\end{aligned}
$$

где $0 < h' < h$. В силу предположений леммы имеем

$$\Big|(V^k)^2-a^2\Big| < M_8 \quad \text{при} \quad kh \leqslant X.$$

Кроме того, при $kh \leqslant X$ и достаточно малом X

$$e^{-2C_1kh}-1 \leqslant -khC_1, \quad e^{-3C_1kh}-1 \leqslant -\frac{3}{2}khC_1 \quad e^{-4C_1kh}-1 \leqslant -2khC_1,$$

а в силу леммы 3.2 выводим

$$\big|(\eta^2-1)kh\big(a_1^k+V_\xi^k\big)Y_\eta\big| \leqslant M_9khY.$$

Поэтому, если C_1 достаточно велико, то имеем неравенство $L_k(W) > 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$ и $0 \leqslant kh \leqslant X$.

Учитывая (10), находим, что

$$
\begin{aligned}
l_k(W) = \Big[&\nu\big(1+3d(kh)^2\big((V^k)^2-(a_1^k)^2\big)Y^2\big)YY_\eta\big(e^{-3C_1kh}-1\big)-\\
&-v_0^kY\big(e^{-C_1kh}-1\big)-(v_0^k-b)Y+\big(a_1^k+khV_\xi^k\big)+(B^k)^2\Big]\Big|_{\eta=0}.
\end{aligned}
$$

По условию леммы

$$\big|v_0^k-b\big| \leqslant M_{10}kh, \quad \big|a_1^k-khV_\xi^k\big| \leqslant M_{11}kh \quad \text{при} \quad kh \leqslant X.$$

Отсюда следует, что при достаточно большой постоянной C_1 и X_0, зависящем от V, v_0, имеем $l_k(W) > 0$ при $0 \leqslant kh \leqslant X_0$.

При $0 \leqslant \eta < 1$ и $kh \leqslant X$ получаем неравенства

$$L_k(W) - L_k(w) > 0, \qquad l_k(W) - l_k(w) > 0,$$

откуда следует

$$w^k \leqslant W = Ye^{-C_1kh} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant kh \leqslant X_0.$$

Аналогично получается оценка (62) сверху, так как если $W_* = Ye^{C_2kh}$ и C_2 достаточно велико, то $L_k(W_*) < 0$ и $l_k(W_*) < 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$, $0 \leqslant kh \leqslant X$. □

Доказательство леммы 3.4. Неравенства (16) – (18) докажем по индукции. В лемме 3.2 мы доказали неравенства (17), (18) при $k = 0$. Покажем, что постоянные C_j можно подобрать независимо от h так, что из выполнения неравенств (16) – (18) при $k-1$ следует их справедливость при k, если $0 \leqslant kh \leqslant X$, где X зависит от V, v_0, ν и не зависит от h.

Для удобства в уравнениях

$$L_k(w) \equiv \nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big)(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h}$$
$$+ (\eta^2 - 1)(V^k + khV^k_\xi)w^k_\eta - \eta(V^k + khV^k_\xi)w^k + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3$$
$$+ (\eta - 1)(B^k)^2 w^k_\eta - (B^k)^2 kh w^k = 0$$

и

$$\lambda_k(w) = \left(\nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big)w^k_\eta - v^k_0 + \frac{V^k + khV^k_\xi + (B^k)^2}{w^k}\right)\Big|_{\eta=0} = 0$$

введем обозначения:

$$\mathcal{A}^k \equiv (\eta^2 - 1)(V^k + khV^k_\xi) + (\eta - 1)(B^k)^2, \quad \mathcal{B}^k \equiv -\eta(V^k + khV^k_\xi) - (B^k)^2 kh,$$

$$\mathcal{C}^k \equiv 3\nu d(kh)^2(V^k)^2, \quad \mathcal{D}^k \equiv 6\nu d(kh)^2(V^k)^2, \quad \mathcal{E}^k \equiv V^k + khV^k_\xi + (B^k)^2.$$

Составим уравнения, которым удовлетворяют r^k и z^k. Для начала возьмем

$$w^k_{\eta\eta} = \frac{\eta kh V^k r^k - \mathcal{A}^k z^k - \mathcal{B}^k w^k - \mathcal{D}^k (z^k)^2 (w^k)^3}{(\nu + \mathcal{C}^k (w^k)^2)(w^k)^2}.$$

Из уравнения (6) для w^k вычтем уравнение (6) для w^{k-1} и разделим полученное равенство на h. Находим

$$\nu(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \nu(w^{k-1})^2 w^{k-1}_{\eta\eta}$$
$$= \nu(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \nu(w^{k-1})^2 w^{k-1}_{\eta\eta} + \nu(w^k)^2 w^{k-1}_{\eta\eta} - \nu(w^k)^2 w^{k-1}_{\eta\eta}$$
$$= \nu(w^k)^2 \frac{w^k_{\eta\eta} - w^{k-1}_{\eta\eta}}{h} h + \nu w^{k-1}_{\eta\eta} \frac{(w^k)^2 - (w^{k-1})^2}{h} h$$
$$= \nu(w^k)^2 r^k_{\eta\eta} h + \nu(z^{k-1}_\eta) r^k (w^k + w^{k-1}) h;$$

$$
\begin{aligned}
&3\nu d\Big[(kh)^2(V^k)^2(w^k)^4w^k_{\eta\eta}-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^4w^{k-1}_{\eta\eta}\Big]\\
&=3\nu d\Big[(kh)^2(V^k)^2(w^k)^4w^k_{\eta\eta}\\
&-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^4w^{k-1}_{\eta\eta}+((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^k)^4w^{k-1}_{\eta\eta}\\
&-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^k)^4w^{k-1}_{\eta\eta}\Big]\\
&=3\nu d\frac{(kh)^2(V^k)^2-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2}{h}(w^k)^4w^{k-1}_{\eta\eta}\\
&+3\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^4r^k_{\eta\eta}\\
&+3\nu d((k-1)h)^2(V^{k-1})^2r^kw^{k-1}_{\eta\eta}\big(w^k+w^{k-1}\big)\big((w^k)^2+\big(w^{k-1})^2\big)\\
&=\mathcal{C}^k(w^k)^4r^k_{\eta\eta}+\frac{\mathcal{C}^k-\mathcal{C}^{k-1}}{h}(w^k)^4z^{k-1}_{\eta}\\
&+\mathcal{C}^{k-1}r^kz^{k-1}_{\eta}\big(w^k+w^{k-1}\big)\big((w^k)^2+\big(w^{k-1})^2\big);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&6\nu d\Big[(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(w^k_{\eta\eta})^2-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^3(w^{k-1}_{\eta})^2\Big]\\
&=6\nu d\Big[(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(w^k_{\eta})^2\\
&-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^3(w^{k-1}_{\eta})^2+((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^3(w^k_{\eta})^2\\
&-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^3(w^k_{\eta})^2\Big]\\
&=6\nu d((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^3r^k_{\eta}(z^k_{\eta}+z^{k-1}_{\eta})\\
&+6\nu d\frac{(kh)^2(V^k)^2-((k-1)h)^2(V^{k-1})^2}{h}(z^k_{\eta})^2(w^k)^3\\
&+6\nu d(k-1)h)^2(V^{k-1})^2(z^k)^2r^k\big((w^k)^2+w^kw^{k-1}+(w^{k-1})^2\big)\\
&=\mathcal{D}^{k-1}(w^{k-1})^3r^k_{\eta}(z^k_{\eta}+z^{k-1}_{\eta})+\frac{\mathcal{D}^k-\mathcal{D}^{k-1}}{h}(z^k_{\eta})^2(w^k)^3\\
&+\mathcal{D}^{k-1}(z^k)^2r^k\big((w^k)^2+w^kw^{k-1}+(w^{k-1})^2\big);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^kw^k_{\eta}-\mathcal{A}^{k-1}w^{k-1}_{\eta}&=\mathcal{A}^kw^k_{\eta}-\mathcal{A}^{k-1}w^{k-1}_{\eta}+\mathcal{A}^kw^{k-1}_{\eta}-\mathcal{A}^kw^{k-1}_{\eta}\\
&=\mathcal{A}^kr^k_{\eta}+\frac{\mathcal{A}^k-\mathcal{A}^{k-1}}{h}z^{k-1};\\
\mathcal{B}^kw^k-\mathcal{B}^{k-1}w^{k-1}&=\mathcal{B}^kw^k-\mathcal{B}^{k-1}w^{k-1}+\mathcal{B}^kw^{k-1}-\mathcal{B}^kw^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$= \mathcal{B}^k r^k + \frac{\mathcal{B}^k - \mathcal{B}^{k-1}}{h} w^{k-1};$$

$$\begin{aligned}
&\eta k h V^k r^k - \eta(k-1)hV^{k-1} r^{k-1} \\
&= \eta k h V^k r^k - \eta(k-1)hV^{k-1} r^{k-1} + \eta(k-1)hV^{k-1} r^k - \eta(k-1)hV^{k-1} r^k \\
&\qquad = \eta \frac{khV^k - (k-1)hV^{k-1}}{h} r^k + \eta(k-1)hV^{k-1} \frac{r^k - r^{k-1}}{h}.
\end{aligned}$$

Используя вышеперечисленные выражения введем $R_k(r)$:

$$\begin{aligned}
&R_k(r) \equiv \nu (w^k)^2 r^k_{\eta\eta} + \mathcal{C}^k (w^k)^4 r^k_{\eta\eta} + \mathcal{A}^k r^k_\eta + \mathcal{B}^k r^k \\
&- \eta \frac{khV^k - (k-1)hV^{k-1}}{h} r^k + \frac{\big(w^k + w^{k-1}\big)\big(\nu + \mathcal{C}^{k-1}\big((w^k)^2 + \big(w^{k-1})^2\big)\big)}{\big(\nu + \mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2} \\
&\qquad \times \Big[\eta(k-1)hV^{k-1} r^{k-1} - \mathcal{A}^{k-1} z^{k-1} - \mathcal{B}^{k-1} w^{k-1} \\
&\qquad - \mathcal{D}^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3\Big] r^k - \eta(k-1)hV^{k-1} \frac{r^k - r^{k-1}}{h} \\
&+ \mathcal{D}^{k-1} (w^{k-1})^3 r^k (z^k + z^{k-1}) + \mathcal{D}^{k-1} (z^k)^2 r^k \big((w^k)^2 + w^k w^{k-1} + (w^{k-1})^2\big) \\
&\qquad = -\frac{\mathcal{D}^k - \mathcal{D}^{k-1}}{h} (z^k)^2 (w^k)^3 \\
&\qquad - \frac{3\nu d\big((kh)^2 (V^k)^2 - ((k-1)h)^2 (V^{k-1})^2\big)(w^k)^4}{h\big(\nu + \mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2} \\
&\times \Big[\eta(k-1)hV^{k-1} r^{k-1} - \mathcal{A}^{k-1} z^{k-1} - \mathcal{B}^{k-1} w^{k-1} - \mathcal{D}^{k-1} (z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3\Big] \\
&\qquad - z^{k-1} \frac{\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^{k-1}}{h} - w^{k-1} \frac{\mathcal{B}^k - \mathcal{B}^{k-1}}{h}; \quad k \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Аналогично из (7) получаем

$$\nu \frac{w^k_\eta - w^{k-1}_\eta}{h} = \nu r^k_\eta;$$

$$\begin{aligned}
&3\nu d\Big[(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2 w^k_\eta - ((k-1)h)^2 (V^{k-1})^2 (w^{k-1})^2 w^{k-1}_\eta\Big] \\
&\quad = 3\nu d\Big[(kh)^2 (V^k)^2 (w^k)^2 w^k_\eta - ((k-1)h)^2 (V^{k-1})^2 (w^{k-1})^2 w^{k-1}_\eta \\
&\quad + ((k-1)h)^2 (V^{k-1})^2 (w^{k-1})^2 w^k_\eta - ((k-1)h)^2 (V^{k-1})^2 (w^{k-1})^2 w^k_\eta\Big]
\end{aligned}$$

$$= 3\nu d((k-1)h)^2(V^{k-1})^2(w^{k-1})^2 r^k_\eta + 3\nu d((k-1)h)^2(V^{k-1})^2 z^k r^k\big(w^k + w^{k-1}\big)$$
$$+ 3\nu d\frac{(kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2}{h}(w^k)^2 z^k$$
$$= \mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2 r^k_\eta + \mathcal{C}^{k-1} z^k r^k\big(w^k + w^{k-1}\big) + \frac{\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}}{h}(w^k)^2 z^k;$$

$$\frac{\mathcal{E}^k}{w^k} - \frac{\mathcal{E}^{k-1}}{w^{k-1}} = \frac{\mathcal{E}^k}{w^k} - \frac{\mathcal{E}^{k-1}}{w^{k-1}} + \frac{\mathcal{E}^k}{w^{k-1}} - \frac{\mathcal{E}^k}{w^{k-1}} = \frac{\mathcal{E}^k - \mathcal{E}^{k-1}}{hw^{k-1}} + \frac{\mathcal{E}^k r^k}{w^k w^{k-1}}.$$

Тогда

$$\rho_k(r)n \equiv \Big(\nu r^k_\eta + \mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2 r^k_\eta + \mathcal{C}^{k-1} z^k r^k\big(w^k + w^{k-1}\big) - \frac{\mathcal{E}^k r^k}{w^k w^{k-1}}\Big)\Big|_{\eta=0}$$
$$= \frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h} - \frac{\mathcal{E}^k - \mathcal{E}^{k-1}}{hw^{k-1}(0)} - \frac{\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}}{h}(w^k)^2 z^k, \quad r^k(1) = 0, \quad k \geqslant 1.$$

Дифференцируя уравнение (6) по η, для z^k получим уравнения

$$P_k(z) \equiv \nu(w^k)^2 z^k_{\eta\eta} + 2\nu w^k z^k z^k_\eta + 12\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3 z^k z^k_\eta$$
$$+ 3\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^4 z^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{z^k - z^{k-1}}{h} - khV^k r^k$$
$$+ \mathcal{A}^k z^k_\eta + \mathcal{A}^k_\eta z^k + \mathcal{B}^k z^k + \mathcal{B}^k_\eta w^k + 18\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2(z^k)^3$$
$$+ 12\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3 z^k z^k_\eta = \nu(w^k)^2 z^k_{\eta\eta} + 2\nu w^k z^k z^k_\eta + 4\mathcal{C}^k(w^k)^3 z^k z^k_\eta$$
$$+ \mathcal{C}^k(w^k)^4 z^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{z^k - z^{k-1}}{h} - khV^k r^k + \mathcal{A}^k z^k_\eta + \mathcal{A}^k_\eta z^k + \mathcal{B}^k z^k$$
$$+ \mathcal{B}^k_\eta w^k + 3\mathcal{D}^k(w^k)^2(z^k)^3 + 2\mathcal{D}^k(w^k)^3 z^k z^k_\eta = 0.$$

Из граничного условия (7) при $\eta = 0$ следует условие

$$z^k(0) = \frac{v_0^k}{\big(\nu + \mathcal{C}^k(w^k(0))^2\big)} - \frac{\mathcal{E}^k}{\big(\nu + \mathcal{C}^k(w^k(0))^2\big)w^k(0)}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi^k = C_3 Y$ и оценим $R^k(\varphi)$ при условии, что неравенства (16), (17) выполнены при $k-1$. Сначала заметим, что в силу результатов, полученных в лемме 3.2, выполнено неравенство

$$\Big|\nu C_3 Y^2 Y_{\eta\eta} + C_3\mathcal{A}^k Y_\eta - C_3\mathcal{B}^k Y\Big| \leqslant C_3 M_{12} khY$$

при $0 \leqslant kh \leqslant X$. Так как $U_x > 0$ и $a_{1xx}(0)$ ограничена по предположению леммы, то $\dfrac{khV^k - (k-1)hV^{k-1}}{h} > 0$ при $h \leqslant h_0$ и достаточно малом h_0; кроме того, отношения

$$\frac{(kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2}{h},$$
$$\frac{\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^{k-1}}{h}, \quad \frac{\mathcal{B}^k - \mathcal{B}^{k-1}}{h}, \quad \frac{\mathcal{C}^k - \mathcal{C}^{k-1}}{h}, \quad \frac{\mathcal{D}^k - \mathcal{D}^{k-1}}{h}$$

ограничены.

Далее, учитывая предположения индукции, находим, что

$$\begin{gathered}\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1} - \mathcal{A}^{k-1}z^{k-1} - \mathcal{B}^{k-1}w^{k-1} - \mathcal{D}^{k-1}(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3 \\ \leqslant \eta(k-1)hV^{k-1}C_3Y - (\mathcal{A}^{k-1} - a(\eta^2-1))z^{k-1} - (\eta^2-1)aY_\eta e^{-C_3kh} \\ - (\mathcal{B}^{k-1} + \eta a)w^{k-1} - \eta aYe^{C_2kh} - (\mathcal{D}^{k-1} - 6\nu da^2)(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3 \\ -6\nu da^2Y^3Y_\eta^2e^{3C_2kh}e^{-2C_5kh} \leqslant \nu YY_{\eta\eta} + \mathcal{C}^{k-1}Y^4Y_{\eta\eta} + M_{13}khY - M_{14}Y(\eta),\end{gathered}$$

если $kh \leqslant X$ и X достаточно мало и не зависит от h.

Учитывая эти замечания, получаем, что

$$\begin{gathered}R_k(\varphi) + \biggl| -\frac{3\nu d\bigl((kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2\bigr)(w^k)^4}{h\bigl(\nu + \mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2\bigr)(w^{k-1})^2} \\ \times \Bigl[\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1} - \mathcal{A}^{k-1}z^{k-1} - \mathcal{B}^{k-1}w^{k-1} - \mathcal{D}^{k-1}(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3\Bigr] \\ - z^{k-1}\frac{\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^{k-1}}{h} - w^{k-1}\frac{\mathcal{B}^k - \mathcal{B}^{k-1}}{h}\biggr| < 0 \qquad (64)\end{gathered}$$

при $0 \leqslant \eta < 1$, $0 \leqslant kh \leqslant X(C_3, C_4, C_5)$, где C_3 достаточно велико и не зависит от h; здесь мы использовали неравенства

$$-\eta\frac{khV^k - (k-1)hV^{k-1}}{h}C_3Y + \left|w^{k-1}\frac{\mathcal{B}^k - \mathcal{B}^{k-1}}{h}\right| < 0,$$

$$\bigl(w^k + w^{k-1}\bigr)\bigl((w^k)^2 + (w^{k-1})^2\bigr)C_3Y > \left|\frac{(kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2}{h}\right|,$$

$$M_{12}kh \leqslant \frac{1}{4}\left|\frac{\big(w^k+w^{k-1}\big)\big((w^k)^2+\big(w^{k-1})^2\big)}{\big(\nu+\mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2}\big(\nu+\mathcal{C}^{k-1}\big)\right.$$

$$\left.\times\Big[\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1}-\mathcal{A}^{k-1}z^{k-1}-\mathcal{B}^{k-1}w^{k-1}-\mathcal{D}^{k-1}(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3\Big]\right|.$$

Постоянная C_3 не зависит от C_4 и C_5, так как если

$$M_{14} \geqslant \frac{M_{14}}{2}+\frac{M_{15}A^{k-1}z^{k-1}}{Y},$$

то

$$-\frac{C_3M_{15}\big(w^k+w^{k-1}\big)\big((w^k)^2+\big(w^{k-1})^2\big)\big(\nu+\mathcal{C}^{k-1}\big)A^{k-1}z^{k-1}}{\big(\nu+\mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2} + \left|z^{k-1}\frac{\mathcal{A}^k-\mathcal{A}^{k-1}}{h}\right|<0$$

при подходящем выборе C_3 и достаточно малом X.

Вычислим $\rho_k(\varphi)$. Имеем

$$\rho_k(\varphi)=C_3\Big(\nu Y_\eta+\mathcal{C}^{k-1}(w^{k-1})^2Y_\eta+\mathcal{C}^{k-1}z^kY\big(w^k+w^{k-1}\big)+ +\frac{\mathcal{C}^k-\mathcal{C}^{k-1}}{h}(w^k)^2z^k-\frac{\mathcal{E}^kY}{w^kw^{k-1}}\Big)\Big|_{\eta=0}-C_3M_{16}, \qquad M_{16}>0,$$

при $kh \geqslant 0$, $kh \leqslant X$ и достаточно малом X. Поэтому

$$\rho_k(\varphi)+\left|\frac{v_0^k-v_0^{k-1}}{h}-\frac{\mathcal{E}^k-\mathcal{E}^{k-1}}{hw^{k-1}(0)}\right|<0, \tag{65}$$

если C_3 достаточно велико, $kh \leqslant X$ и $h \leqslant h_0$; здесь воспользовались тем, что по условию при малых h ограничены отношения

$$\frac{v_0^k-v_0^{k-1}}{h}, \qquad \frac{\mathcal{E}^k-\mathcal{E}^{k-1}}{h}.$$

Рассмотрим функции $S_\pm^k=\varphi^k\pm r^k$ при $0\leqslant kh\leqslant X$. Из оценок (64), (65) получаем неравенства

$$R_k(S_\pm^k)<0, \qquad \rho_k(S_\pm^k)<0.$$

Поскольку $S_\pm^k(1)=0$, из этих неравенств на основании принципа максимума находим, что $S_\pm^k(\eta)\geqslant 0$ при $0\leqslant\eta\leqslant 1$ и, следовательно, $|r^k|\leqslant C_3Y$.

Для оценки $Z^k = w^k_\eta$ рассмотрим функцию $F_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}$. Имеем

$$\begin{aligned}P_k(F_1) = e^{-C_5 kh}\Big\{\Big(&\nu Y^2 Y_{\eta\eta\eta} + 2\nu Y Y_\eta Y_{\eta\eta} + (\eta^2-1)aY_{\eta\eta} + \eta a Y_\eta - aY\Big)\\ &+ \nu\big((w^k)^2 - Y^2\big)Y_{\eta\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^4 Y_{\eta\eta\eta}\\ &+ \big(\mathcal{A}^k - (\eta^2-1)a\big)Y_{\eta\eta} + \big(\mathcal{A}^k_\eta - 2\eta a\big)Y_\eta + \big(\mathcal{B}^k + \eta a\big)Y_\eta\Big\}\\ &- khV^k r^k + 2\nu Y_\eta Y_{\eta\eta}\Big(w^k e^{-C_5 kh} - Y\big)e^{-C_5 kh}\\ &+ 24\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3 Y_\eta Y_{\eta\eta} e^{-2C_5 kh}\\ &+ 18\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2 Y_\eta^3 e^{-3C_5 kh}\\ &+ \big(\mathcal{B}^k_\eta w^k + aYe^{-C_9 kh}\Big) + \eta kh C_5 V^k e^{C_5 h'} e^{-C_5 kh} Y_\eta. \quad (66)\end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение (9) по η, получим

$$\begin{aligned}\nu Y^2 Y_{\eta\eta\eta} + 2\nu Y Y_\eta Y_{\eta\eta} + 2\eta a Y_\eta + (\eta^2-1)aY_{\eta\eta} - \eta a Y_\eta - aY + B_0^2 Y_\eta&\\ + (\eta-1)B_0^2 Y_{\eta\eta} = 0.& \quad (67)\end{aligned}$$

Из (67) следует, что $\left|Y^2 Y_{\eta\eta\eta}\right| \leqslant M_{17}|Y_\eta|$, а также, что в (66) первое слагаемое правой части равно нулю. Слагаемые

$$khV^k r^k, \qquad \mathcal{B}^k_\eta w^k + aYe^{-C_5 kh}$$

имеют порядок khY и $C_5 khY$ соответственно. Остальные слагаемые в (66) имеют порядок khY_η. Если выбрать C_5 достаточно большим, то последние два члена в (66) превосходят по модулю остальные, если $kh \leqslant X$, и X достаточно мало. Поэтому $P_k(F_1) < 0$ при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и $0 \leqslant kh \leqslant X$.

Из неравенств (15) следует, что существует две последовательности $\eta_m \to 1$ и $\overline{\eta}_m \to 1$ при $m \to \infty$ такие, что

$$z^k\Big|_{\eta=\eta_m} \leqslant Y_\eta(\eta_m)e^{-C_1 kh}, \qquad z^k\Big|_{\eta=\overline{\eta}_m} \geqslant Y_\eta(\overline{\eta}_m)e^{C_2 kh}. \quad (68)$$

Пусть $C_5 > C_1$. Рассмотрим разность $S^k = F_1 - Z^k$. Из (68) следует, что $S^k(\eta_m) \geqslant 0$. При $k \geqslant 1$, $kh \leqslant X$, достаточно малом X и достаточно большом C_5 имеем

$$S^k(0) = -\frac{v_0^k}{\big(\nu + \mathcal{C}^k(w^k(0))^2\big)} - \frac{b}{\nu} + \frac{\mathcal{E}^k}{\big(\nu + \mathcal{C}^k(w^k(0))^2\big)w^k(0)} -$$

$$-\frac{a}{\big(\nu+\mathcal{C}^k\big(Y(0)\big)^2\big)Y(0)}+Y_\eta(0)\big(e^{-C_5kh}-1\big)>0. \tag{69}$$

Из уравнения (6) при $k=1$ получаем для $z^1=w^1_\eta$ уравнение

$$P_1^0(z_1)\equiv\nu(w^1)^2z^1_\eta+\mathcal{C}^1(w^1)^4z^1_\eta+\mathcal{A}^1z^1+\mathcal{D}^1(w^1)^3z^1=-\mathcal{B}^1w^1+\eta V^1w^1.$$

Полагая $F_2=Y_\eta e^{-C_8h}$, находим

$$\begin{aligned}P_1^0(z^1-F_2)=e^{-C_8h}\Big\{&\nu\big(Y^2-(w^1)^2\big)Y_{\eta\eta}+\mathcal{C}^k(w^1)^4Y_{\eta\eta}\\&+\big((\eta^2-1)a-\mathcal{A}^1\big)Y_\eta+\mathcal{D}^k(w^1)^3\big)Y_\eta\Big\}\\&-\Big(\mathcal{B}^1w^1+\eta aYe^{-C_8h}\Big)+\eta V^1\big(w^1-Y\big)>0,\quad \eta_0\leqslant\eta<1,\end{aligned}$$

при достаточно большом C_8 и достаточно малом h. Кроме того, если выберем
$C_8\geqslant C_1$, то из (68) получим неравенство

$$\big(z^1-F_2\big)\Big|_{\eta=\eta^1_m}\leqslant 0.$$

Как и при доказательстве леммы 3.2, находим, что $z^1\leqslant F_2$ при $\eta_0\leqslant\eta<1$. Возьмем $C_5\geqslant C_8$. Тогда при $\eta_0\leqslant\eta<1$ получим неравенство

$$z^1\leqslant F^1_1. \tag{70}$$

Для разности $z^k-F_1=S^k$ имеем

$$\begin{aligned}P_k(F_1)-P_k(z)=\nu(w^k)^2S^k_{\eta\eta}&+\mathcal{C}^k(w^k)^4S^k_{\eta\eta}-\eta\frac{khV^k}{h}S^k+\mathcal{A}^kS^k_\eta\\&+\mathcal{B}^kS^k_\eta+3\mathcal{D}^k(w^k)^2(S^k_\eta)^3+2\nu w^kF^k_{1\,\eta}S^k\\+2\nu w^kz^kS^k_\eta&+4\mathcal{C}^k(w^k)^3F^k_{1\,\eta}S^k+4\mathcal{C}^k(w^k)^3z^kS^k_\eta+\mathcal{A}^k_\eta S^k\\&+2\mathcal{D}^k(w^k)^3F^k_{1\,\eta}S^k+2\mathcal{D}^k(w^k)^3z^kS^k_\eta<-\eta\frac{khV^k}{h}S^{k-1}.\end{aligned} \tag{71}$$

В неравенстве (71) коэффициент при S^k равен

$$2\nu w^kF^k_{1\,\eta}+4\mathcal{C}^k(w^k)^3F^k_{1\,\eta}+\mathcal{B}^k+\mathcal{A}^k_\eta+2\mathcal{D}^k(w^k)^3F^k_{1\,\eta}-\eta kV^k. \tag{72}$$

Если $0\leqslant kh\leqslant X$ и X достаточно мало, то выражение (72) отрицательно при $k\geqslant 2$ для $0\leqslant\eta\leqslant 1$ и при $k=1$ для $0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$ в силу выбора η_0. Так как $S^1(0)>0$, $S^1(\eta_0)>0$, как показано выше, и $S^0=0$ в силу леммы 3.2, то из (71) по принципу максимума получаем $S^1>0$

при $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$. Вместе с (70) это приводит к неравенству $S^1 \leqslant 0$ при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Далее, в силу того, что сумма (72) при $k \leqslant 2$ отрицательна, $S^1 \leqslant 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$, из (71), (68) и (69) по принципу максимума выводим неравенство $S^k \leqslant 0$ при $0 \leqslant \eta < 1$, $k \leqslant 2$. Поэтому

$$z^k \leqslant F_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}.$$

Для оценки функции z^k снизу рассмотрим функцию $F_3 = Y_\eta e^{C_4 kh}$ и вычислим $P_k(F_3)$. Так же, как при оценке z^k сверху, покажем, что $P_k(F_3 > 0)$, если C_6 достаточно велико и X достаточно мало. Выбрав $C_4 > C_2$, получим

$$(F_3 - z^k)\Big|_{\eta=\overline{\eta}_m} \leqslant 0, \qquad (F_3 - z^k)\Big|_{\eta=0} < 0$$

при достаточно большом C_4 и $0 \leqslant kh \leqslant x$. Рассуждая далее так же, как при доказательстве оценки z^k сверху, получим, что

$$z^k \geqslant Y_\eta e^{C_4 kh}.$$

Из полученных оценок функций w^k, r^k, z^k и уравнения (6) следует ограниченность произведения $w^k w^k_{\eta\eta}$. Установим второе из неравенств (18). Из (6) находим

$$\begin{aligned}
\nu w^k w^k_{\eta\eta}\Big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big) &= \eta khV^k\frac{r^k}{w^k} - (\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)\frac{w^k_\eta}{w^k} \\
&\quad - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big) - \mathcal{D}^k(w^k)^2(w^k_\eta)^2 \\
\leqslant \eta khV^k\frac{r^k}{w^k} - (\eta^2-1)\frac{aY_\eta}{Y} + \eta a + (\eta^2-1)&\Big[\frac{aY_\eta}{Y} - \big(V^k + khV^k_\xi\big)\frac{w^k_\eta}{w^k}\Big] - \\
- \Big[\eta a - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big)\Big] - \mathcal{D}^k(w^k)^2(w^k_\eta)^2 &< -\nu M_6 M_{17} = -\nu C_7,
\end{aligned}$$

если $0 \leqslant kh \leqslant X$ и X достаточно мало. Этим доказательство леммы 3.4 завершено. □

Доказательство леммы 5.1. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
T(Y_m) \equiv \nu Y_0^2 Y_{m\eta\eta} + (\eta^2-1)aY_{m\eta} - 2\eta a Y_m \\
+ 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m + (\eta-1)B_0^2 Y_{m\eta},
\end{aligned} \tag{73}$$

$$t(Y_m) \equiv \big(\nu Y_0 Y_{m\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_m - bY_m\big)\Big|_{\eta=0}. \tag{74}$$

Решение системы (42) с условиями (43) сводится к последовательному решению краевых задач для линейных уравнений

$$T(Y_m) = F_m, \quad t(Y_m) = f_m\Big|_{\eta=0}, \quad Y_m(1) = 0, \tag{75}$$

$m = 1, 2, \dots, q$, где F_m и f_m выражаются через уже известные функции $Y_0, \dots, Y_{m-1}$ и их производные.

Будем доказывать лемму 5.1 по индукции. Предполагая утверждение выполненным для Y_{m-1}, докажем его справедливость для Y_m.

Решение задачи (75) можно получить как предел при $\varepsilon \to 0$ решений задачи

$$\varepsilon Y^{\varepsilon}_{m\eta\eta} + T(Y^{\varepsilon}_m) = F_m, \qquad t(Y^{\varepsilon}_m) = f_m\Big|_{\eta=1}, \qquad Y^{\varepsilon}_m(1) = 0, \tag{76}$$

которая имеет единственное решение, если $\varepsilon > 0$. Единственность решения задачи (76) следует из принципа максимума, так как коэффициент при Y_m в выражении для $T(Y_m)$ отрицателен при $\eta < 1$ в силу неравенства (13), а коэффициент $\nu Y_{0_\eta} - b$ при Y_m в граничном условии (43), в силу условия (10) равный $-\frac{a}{Y_0}$, также отрицателен. Существование решения задачи (74) следует из его единственности, так как для этой задачи можно построить функцию Грина (см, например, [28]).

Решения $Y^{\varepsilon}_m(\eta)$ задачи (76) равномерно ограничены по ε. Действительно, пусть $E_m = \mathrm{const} > 0$. Тогда

$$T(\pm Y^{\varepsilon}_m + E_m) \pm \varepsilon Y^{\varepsilon}_{m\eta\eta} = \pm F_m + E_m(2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} - 2a\eta) < 0,$$

$$t(\pm Y^{\varepsilon}_m + E_m) = \pm f_m\Big|_{\eta=0} + E_m\Big(-\frac{a}{Y_0}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0,$$

если E_m достаточно велико, так как по предположению индукции $|F_m|$ и $|f_m|$ ограничены постоянными, не зависящими от ε. Очевидно,

$$(\pm Y^{\varepsilon}_m + E_m)\Big|_{\eta=1} > 0.$$

Следовательно, по принципу максимума имеем $|Y^{\varepsilon}_m| \leqslant E_m$, где E_m не зависит от ε.

Уточним эту оценку в окрестности $\eta = 1$. Положим,

$$\psi_m = N'_m(1-\eta)\sigma, \quad N'_m = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда при $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$, где $1-\eta_0$ достаточно мало, имеем

$$\varepsilon\psi_{m\eta\eta} + T(\psi_m) = N'_m\Big[(\nu Y_0^2+\varepsilon)\Big(-\frac{1}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big)$$

$$+a(\eta^2-1)\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big)+2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta}(1-\eta)\sigma-2a\eta(1-\eta)\sigma+(\eta-1)B_0^2\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big)\Big]$$

$$\leqslant -N'_m(1-\eta)\sigma\gamma_m, \quad \gamma_m = \mathrm{const} > 0,$$

так как

$$Y_0 Y_{0\eta\eta} < -M_6, \qquad \nu Y_0^2 \geqslant 2a(1-\eta)^2\sigma^2\Big(1-\frac{K_4}{\sigma}\Big)^2$$

в силу оценок (12), (14). Выберем N'_m столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$T(\pm Y_m^\varepsilon+\psi_m)+\varepsilon(\pm Y_m^\varepsilon+\psi_m)_{\eta\eta} \leqslant \pm F_m - N'_m(1-\eta)\sigma\gamma_m < 0$$

при $\eta_0 \leqslant \eta < 1$. Это возможно, так как в силу предположения индукции справедлива следующая оценка для F_M:

$$|F_m| \leqslant d_m(1-\eta)\sigma, \quad d_m = \mathrm{const} > 0.$$

При N'_m достаточно большом, получим

$$(\pm Y_m^\varepsilon + \psi_m)\Big|_{\eta=\eta_0} \geqslant (-E_m + N'_m(1-\eta)\sigma)\Big|_{\eta=\eta_0} > 0.$$

Поскольку $(\pm Y_m^\varepsilon + \psi_m)\Big|_{\eta=1} = 0$, в силу принципа максимума

$$\pm Y_m^\varepsilon + \psi_m \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Из оценок

$$|Y_m^\varepsilon| \leqslant E_m \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad |Y_m^\varepsilon| \leqslant N'_m(1-\eta)\sigma \quad \text{при} \quad \eta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

вытекает существование постоянной N_m такой, что $|Y_m^\varepsilon| \leqslant N_m(1-\eta)\sigma$.

Производные $Y_{m\eta}^\varepsilon$, $Y_{m\eta\eta}^\varepsilon$, $Y_{m\eta\eta\eta}^\varepsilon$ на отрезке $0 \leqslant \eta < 1-\delta$, $\delta = \mathrm{const} > 0$, можно оценить равномерно по ε , используя уравнения (42) для Y_m^ε и граничные условия (43). Из этих оценок следует компактность семейства функций $Y_{m\eta}^\varepsilon$, $Y_{m\eta\eta}^\varepsilon$ на отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant 1-\delta$(здесь ε – параметр семейства, $0 < \varepsilon \leqslant 1$), а также равномерная сходимость Y_m^ε на отрезке $[0,1]$ при $\varepsilon \to 0$ по некоторой подпоследовательности.

Оценим теперь производные $Y_{m\eta}$. Для $z_m = Y_{m\eta}$ имеем уравнение

$$S(z_m) \equiv \nu Y_0^2 z_{m\eta} + (\eta^2-1)az_m + (\eta-1)B_0^2 z_m = F_m + 2a\eta Y_m - 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m.$$

Из оценок $-N_m(1-\eta)\sigma \leqslant Y_m \leqslant N_m(1-\eta)\sigma$ следует существование последовательностей η_n^+ и η_n^- таких, что $\eta_n^+ \to 1$, $\eta_n^- \to 1$ при $n \to \infty$ и

$$z_m\Big|_{\eta=\eta_n^+} \geqslant \Big(N_m(1-\eta)\sigma\Big)_\eta\Big|_{\eta=\eta_n^+}, \quad z_m\Big|_{\eta=\eta_n^-} \geqslant -\Big(N_m(1-\eta)\sigma\Big)_\eta\Big|_{\eta=\eta_n^-}. \quad (77)$$

Рассмотрим функции $c_m'(\sigma+1)\pm z_m$. Легко видеть, что при $0 \leqslant \eta < 1$ и достаточно большом c_m' имеем

$$\begin{aligned} S(c_m'(\sigma+1) \pm z_m) = c_m'\Big[\nu Y_0^2 \frac{1}{2\sigma(1-\eta)} + a(\eta^2-1)(\sigma+1)\Big] \\ \pm(F_m + 2a\eta Y_m - 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m) \\ \leqslant -c_m' a\eta(1-\eta)\sigma - c_m'(1-\eta^2)a + |F_m + 2a\nu Y_m - 2\nu Y_0 Y_{m\eta\eta} Y_m| < 0. \end{aligned}$$

Из равенства (77) следует, что

$$(c_m'(\sigma+1) \pm z_m)\Big|_{\eta=\eta_n^\pm} > 0,$$

если c_m' достаточно велико.

Из этого неравенства и условия $S_m(c_m'(\sigma+1)\pm z_m) < 0$ легко следует, что

$$c_m'(\sigma+1) \pm z_m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad |z_m| \leqslant c_m\sigma \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \eta < 1.$$

Согласно уравнениям (42) имеем

$$\begin{aligned} |\nu Y_0 Y_{m\eta\eta}| \leqslant |2\nu Y_{0\eta\eta} Y_m| + \Big|(\eta^2-1)\frac{aY_{m\eta}}{Y_0}\Big| + \Big|\frac{2a\nu Y_m}{Y_0}\Big| + \Big|\frac{F_m}{Y_0}\Big| \\ + \Big|\frac{(\eta-1)B_0^2 Y_{m\eta}}{Y_0}\Big|. \end{aligned}$$

Из оценок (11)–(14) для Y_0 и неравенств (44), справедливых по предположения индукции для Y_l при $l \leqslant m-1$ вытекает, что $|Y_0 Y_{m\eta\eta}| \leqslant R_m$. Лемма доказана. □

Доказательство леммы 5.2. Введем обозначения

$$W = \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m, \qquad W_1 = W e^{-C_{19}\xi^{q+1}}.$$

Предположим X столь малым, что при $0 \leqslant \xi \leqslant X$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered} C_{20}(1-\eta)\sigma \leqslant W \leqslant C_{21}(1-\eta)\sigma \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \\ -C_{22}\sigma \leqslant W_\eta \leqslant -C_{23}\sigma, \quad WW_{\eta\eta} \leqslant -C_{24}, \end{gathered}$$

$\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1-\eta)}$, $\mu = \mathrm{const}$, $0 < \mu < 1$. При достаточно большом C_{19} и достаточно малом X имеем

$$L(W_1) > 0, \qquad l(W_1) > 0, \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant X.$$

В теореме 3.1 доказано, что решение $w(\xi, \eta)$ задачи (4), (5) неотрицательно в Ω, обладает непрерывными производными w_η, $w_{\eta\eta}$, w_ξ в Ω; кроме того, w положительно при $\eta = 0$ и производная w_η непрерывна по η при $\eta = 0$. Нетрудно установить, что функция W_1 также обладает такими свойствами. Поэтому из полученных выше неравенств по признаку максимума (см. [4, §2.1]) следует, что $w \geqslant W_1$. Аналогично устанавливается, что $w \leqslant We^{C_{25}\xi^{q+1}}$. Лемма доказана. □

Благодарности

Авторы благодарят рецензентов за полезные замечания, которые позволили улучшить изложение результатов. Выражаем также благодарность А. И. Назарову за внимательное прочтение работы и советы по её улучшению.

Список литературы

1. L. Prandtl, *Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibund.* — Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg (1904), Teubner (1905), 484–494.
2. О. А. Олейник, *О системе уравнений теории пограничного слоя.* — ЖВМ и МФ **3** (1963), 489–507.
3. О. А. Олейник, *К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости.* — ПММ **30**, No. 5 (1966), 801–821.
4. О. А. Олейник, В. Н. Самохин, *Математические методы в теории пограничного слоя.*, М., Наука, Физматлит (1997), 512.
5. G. Bayada, M. Chambat, *Homogenezation of the Stokes system in a thin film with rapidly varying thickness.* — Model. Math. et Anal. Number. (M^2AN) **23**, No. 2 (1989), 205–234.
6. Y. Amirat, G. A. Chechkin, M. S. Romanov, *On Multiscale Homogenization Problems in Boundary Layer Theory.* — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **63**, No. 3 (2012), 475–502.
7. А. Ю. Линкевич, С. В. Спиридонов, Г. А. Чечкин, *О пограничном слое ньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду.* — Уфимский математический журнал **3**, No. 3 (2011), 93–104.
8. Т. С. Ратью, М. С. Романов, Г. А. Чечкин, *Усреднение уравнений динамики нематических жидких кристаллов с неоднородной плотностью.* — Проблемы математического анализа **66** (2012), 167–173.

9. А. Ю. Линкевич, С. В. Спиридонов, Г. А. Чечкин, *Усреднение стратифицированной дилатантной жидкости.* — Современная математика. Фундаментальные направления **48** (2013), 75–83.
10. А. Ю. Линкевич, Т. С. Ратью, С. В. Спиридонов, Г. А. Чечкин, *О тонком слое неньютоновской жидкости на шероховатой поверхности, протекающей через перфорированную преграду.* — Проблемы математического анализа **68** (2013), 173–182.
11. Г. А. Чечкин, Т. П. Чечкина, *Плоский скалярный аналог линейной вырождающейся гидродинамической задачи с непериодической микроструктурой на свободной поверхности.* — Проблемы математического анализа **78** (2015), 201–213.
12. Т. П. Чечкина, *Скалярная гидродинамическая задача с непериодически расположенными концентрированными массами на поверхности.* — Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ" **4**, No. 1 (2015), 25–34.
13. G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, T. S. Ratiu, M. S. Romanov, *Nematodynamics and Random Homogenization.* — Applicable Analysis **95**, No. 10 (2016), 2243–2253.
14. О. А. Ладыженская, *О модификациях уравнений Навье–Стокса для больших градиентов скоростей.* — Тр. МИАН СССР **102** (1967), 85–104.
15. В. Н. Самохин, Г. М. Фадеева, Г. А. Чечкин, *Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье–Стокса и теория пограничного слоя.* — Вестник МГУП им. Ивана Федорова **5** (2009), 127–143.
16. В. Н. Самохин, Г. М. Фадеева, Г. А. Чечкин, *Аттракторы системы уравнений пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды.* — Вестник МГУП им. Ивана Федорова **1** (2011), 245–249.
17. В. Н. Самохин, Г. М. Фадеева, Г. А. Чечкин, *Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса.* — Труды семинара им. И.Г.Петровского, М.: Изд-во Моск. ун-та **28** (2011), 329–361.
18. R. R. Bulatova, G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, V. N. Samokhin, *On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium.* — C R Mécanique **346**, No. 9 (2018), 807–814.
19. З. П. Шульман, Б. М. Берковский, *Пограничный слой неньютоновских жидкостей.* — Минск: Наука и техника (1966).
20. Я. Г. Сапунков, *Автомодельные решения пограничного слоя неньютоновской жидкости в магнитной гидродинамике.* — Изв. АН СССР. МЖГ No. 6 (1967), 77–82.
21. В. Н. Самохин, *Математические вопросы магнитной гидродинамики неньютоновских сред.* — М.: Изд-во МГУП (2004).
22. Р. Р. Булатова, *О поведении решений системы Прандтля для вязкой МГД-среды О. А. Ладыженской при обтекании конфузора.* — Доклады РАН **503**, No 2 (2022), 33–39.
23. Р. Р. Булатова, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, *Уравнения МГД-пограничного слоя для вязкой несжимаемой среды в модификации О. А. Ладыженской. Существование и единственность решений, влияние магнитного поля на явление отрыва пограничного слоя.* — Проблемы математического анализа **92** (2018), 83–100.

24. Р. Р. Булатова, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, *Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко.* — Доклады РАН **487** (2019), 119–125.
25. О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения с неотрицательной характеристической формой.*, Москва: Изд-во МГУ (2010).
26. О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.* — Мат. сб. **69**, No 111 (1966), 111–140.
27. Ж. Лере, Ю. Шаудер, *Топология и функциональные уравнения.* — УМН **1**, No 3,4 (1946), 71–95.
28. Ph. Hartman, *On the existence of similar solutions of some boundary layer problems.* — SIAM J. Math. Anal. **3**, No 1 (1972), 120–147.

Samokhin V. N., Chechkin G. A. On attractors of MHD boundary layer of liquid with Ladyzhenskaya rheological law. Influence of magnetic field on velocity asymptotics.

In the paper it considers the boundary layer of a rheologically complex magnetohydrodynamic medium obeying the law of O. A. Ladyzhenskaya. Using the Crocco change of variables, the original problem is reduced to a problem for one nonlinear equation, for which the theorem of existence and uniqueness of the solution is proved. After that, the validity of similar theorems for the original problem is shown. Then, asymptotics of solutions of the original problem in the neighborhood of the initial point are constructed.

Московский политехнический университет,
Москва, Россия
E-mail: avt428212@yandex.ru

Поступило 9 сентября 2024 г.

Московский Государственный
Университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия;
Институт математики с компьютерным центром,
подразделение Уфимского федерального
исследовательского центра РАН, Уфа, Россия;
Институт математики
и математического моделирования,
Алматы, Казахстан
E-mail: chechkin@mech.math.msu.su