Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 536, 2024 г.

В. Г. Осмоловский

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД С ОДИНАКОВЫМИ МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ

Нине Николаевне в год её юбилея

§1. Введение

Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред сводится к минимизации функционала энергии [1]

$$I_0[u,\chi,t,\Omega]=\int\limits_{\Omega}\{\chi(x)(F^+(\nabla u(x))+t)+(1-\chi(x))F^-(\nabla u(x))\}\,dx. \quad (1.1)$$

В котором $\Omega\subset\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$ — ограниченная область, поле смещений $u(x)$, $x\in\Omega$ — m-мерная вектор-функция, $(\nabla u)_{i,j}=u^i_{x_j}$, $i,j=1,\dots,m$, характеристическая функция $\chi(x)$ заведует распределением фаз с индексами $\pm$ в области Ω (в точках, где $\chi(x)=1$ располагается фаза с индексом $+$, в оставшихся — с индексом $-$), а числовой параметр t играет роль температуры.

Для определения плотностей энергии $F^\pm$ нам потребуется пространство $m\times m$ симметричных матриц $\mathbb{R}^{m\times m}_s$ со скалярным произведением

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\operatorname{tr}\alpha\beta,\quad \alpha,\,\beta\in\mathbb{R}^{m\times m}_s, \quad (1.2)$$

линейные отображения $A^\pm:\mathbb{R}^{m\times m}_s\to\mathbb{R}^{m\times m}_s$ со свойствами

$$\begin{gathered}\langle A^\pm\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,A^\pm\beta\rangle,\quad \nu|\alpha|^2\leqslant\langle A^\pm\alpha,\alpha\rangle\leqslant\nu^{-1}|\alpha|^2,\\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^{m\times m}_s,\quad |\alpha|^2=\langle\alpha,\alpha\rangle,\quad 0<\nu<1,\end{gathered} \quad (1.3)$$

а также пара элементов $\zeta^\pm\in\mathbb{R}^{m\times m}_s$. В механике сплошных сред величины $2A^\pm$ называются тензорами модулей упругости, а $\zeta^\pm$ — тензорами остаточной деформации. С помощью введённых обозначений зададим квадратичные приближения плотностей энергии деформаций $F^\pm$ каждой из фаз равенством

$$F^\pm(\nabla u)=\langle A^\pm(e(\nabla u)-\zeta^\pm),e(\nabla u)-\zeta^\pm\rangle, \quad (1.4)$$

Ключевые слова: невыпуклые вариационные задачи, задачи со свободными поверхностями, задачи о фазовых переходах в механике сплошных сред.

где тензор деформации $e(\nabla u) \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$ в координатном представлении имеет вид

$$e_{ij}(\nabla u) = \frac{1}{2}(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}), \quad i,j = 1,\dots,m. \tag{1.5}$$

В качестве области определения функционала (1.1) возьмём для u и χ множества

$$\mathbb{X}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

$$\mathbb{Z}'(\Omega)\text{— совокупность всех измеримых характеристических функций.} \tag{1.6}$$

Выбор множества $\mathbb{X}(\Omega)$ означает, что в определённом смысле поле смещений обнуляется на $\partial\Omega$ и непрерывно при пересечении границы раздела фаз.

Под состоянием равновесия двухфазовой упругой среды при фиксированном значении t будем понимать решение вариационной задачи

$$I_0[\widehat{u}_t, \widehat{\chi}_t, t, \Omega] = \inf_{u\in\mathbb{X}(\Omega),\chi\in\mathbb{Z}'(\Omega)} I_0[u,\chi,t,\Omega], \;\; \widehat{u}_t \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \widehat{\chi}_t \in \mathbb{Z}'(\Omega). \tag{1.7}$$

Состояние равновесия назовём однофазовым, если $\widehat{\chi}_t(x) = 1$ или $\widehat{\chi}_t(x) = 0$ почти всюду в Ω и двухфазовым в противном случае.

Перечислим ряд свойств задачи (1.7), доказательство которых содержится в [2–5]. Существуют такие независящие от области Ω температуры $t_\pm$ (назовём их температурами фазовых переходов), что

$$\begin{gathered} \widehat{u}_t \equiv 0,\ \widehat{\chi}_t \equiv 1, \quad t \leqslant t_-, \qquad \widehat{u}_t \equiv 0,\ \widehat{\chi}_t \equiv 0, \quad t \geqslant t_+ \\ (\text{при } t < t_- \text{ и } t > t_+ \text{ эти решениия единственны}), \\ \text{при } t \in (t_-, t_+) \text{ нет однофазовых состояний равновесия,} \end{gathered} \tag{1.8}$$

а критерием совпадения чисел $t_\pm$ является равенство $A^+\zeta^+ = A^-\zeta^-$. В случае его выполнения задача (1.7) сильно вырождается, что приводит к существованию состояний равновесия при всех $t \in \mathbb{R}$ и к возможности выписать их в явном виде. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$[A\zeta] = A^+\zeta^- - A^-\zeta^- \neq 0, \tag{1.9}$$

или, что то же самое, $t_- < t_+$. При фиксированном $t \in (t_-, t_+)$ задача (1.7) оказывается разрешимой или неразрешимой сразу для всех областей Ω с $|\partial\Omega|_m = 0$ (здесь и далее через $|E|_m$ обозначена m-мерная мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^m$, это обозначение относится как к областям Ω, так и к их границам $\partial\Omega$).

В этой работе нас будет интересовать случай

$$A^{\pm} = A, \quad [\zeta] = \zeta^{+} - \zeta^{-} \neq 0, \quad m = 2. \tag{1.10}$$

Если при выполнении первых двух условий (1.10) задача (1.7) разрешима для некоторого t, то для любого её решения $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ величина

$$\widehat{Q}(t) = \frac{1}{|\Omega|_m} \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_t(x)\, dx \tag{1.11}$$

совпадает с числом $\bar{Q}(t)$

$$\bar{Q}(t)=1,\ t\leqslant t_-, \quad \bar{Q}(t)=\frac{t_+-t}{t_+-t_-},\ t\in(t_-,t_+), \quad \bar{Q}(t)=0,\ t\geqslant t_+, \tag{1.12}$$

а для температур фазовых переходов $t_{\pm}$ единственными решениями задачи (1.7) будут однофазовые состояния равновесия $\widehat{u}_{t_-} \equiv 0$, $\widehat{\chi}_{t_-} \equiv 1$, $\widehat{u}_{t_+} \equiv 0$, $\widehat{\chi}_{t_+} \equiv 0$.

Для формулировки первой теоремы введём в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ со скалярным произведением (1.2) ортоноримованный базис

$$\mathrm{e}_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\ \mathrm{e}_2,\ \mathrm{e}_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s, \quad \langle \mathrm{e}_\mathrm{i}, \mathrm{e}_\mathrm{j} \rangle = \delta_{ij}, \tag{1.13}$$

где i – единичная матрица в $\mathbb{R}^2$, а элементы e_2, e_3 подчинены лишь условиям ортонормированности (1.13). Координаты вдоль осей с ортами e_i обозначим через z_i, $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим в этих координатах три множества

$$\mathcal{K} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s : \xi = z_1\,\mathrm{e}_1 + z_2\,\mathrm{e}_2 + z_3\,\mathrm{e}_3,\ z_1 = \pm\sqrt{z_2^2 + z_3^2}\}, \tag{1.14}$$

$$\mathcal{K}_{\mathrm{int}} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s : \xi = z_1\,\mathrm{e}_1 + z_2\,\mathrm{e}_2 + z_3\,\mathrm{e}_3,\ |z_1| > \sqrt{z_2^2 + z_3^2}\}, \tag{1.15}$$

$$\mathcal{K}_{\mathrm{ext}} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s : \xi = z_1\,\mathrm{e}_1 + z_2\,\mathrm{e}_2 + z_3\,\mathrm{e}_3,\ |z_1| < \sqrt{z_2^2 + z_3^2}\}. \tag{1.16}$$

Первое из них – прямая круговая коническая поверхность с осью вращения e_1 и её углом с образующей конуса равным $\pi/4$ (все углы в пространстве $\mathbb{R}^{m\times m}_s$ порождены скалярным произведением(1.2)). Множество (1.15) – конус с границей $\mathcal{K}$, (1.16) – дополнение к его замыканию $\overline{\mathcal{K}_{\mathrm{int}}}$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (1.10). *Если*

$$[\zeta] \notin \mathcal{K}_{\mathrm{int}}, \tag{1.17}$$

то задача (1.7) *не имеет решений при каждом* $t \in (t_-, t_+)$ *и всех* A *в любой ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *с* $|\partial\Omega|_m = 0$.

Для формулировки второй теоремы обозначим через $S_r(A^{1/2}[\zeta])$ сферу в пространстве $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ с радиусом $r > 0$ и центром в точке $A^{1/2}[\zeta]$. Тогда в силу положительности линейного отображения A поверхность $\mathcal{L}([\zeta], r, A) = A^{-1/2} S_r(A^{1/2}[\zeta])$ будет эллипсоидом с центром в точке $[\zeta]$. Определим (возможно и пустое) множество $\mathcal{M}([\zeta], r, A)$ равенством

$$\mathcal{M}([\zeta], r, A) = \mathcal{L}([\zeta], r, A) \cap \mathcal{K}. \tag{1.18}$$

Если $\mathcal{L}([\zeta], r, A) \subset \bar{\mathcal{K}}_{\mathrm{int}}$, $\mathcal{M}([\zeta], r, A) \neq \emptyset$, то множество $\mathcal{M}([\zeta], r, A)$ состоит из точек касания эллипсоида $\mathcal{L}([\zeta], r, A)$ с конической поверхностью $\mathcal{K}$ изнутри конуса $\mathcal{K}_{\mathrm{int}}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (1.10),

$$[\zeta] \in \mathcal{K}_{\mathrm{int}}, \tag{1.19}$$

а r и A таковы, что

$$\mathcal{L}([\zeta], r, A) \subset \bar{\mathcal{K}}_{\mathrm{int}}, \quad \mathcal{M}([\zeta], r, A) \neq \varnothing. \tag{1.20}$$

Если множество $\mathcal{M}([\zeta], r, A)$ состоит из одной или двух точек, то задача (1.7) *не имеет решений при каждом $t \in (t_-, t_+)$ в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с $|\partial\Omega|_m = 0$.*

В третьей теореме формулируется результат о неразрешимости задачи (1.7) при выполнении условий (1.10) для некоторых модулей упругости A и скачков тензоров остаточной деформации $\zeta^\pm$. Он призван служить иллюстрацией к теоремам 1, 2.

При произвольном $m \geqslant 2$ отображение A однозначно определяется набором собственных элементов $\mathfrak{e}_i$ и соответствующих им собственных чисел μ_i

$$\begin{gathered} A\mathfrak{e}_i = \mu_i \mathfrak{e}_i, \quad \mathfrak{e}_i \in \mathbb{R}_s^{m\times m}, \ \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \\ \mu_i > 0, \quad i, j = 1, \dots, \frac{m(m+1)}{2}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

По набору $\mathfrak{e}_i$, μ_i отображение A восстанавливается согласно формуле

$$A\cdot = \mu_1 \,\mathrm{Id}\cdot + \Sigma_{j=2}^{\frac{m(m+1)}{2}} (\mu_j - \mu_1) \langle \cdot, \mathfrak{e}_j \rangle \mathfrak{e}_j, \tag{1.22}$$

в которой Id – тождественное отображение в $\mathbb{R}_s^{m\times m}$. В случае, когда

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m}}, \quad \mu_2 = \dots = \mu_{\frac{m(m+2)}{2}}, \quad [\zeta] = c\,\mathrm{i}, \ c \in \mathbb{R} \tag{1.23}$$

(здесь i – единичная матрица в $\mathbb{R}^m$), упругая среда называется изотропной. При условиях (1.23) задача (1.7) при всех t в любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$ разрешима и её решение можно выписать в явном виде [6]. Наша цель – избавиться от указанного в (1.23) совпадения собственных чисел в частном случае (1.10).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (1.10). *Если для собственных элементов* $\mathfrak{e}_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s$, *собственных чисел* $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ *отображения* A *и для тензоров остаточной деформации* $\zeta^{\pm} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s$ *справедливы соотношения*

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \quad \mu_2 \neq \mu_3, \quad [\zeta] = c\,\mathrm{i}, \ c \neq 0, \tag{1.24}$$

то задача (1.7) *не имеет решений для всех* $t \in (t_-, t_+)$ *в любой ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *с* $|\partial\Omega|_m = 0$.

Вопрос о разрешимости задачи (1.7) при линейных или периодических граничных условиях исследовался в большом количестве работ, например [6–11]. В частности, утверждение теоремы 1 в иных терминах содержится в [9]. Новым в теоремах 1–3 является привязка вопроса о разрешимости задачи (1.7) при условиях (1.10) к взаимному расположению конической поверхности $\mathcal{K}$, тензора $[\zeta]$ и зависящему от параметров задачи эллипсоида $\mathcal{L}([\zeta], r, A)$, что позволяет рассмотреть более общие (как это продемонстрировано в теореме 3) тензоры модулей упругости A.

Факт отсутствия решений у задачи (1.7), призванной описывать физический процесс, приводит к различным модернизациям её постановки. Одна из возможных регуляризаций функционала (1.1) сводится к учёту поверхностной энергии границы раздела фаз, то есть к замене (1.1) на

$$\begin{gathered} I[u, \chi, t, \sigma, \Omega] = I_0[u, \chi, t, \Omega] + \sigma S[\chi], \\ \sigma > 0, \quad u \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \chi \in \mathbb{Z}(\Omega), \end{gathered} \tag{1.25}$$

где $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{Z}'(\Omega) \cap BV(\Omega)$, $S[\chi]$ – площадь границы раздела фаз, определяемая как полная вариация функции χ, а $\sigma > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения. Установлено [12], что для функционала (1.25) состояния равновесия существуют для всех t и имеется определённая связь свойств этих состояний равновесия со свойствами исходного функционала (1.1), наличие которой делает изучение задачи (1.7) востребованным.

§2. Метод Фурье и минимизация функционала энергии

В разделах 1 и 2 этого параграфа описан приём предложенный в работе [7]. Его несущественная подгонка для нужд нашей задачи дана в [13].

1. Специальные подпространства пространства $\mathbb{R}_s^{m\times m}$. Для векторов $k, c \in \mathbb{R}^m$ с координатами k_i, c_i, $i = 1, \ldots, m$ в некотором ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^m$ зададим их тензорное произведение $(k\otimes c)_{i,j} = k_i c_j$ и его симметризацию $e_{ij}(k\otimes c) = \frac{1}{2}(k_i c_j + k_j c_i)$. Очевидно, что $e(k\otimes c) \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$. Легко устанавливается справедливость соотношений

$$
\begin{gathered}
|e(k\otimes c)|^2 = \frac{1}{2}\big(|k|^2|c|^2 + (k\cdot c)^2\big),\\
\langle e(k\otimes c), e(k'\otimes c')\rangle = \frac{1}{2}\big((k\cdot k')(c\cdot c') + (k\cdot c')(k'\cdot c)\big),\\
e(k\otimes c) = e(c\otimes k),\ \alpha e(k\otimes c) = e(\alpha k\otimes c) = e(k\otimes \alpha c),\\
\langle \xi, e(k\otimes c)\rangle = c\cdot \xi k,\\
\xi \in \mathbb{R}_s^{m\times m}, \quad k, k', c, c' \in \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Для $0 \neq k \in \mathbb{R}^m$ положим $\bar{k} = k|k|^{-1}$. В дальнейшем черта над вектором из $\mathbb{R}^m$ означает, что его модуль равен единице, а точка (как в 1–3 строках (2.1)) – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. По каждому $\bar{k}$ определим линейное подпространство $V_{\bar{k}} \subset \mathbb{R}_s^{m\times m}$

$$
V_{\bar{k}} = \{\theta \in \mathbb{R}_s^{m\times m} : \theta = e(\bar{k}\otimes c),\ c \in \mathbb{R}^m\}. \tag{2.2}
$$

Благодаря первой формуле (2.1), $\dim V_{\bar{k}} = m$. Таким образом, $V_{\bar{k}}$ – m-мерное подпространство $\frac{m(m+1)}{2}$-мерного пространства $\mathbb{R}_s^{m\times m}$. Очевидно, что $V_{\bar{k}} = V_{-\bar{k}}$. Линейное отображение $A^{1/2}$ переводит подпространство $V_{\bar{k}} \subset \mathbb{R}_s^{m\times m}$ на подпространство $A^{1/2}V_{\bar{k}} \subset \mathbb{R}_s^{m\times m}$ той же размерности. Обозначим через

$$
\pi_{A^{1/2}V_{\bar{k}}}, \quad \pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} = \mathrm{Id} - \pi_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} \tag{2.3}
$$

ортопроекторы в $\mathbb{R}_s^{m\times m}$ на подпространство $A^{1/2}V_{\bar{k}}$ и его ортогональное дополнение. По определению ортопроектора

$$
\begin{gathered}
\pi_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}[\zeta] = A^{1/2} e(\bar{k}\otimes \xi_{\bar{k}}),\\
|A^{1/2}([\zeta] - e(\bar{k}\otimes \xi_{\bar{k}}))| = \min_{c\in\mathbb{R}^m} |A^{1/2}([\zeta] - e(\bar{k}\otimes c))| \quad \xi_{\bar{k}} \in \mathbb{R}^m.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Положим

$$\mathcal{N}^- = \{\bar{k}_- \in S_1 : |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}_-}} A^{1/2}[\zeta]| = \min_{\bar{k}\in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}[\zeta]|\}. \qquad (2.5)$$

(здесь и далее S_1 – единичная сфера пространства $\mathbb{R}^m$). Поскольку величина $|\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar{k}}} A^{1/2}[\zeta]|$ непрерывна по $\bar{k} \in S_1$, множество $\mathcal{N}^- \neq \varnothing$. Очевидно, что вместе с $\bar{k}_-$ множество $\mathcal{N}^-$ содержит точку $-\bar{k}_-$.

2. Вспомогательные вариационные задачи. Фиксируем ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$ и в порождённой им системе координат обозначим через $K_{2\pi}$ куб с ребром 2π (при $m=2$ – квадрат со стороной 2π)

$$K_{2\pi} = \{x \in \mathbb{R}^m : \ 0 < x_j < 2\pi, \ j = 1, \ldots, m\}. \qquad (2.6)$$

Наряду с пространством вектор-функций $\mathbb{X}(K_{2\pi})$ с нулевыми граничными условиями нам потребуется ещё пространство вектор-функций

$$\mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi}) = \{u \in W_2^1(K_{2\pi}, \mathbb{R}^m) : \ u|_{x_j=0} = u|_{x_j=2\pi}, \ j = 1, \ldots m\} \qquad (2.7)$$

с периодическими граничными условиями. Для функций $u \in \mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi})$, $\chi \in \mathbb{Z}'(K_{2\pi})$ справедливы разложения в ряды Фурье, сходящиеся в пространствах на $W_2^1(K_{2\pi}, \mathbb{R}^m)$ и $L_2(K_{2\pi})$, соответственно:

$$\begin{gathered} u(x) = \Sigma_{k\in\mathcal{N}} c_k v_k(x), \ c_k \in \mathbb{C}^m, \quad \chi(x) - Q = \Sigma_{k\in\mathcal{N}} \chi_k v_k(x), \ \chi_k \in \mathbb{C}, \\ v_k(x) = \frac{1}{|K_{2\pi}|_m^{1/2}} \exp i(k\cdot x), \quad Q = \frac{1}{|K_{2\pi}|_m} \int\limits_{K_{2\pi}} \chi(x)\, dx, \end{gathered} \qquad (2.8)$$

где $\mathcal{N}$ – множество всех ненулевых векторов в $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами, а

$$c_k = c'_k + i c''_k, \ c'_k, c''_k \in \mathbb{R}^m, \quad \chi_k = \chi'_k + i\chi''_k, \quad \chi'_k, \chi''_k \in \mathbb{R}. \qquad (2.9)$$

Разложения (2.8) определяют функцию u лишь с точностью до постоянного вектора и однозначно – функцию $\chi - Q$.

Для функционала (1.1) при $A^{\pm} = A$ справедливо легко проверяемое представление

$$\begin{aligned} I_0[u, \chi, t, K_{2\pi}] &= J[u, \chi, K_{2\pi}] - |K_{2\pi}||A^{1/2}[\zeta]|^2 Q(1-Q) \\ &+ |K_{2\pi}|\big((t - t^*)Q + |A^{1/2}\zeta^-|^2\big), \quad t^* = |A^{1/2}\zeta^-|^2 - |A^{1/2}\zeta^+|^2, \\ &u \in \mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi}), \quad \chi \in \mathbb{Z}'(K_{2\pi}), \end{aligned} \qquad (2.10)$$

в котором

$$J[u,\chi,K_{2\pi}] = \int\limits_{K_{2\pi}} \big|A^{1/2}\big(e(\nabla u - (\chi - Q)[\zeta])\big)\big|^2\,dx. \tag{2.11}$$

Разложения (2.8) позволяют записать функционал (2.11) в виде

$$\begin{gathered} J[u,\chi,K_{2\pi}] = \Sigma_{k\in\mathcal{N}}|\chi_k|^2|\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]|^2 \\ + \Sigma_{k\in\mathcal{N}}|A^{1/2}\big(\,e(\bar k\otimes(|k|c'_k - \chi''_k\xi_{\bar k}))\,\big)|^2 \\ + \Sigma_{k\in\mathcal{N}}\,|A^{1/2}\big(\,e(\bar k\otimes(|k|c''_k + \chi'_k\xi_{\bar k}))\,\big)|^2, \\ u\in\mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi}),\ \ \chi\in\mathbb{Z}'(K_{2\pi}),\ \ \bar k = k|k|^{-1},\ \ k\in\mathcal{N}, \\ \pi_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta] = A^{1/2}e(\bar k\otimes\xi_{\bar k}),\ \ \xi_{\bar k}\in\mathbb{R}^m. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Поскольку $\mathbb{X}(K_{2\pi}) \subset \mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi})$, равенство (2.12) справедливо и для функций $u\in\mathbb{X}(K_{2\pi})$. Известно, что

$$\begin{gathered} \inf_{u\in\mathbb{X}(K_{2\pi}),\chi\in\mathbb{Z}'_Q(K_{2\pi})} J[u,\chi,K_{2\pi}] = \inf_{u\in\mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi}),\chi\in\mathbb{Z}'_Q(K_{2\pi})} J[u,\chi,K_{2\pi}] \\ = |K_{2\pi}|_m \min_{\bar k\in S_1}|\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]|^2 Q(1-Q), \\ \mathbb{Z}'_Q(K_{2\pi}) = \{\chi\in\mathbb{Z}'(K_{2\pi}):\ \frac{1}{|K_{2\pi}|_m}\int\limits_{K_{2\pi}}\chi(x)\,dx = Q\},\ \ Q\in[0,1]. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Благодаря явному выражению в правой части (2.13), справедливы равенства

$$t_{\pm} = t^* \pm \max_{\bar k\in S_1}|\pi_{A^{1/2}V_{\bar k}}A^{1/2}[\zeta]|^2, \quad t^* = |A^{1/2}\zeta^-|^2 - |A^{1/2}\zeta^+|^2. \tag{2.14}$$

При выбранном в $\mathbb{R}^m$ базисе для определённого в (2.11) функционала $J[u,\chi,K_{2\pi}]$ рассмотрим две вариационные задачи (величина $\bar Q(t)$ задана в (1.12))

$$\begin{gathered} J[\widehat u_t,\widehat\chi_t,K_{2\pi}] = \inf_{u\in\mathbb{X}(K_{2\pi}),\chi\in\mathbb{Z}'_{\bar Q(t)}(K_{2\pi})} J[u,\chi,K_{2\pi}], \\ \widehat u_t\in\mathbb{X}(K_{2\pi}),\ \ \widehat\chi_t\in\mathbb{Z}'_{\bar Q(t)}(K_{2\pi}),\ \ t\in\mathbb{R}, \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} J[u^{\#}_t,\chi^{\#}_t,K_{2\pi}] = \inf_{u\in\mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi}),\chi\in\mathbb{Z}'_{\bar Q(t)}(K_{2\pi})} J[u,\chi,K_{2\pi}], \\ u^{\#}_t\in\mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi}),\ \ \chi^{\#}_t\in\mathbb{Z}'_{\bar Q(t)}(K_{2\pi}),\ \ t\in\mathbb{R}. \end{gathered} \tag{2.16}$$

3. Достаточные условия неразрешимости задачи (1.7), (1.10) при всех $t \in (t_-, t_+)$ в любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с $|\partial\Omega|_2 = 0$. Свойства решений вспомогательных задач (2.15), (2.16) позволяют установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1 *Пусть выполняется предположение* (1.10)*, а множество* (2.5) *состоит из одной или двух пар диаметрально противоположных точек. Тогда задача* (1.7) *неразрешима при всех* $t \in (t_-, t_+)$ *в любой области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *с* $|\partial\Omega|_2 = 0$.

Доказательство. Пусть $A^{\pm} = A$, $t \in \mathbb{R}$, $m \geqslant 2$. В силу (2.13) каждое решение задачи (2.15) является решением задачи (2.16), а (2.10), (1.12) гарантируют совпадение множеств решений задач (2.15) и (1.7) в $\Omega = K_{2\pi}$. Поэтому наличие таких $t \in (t_-, t_+)$ и базисов в $\mathbb{R}^m$, для которых задача (2.16) не имеет решения $u_t^{\#}$, $\chi_t^{\#}$ с $u_t^{\#} \in \mathbb{X}(K_{2\pi})$ приводит к неразрешимости задачи (1.7) для этого t и всех $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с $|\partial\Omega|_2 = 0$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно установить существование в $\mathbb{R}^m$ при $m = 2$ такого базиса, что в порождённом им квадрате (2.6) задача (2.16) при всех $t \in (t_-, t_+)$ не имеет решений $u_t^{\#}$, $\chi_t^{\#}$ с $u_t^{\#} \in \mathbb{X}(K_{2\pi})$.

Выделим две причины отсутствия указанных решений задачи (2.16). Первая из них заключается в том, что задача (2.16) в порождённом некоторым базисом квадрате (2.6) вообще не имеет решений для всех $t \in (t_-, t_+)$. Согласно второй – задача (2.16) разрешима в этом квадрате для каждого $t \in (t_-, t_+)$, но для всех указанных t первая компонента любого решения $u_t^{\#}$, $\chi_t^{\#}$ не принадлежит пространству $\mathbb{X}(K_{2\pi})$. Таким образом, для доказательства леммы достаточно найти такой базис в $\mathbb{R}^2$, что в порождённом им квадрате (2.6) реализуется одна из двух приведённых причин.

Благодаря (2.12), (2.13) и легко проверяемой равномерной по $\bar{k} \in S_1$ ограниченности чисел $|\xi_{\bar{k}}|$, пара $u_t^{\#} \in \mathbb{X}^{\#}(K_{2\pi})$, $\chi_t^{\#} \in \mathbb{Z}'_{\bar{Q}(t)}(K_{2\pi})$ будет решением (2.16) в том и только том случае, если коэффициенты Фурье $\chi_k^{\#}$ функции $\chi_t^{\#}(\,\cdot\,) - \bar{Q}(t)$ и коэффициенты Фурье $c_k^{\#}$ функции $u_t^{\#}(\,\cdot\,)$ для всех $k \in \mathcal{N}$ удовлетворяют соотношениям

$$\chi_k^{\#} = 0 \ \text{ при } \ k|k|^{-1} \notin \mathcal{N}^-; \quad c_k^{\#} = i|k|^{-1}\xi_{\bar{k}}\chi_k^{\#}. \tag{2.17}$$

Поэтому задача (2.16) в кубе (2.6) неразрешима лишь по причине отсутствия функции $\chi_t^\# \in \mathbb{Z}'_{\bar{Q}(t)}(K_{2\pi})$ с удовлетворяющими первому равенству (2.17) коэффициентами $\chi_k^\#$. Последнее заведомо так, если

$$k|k|^{-1} \notin \mathcal{N}^- \text{ для всех } k \in \mathcal{N}; \quad t \in (t_-, t_+). \tag{2.18}$$

Действительно, (2.18) и первые условия (2.17) означают равенство $\chi_k^\# = 0$ для всех $k \in \mathcal{N}$. Следовательно, $\chi_t^\#(x) = \bar{Q}(t)$ почти всюду в $K_{2\pi}$, что противоречит включению $\bar{Q}(t) \in (0,1)$ при $t \in (t_-, t_+)$. Таким образом, для реализации первой причины достаточно найти такой базис в $\mathbb{R}^2$, что порождённое им множество $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию (2.18).

Для реализации второй причины нужно предъявить такой базис в $\mathbb{R}^2$, что в порождённом им квадрате (2.6) множество функций $\chi_t^\# \in \mathbb{Z}'_{\bar{Q}(t)}(K_{2\pi})$ с удовлетворяющими (2.17) коэффициентами $\chi_k^\#$ не пусто, но построенные по любой функции $\chi_t^\#$ из этого множества функции $u_t^\# \in \mathbb{X}^\#(K_{2\pi})$ с коэффициентами $c_k^\#$ из второго равенства (2.17), не принадлежат пространству $\mathbb{X}(K_{2\pi})$. Покажем, как ограничения леммы на структуру множества $\mathcal{N}^-$ позволяют построить в $\mathbb{R}^2$ базисы с описанными выше свойствами. Пусть множество $\mathcal{N}^-$ состоит только из одной пары диаметрально противоположных точек $\pm\bar{k}_-$. Фиксируем в $\mathbb{R}^2$ вектор $\bar{k}$ таким образом, чтобы тангенс угла между $\bar{k}_-$ и $\bar{k}$ был иррационален. В качестве базиса в $\mathbb{R}^2$ возьмём пару $\bar{k}$, $\bar{k}^\perp$. Поскольку тангенс угла между векторами $k|k|^{-1}$ и $\bar{k}$ рационален для всех $k \in \mathcal{N}$, обязано выполняться соотношение (2.18). Пусть множество $\mathcal{N}^-$ состоит только из двух различных пар диаметрально противоположных точек $\pm\bar{k}'_-$ и $\pm\bar{k}''_-$. Пусть ϕ – угол между векторами $\bar{k}'_-$ и $\bar{k}''_-$. Подбирая правильным образом знаки у векторов этих пар, без ограничения общности будем считать, что $\phi \in (0, \pi/2]$.

Предположим, что $\phi \in (0, \pi/2)$, а $\operatorname{tg}\phi$ – рациональное число. В растворе между векторами $\bar{k}'_-$ и $\bar{k}''_-$ разместим вектор $\bar{k}$. Обозначим угол между векторами $\bar{k}'_-$ и $\bar{k}$ через α, $0 < \alpha < \phi$. Тогда угол между $\bar{k}$ и $\bar{k}''_-$ совпадёт с $\phi - \alpha$. Из формул

$$\operatorname{tg}(\phi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\phi\,\operatorname{tg}\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}(\phi - \alpha)}{1 + \operatorname{tg}\phi\,\operatorname{tg}(\phi - \alpha)}, \tag{2.19}$$

следует, что при предположении о рациональности $\operatorname{tg}\phi$ оба числа $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}(\phi-\alpha)$ рациональны или иррациональны одновременно. Фиксируем угол α с иррациональным тангенсом и выберем в $\mathbb{R}^2$ в качестве базисных ортов векторы $\bar{k}$ и $\bar{k}^{\perp}$. Поскольку тангенс угла между векторами $k|k|^{-1}$ и $\bar{k}$ рационален для всех $k\in\mathcal{N}$, обязано выполняться соотношение (2.18).

В случае $\phi=\pi/2$ та же конструкция с иррациональным $\operatorname{tg}\alpha$ без использования (2.19) приводит к иррациональности $\operatorname{tg}(\pi/2-\alpha)$, что означает справедливость (2.18).

Предположим, что $\phi\in(0,\pi/2)$, а $\operatorname{tg}\phi$ – иррациональное число. Возьмём в качестве базиса в $\mathbb{R}^2$ орты $\bar{k}^{(1)}=\bar{k}'_-$, $\bar{k}^{(2)}=\bar{k}'^{\perp}_-$. Координаты вектора $x\in\mathbb{R}^2$ вдоль оси с ортом $\bar{k}^{(1)}$ обозначим через x_1, а вдоль оси с ортом $\bar{k}^{(2)}$ – через x_2. Поскольку $\operatorname{tg}\phi$ иррационален, только для векторов $k\in\mathcal{N}$ вида $k=(k_1;0)$ справедливо включение $k|k|^{-1}\in\mathcal{N}^-$. Поэтому функция $\chi_t^{\#}(.)\in\mathbb{Z}'_{\bar{Q}(t)}(K_{2\pi})$ с удовлетворяющими первому равенству (2.17) коэффициентами $\chi_k^{\#}$ зависит только от координаты x_1. Учитывая второе равенство (2.17), приходим к выводу, что сосчитанная по коэффициентам c_k функция $u_t^{\#}$ также зависит лишь от x_1. Поскольку $\bar{Q}(t)\in(0,1)$ при $t\in(t_-,t_+)$, функция $u_t^{\#}\neq 0$. Следовательно, $u_t^{\#}\notin\mathbb{X}(K_{2\pi})$. $\square$

§3 Геометрия плоскостей $V_{\bar{k}}$ в пространстве $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$

Пусть $m=2$. В этом случае $V_{\bar{k}}$ – двумерное подпространство трёхмерного пространства $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$. Произвольные двумерные подпространства $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ будем называть плоскостями, а одномерные – прямыми. По определению подпространств и те и другие содержат нулевую точку. Приведём ряд фактов о плоскостях $V_{\bar{k}}$ и краткое их доказательство.

(1). *Если $m=2$, а плоскости $V_{\bar{k}'}$ и $V_{\bar{k}''}$ совпадают, то $\bar{k}'=\pm\bar{k}''$.*

Поскольку $\dim\mathbb{R}_s^{2\times 2}=3$, $\dim V_{\bar{k}'}=\dim V_{\bar{k}''}=2$ и $V_{\bar{k}'}=V_{\bar{k}''}$, существует единственный с точностью до знака элемент $\xi\in\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ со свойствами $\xi\perp V_{\bar{k}'}$, $\xi\perp V_{\bar{k}''}$, $|\xi|=1$. Из условий ортогональности в силу (2.1) имеем $\xi\bar{k}'=\xi\bar{k}''=0$. Если $\bar{k}'\neq\pm\bar{k}''$, то векторы $\bar{k}',\bar{k}''$ линейно независимы и $\xi=0$, что приводит к противоречию с нормировкой $|\xi|=1$.

(2). *Через каждую точку $e(k\otimes c)\in\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ с линейно независимыми $k,c\in\mathbb{R}^2$ проходит только две плоскости $V_{\bar{k}}$ с $\bar{k}=\bar{k}'=\pm k|k|^{-1}$,*

$\bar{k} = \bar{k}'' = \pm c|c|^{-1}$. *Их пересечение совпадает с прямой* $\alpha e(\bar{k}' \otimes \bar{k}'')$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Из линейной независимости векторов k и c следуют неравенства $k \neq 0$, $c \neq 0$ и линейная независимость векторов $\bar{k}'$ и $\bar{k}''$. Поэтому плоскости $V_{\bar{k}'}$ и $V_{\bar{k}''}$ различны. В силу соотношений

$$V_{\bar{k}'} \ni e(\bar{k}' \otimes \alpha\bar{k}'') = \alpha e(\bar{k}' \otimes \bar{k}'') = e(\bar{k}'' \otimes \alpha\bar{k}') \in V_{\bar{k}''} \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

они пересекаются лишь по прямой $\alpha e(\bar{k}' \otimes \bar{k}'')$, содержащей при $\alpha = |k|\,|c|$ точку $e(k \otimes c)$. Таким образом, при линейной независимости k и c через точку $e(k \otimes c)$ проходят две плоскости с указанным пересечением.

Предположим существование отличной от $V_{\bar{k}'}$ и $V_{\bar{k}''}$ плоскости $V_{\bar{k}'''}$, проходящей через точку $e(k \otimes c)$. Тогда векторы каждой из пар $\bar{k}'''$, $\bar{k}' = k|k|^{-1}$ и $\bar{k}'''$, $\bar{k}'' = c|c|^{-1}$ линейно независимы и

$$V_{\bar{k}'''} \cap V_{\bar{k}'} \ni e(k \otimes c) \in V_{\bar{k}'''} \cap V_{\bar{k}''}.$$

Следовательно, найдутся такие β', β'', что

$$e(k \otimes c) = |k|\,|c|\,e(\bar{k}' \otimes \bar{k}'') = \beta' e(\bar{k}' \otimes \bar{k}''') = \beta'' e(\bar{k}'' \otimes \bar{k}''').$$

Тогда $e(\bar{k}' \otimes (\beta'\bar{k}''' - |k||c|\bar{k}'')) = e(\bar{k}'' \otimes (\beta''\bar{k}''' - |k||c|\bar{k}')) = 0$, что в силу (2.1) приводит к линейной зависимости векторов каждой из пар $\bar{k}''', \bar{k}'$ и $\bar{k}''', \bar{k}''$, противоречащей линейной независимости $\bar{k}', \bar{k}''$.

(3). *Пусть* $0 \neq k \in \mathbb{R}^2$. *Тогда через точку* $e(k \otimes k) \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s$ *проходит единственная плоскость* $V_{\bar{k}}$ *с* $\bar{k} = \pm k|k|^{-1}$.

Предположим, что существуют две плоскости $V_{\bar{k}}$ и $V_{\bar{k}'}$, $\bar{k}' \neq \pm\bar{k}$, содержащие точку $e(k \otimes k)$. Тогда $e(\bar{k} \otimes \bar{k}) = |k|^{-2} e(k \otimes k)$ также принадлежит этим плоскостям. Очевидно, что первая из них содержит дополнительно точку $e(\bar{k} \otimes \bar{k}')$, вторая – точку $e(\bar{k}' \otimes \bar{k}) = e(\bar{k} \otimes \bar{k}')$, а обе ещё и нулевую точку. Благодаря (2.1) и линейной независимости векторов $\bar{k}, \bar{k}'$ с единичными модулями, выполняется неравенство

$$|\langle e(\bar{k} \otimes \bar{k}'), e(\bar{k} \otimes \bar{k})\rangle|^2 = (\bar{k} \cdot \bar{k}')^2 < \frac{1}{2}(1 + (\bar{k} \cdot \bar{k}')^2) = |e(\bar{k} \otimes \bar{k})|^2 |e(\bar{k} \otimes \bar{k}')|^2.$$

Поэтому точки $e(\bar{k} \otimes \bar{k})$, $e(\bar{k} \otimes \bar{k}')$, 0 лежат на обеих плоскостях, но не на одной прямой. Следовательно, $V_{\bar{k}} = V_{\bar{k}'}$, что влечёт за собой равенство $\bar{k} = \pm\bar{k}'$.

2. Плоскости $V_{\bar{k}}$ и определители содержащихся в них матриц. Пусть векторы $k, c \in \mathbb{R}^2$, k_i, c_i, $i = 1, 2$ – их координаты в фиксированном ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\det e(k \otimes c) = \begin{vmatrix} k_1 c_1 & 1/2(k_1 c_2 + k_2 c_1) \\ 1/2(k_1 c_2 + k_2 c_1) & k_2 c_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(k \cdot c^{\perp})^2, \quad c^{\perp} \in \mathbb{R}^2, \quad |c^{\perp}| = |c|, \quad c^{\perp} \cdot c = 0. \tag{3.1}$$

Вектор $c^{\perp}$ определяется однозначно (с точностью до знака при $c \neq 0$). Удобно задавать его координаты равенствами $c_1^{\perp} = -c_2$, $c_2^{\perp} = c_1$. Из (3.1) следует, что $\det \xi \leqslant 0$ для всех $\xi = e(k \otimes c)$. Последнее утверждение допускает уточнение, отмеченное в [13]:

(4). *Критерием того, что* $0 \neq \xi \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$ *имеет вид* $\xi = e(\bar{k} \otimes c)$ *с некоторыми линейно независимыми* $\bar{k}, c \in \mathbb{R}^2$ *является условие* $\det \xi < 0$, *а с линейно зависимыми – равенство* $\det \xi = 0$.

3. Распределение плоскостей $V_{\bar{k}}$ в пространстве $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$. Фиксируем в $\mathbb{R}^2$ вектор $\bar{k}$ и ортогональный к нему $\bar{k}^{\perp}$. Определим $\mathrm{e}_i \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$, $i = 1, 2, 3$ равенствами

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{i}, \\ \mathrm{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e((\bar{k} + \bar{k}^{\perp}) \otimes (\bar{k} - \bar{k}^{\perp})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e(\bar{k} \otimes \bar{k}) - e(\bar{k}^{\perp} \otimes \bar{k}^{\perp})), \\ \mathrm{e}_3 &= \sqrt{2} e(\bar{k} \otimes \bar{k}^{\perp}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где i – единичная матрица в $\mathbb{R}^2$. Выберем в $\mathbb{R}^2$ какой-нибудь ортонормированный базис. Пусть $\bar{k}_i, \bar{k}_i^{\perp}$, $i = 1, 2$ – координаты векторов $\bar{k}$ и $\bar{k}^{\perp}$ в этом базисе. Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{k}_1 \bar{k}_1 - \bar{k}_1^{\perp} \bar{k}_1^{\perp} & 1/2(\bar{k}_1 \bar{k}_2 - \bar{k}_1^{\perp} \bar{k}_2^{\perp}) \\ 1/2(\bar{k}_1 \bar{k}_2 - \bar{k}_1^{\perp} \bar{k}_2^{\perp}) & \bar{k}_2 \bar{k}_2 - \bar{k}_2^{\perp} \bar{k}_2^{\perp} \end{pmatrix}, \\ \mathrm{e}_3 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \bar{k}_1 \bar{k}_1^{\perp} & 1/2(\bar{k}_1 \bar{k}_2^{\perp} + \bar{k}_2 \bar{k}_1^{\perp}) \\ 1/2(\bar{k}_1 \bar{k}_2^{\perp} + \bar{k}_2 \bar{k}_1^{\perp}) & \bar{k}_2 \bar{k}_2^{\perp} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Если в качестве координатных ортов базиса в $\mathbb{R}^2$ взять векторы $\bar{k}$ и $\bar{k}^{\perp}$, то $\bar{k}_1 = 1$, $\bar{k}_2 = 0$, $\bar{k}_1^{\perp} = 0$, $\bar{k}_2^{\perp} = 1$. Поэтому для базиса в $\mathbb{R}^2$ с координатными ортами $\bar{k}$ и $\bar{k}^{\perp}$

$$\mathrm{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Учитывая преставлением (3.4), приходим к соотношениям

$$\begin{gathered}\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3,\\ \det \mathrm{e}_1 = \frac{1}{2}, \ \det \mathrm{e}_2 = -\frac{1}{2}, \ \det \mathrm{e}_3 = -\frac{1}{2}.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Таким образом, для каждого $\bar{k} \in \mathbb{R}^2$ элементы e_i, $i = 1,2,3$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$.

Пользуясь сферическими координатами в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$, запишем произвольное $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}_s$ в виде

$$\begin{aligned}\xi &= |\xi|(\mathrm{e}_1 \cos\theta + \mathrm{e}_2 \sin\theta\cos\phi + \mathrm{e}_3 \sin\theta\sin\phi)\\ &= \frac{|\xi|}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta + \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta - \sin\theta\cos\phi\end{pmatrix},\\ &\quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \phi \in [0, 2\pi)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Тогда

$$\det\xi = |\xi|^2\Big(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big). \tag{3.7}$$

Согласно (3.7) и определениям (1.14)–(1.16) множеств $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_{\mathrm{int}}$, $\mathcal{K}_{\mathrm{ext}}$

$$\det\xi = 0, \ \xi \in \mathcal{K}; \quad \det\xi > 0, \ \xi \in \mathcal{K}_{\mathrm{int}}; \quad \det\xi < 0, \ \xi \in \mathcal{K}_{\mathrm{ext}}. \tag{3.8}$$

Сформулированные ниже утверждения являются следствиями (2), (3), и (4).

(5)a. *Каждая точка $\xi \in \mathcal{K}_{\mathrm{ext}}$ представима в виде $e(\bar{k} \otimes c)$ с линейно независимыми векторами $\bar{k}, c$. Через неё проходят ровно две плоскости $V_{\bar{k}}$, $V_{\bar{k}'}$, $\bar{k}' = \pm c|c|^{-1}$. Эти плоскости пересекаются друг с другом лишь вдоль прямой $\alpha e(\bar{k} \otimes \bar{k}')$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и содержат прямые $\beta e(\bar{k} \otimes \bar{k})$, $\beta' e(\bar{k}' \otimes \bar{k}')$, $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$, по которым они касаются конической поверхности $\mathcal{K}$. Вне точек касания с $\mathcal{K}$ плоскости $V_{\bar{k}}$, $V_{\bar{k}'}$ не покидают множества $\mathcal{K}_{\mathrm{ext}}$.*

(5)b. *Каждая точка $\xi \in \mathcal{K}$ для одного из знаков представима в виде $\pm e(k \otimes k)$. При $k \neq 0$ через неё проходит единственная плоскость $V_{\bar{k}}$ с $\bar{k} = \pm k|k|^{-1}$, касающаяся конической поверхности $\mathcal{K}$ вдоль прямой $\alpha e(\bar{k} \otimes \bar{k})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Все точки из $V_{\bar{k}}$ вне прямой касания лежат в $\mathcal{K}_{\mathrm{ext}}$.*

(5)c. *В* $\mathcal{K}_{\rm int}$ *нет точек* ξ*, представимых в виде* $e(k \otimes c)$ *с какими-либо* $k, c \in \mathbb{R}^2$*.*

Заметим, что плоскость в $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$, состоящая лишь из элементов (кроме нулевого) с отрицательными определителями не обязана совпадать с $V_{\bar k}$ при каком-либо $\bar k$. Примером такой плоскости является линейное подпространство, натянутое на орты e_2 и e_3.

4. Поверхность $A^{1/2}\mathcal{K}$, величина $\min_{\bar k \in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}} A^{1/2}[\zeta]|$ **и множество $\mathcal{N}^-$.** Связь между перечисленными объектами устанавливается в следующей лемме.

Лемма 3.1 (1) *При* $[\zeta] \in \mathcal{K}_{\rm ext}$

$$\min_{\bar k \in S_1} \big|\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}} A^{1/2}[\zeta]\big| = 0, \tag{3.9}$$

множество $\mathcal{N}^-$ *состоит из двух пар диаметрально противоположных точек.*

(2) *При* $[\zeta] \in \mathcal{K}$

$$\min_{\bar k \in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}} A^{1/2}[\zeta]| = 0, \tag{3.10}$$

множество $\mathcal{N}^-$ *состоит из одной пары диаметрально противоположных точек.*

(3) *При* $[\zeta] \in \mathcal{K}_{\rm int}$

$$\begin{aligned} \min_{\bar k \in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}} A^{1/2}[\zeta]| &= \operatorname{dist}\big(A^{1/2}[\zeta], A^{1/2}\mathcal{K}\big) = \min_{\xi \in \mathcal{K}} |A^{1/2}([\zeta] - \xi)| \\ &= |A^{1/2}([\zeta] - e(\bar k_- \otimes \alpha \bar k_-))|, \end{aligned} \tag{3.11}$$

множество $\mathcal{N}^-$ *состоит из всех пар* $\pm \bar k_-$*, на которых с некоторым* $\alpha \in \mathbb{R}$ *реализуется последнее равенство.*

Доказательство. Величина $|\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}} A^{1/2}[\zeta]|$ совпадает с расстоянием в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}_s$ от точки $A^{1/2}[\zeta]$ до плоскости $A^{1/2}V_{\bar k}$. Следовательно, $\min_{\bar k \in S_1} |\pi^{\perp}_{A^{1/2}V_{\bar k}} A^{1/2}[\zeta]|$ – расстояние от этой точки до ближайшей к ней плоскости указанного вида. Поэтому справедливость (3.9)–(3.11) является следствием (5)a–(5)c. □

§4. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Из предположения (1.17) и утверждений (1), (2) леммы 3.1 вытекает выполнение условий леммы 2.1, гарантирующей справедливость теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполняется условие (1.19), $r = \operatorname{dist}(A^{1/2}[\zeta], A^{1/2}\mathcal{K})$, а $B_r(A^{1/2}[\zeta]) \subset \mathbb{R}_s^{2\times 2}$ – открытый шар радиуса r с центром в точке $A^{1/2}[\zeta]$, $S_r(A^{1/2}[\zeta])$ – его граница. Тогда согласно (3.11)

$$\text{множество } \mathcal{N}^- \text{ порождается точками пересечения } S_r(A^{1/2}[\zeta]) \cap A^{1/2}\mathcal{K},\quad B_r(A^{1/2}[\zeta]) \subset A^{1/2}\mathcal{K}_{\mathrm{int}}. \tag{4.1}$$

Так как $\xi \in S_r(A^{1/2}[\zeta]) \cap A^{1/2}\mathcal{K}$ в том и только том случае, если $A^{-1/2}\xi \in A^{-1/2}S_r(A^{1/2}[\zeta]) \cap \mathcal{K}$,

$$\begin{gathered}\text{множество } A^{-1/2}\mathcal{N}^- \text{ порождается точками пересечения}\\ A^{-1/2}S_r(A^{1/2}[\zeta]) \cap \mathcal{K}, \quad A^{-1/2}B_r(A^{1/2}[\zeta]) \subset \mathcal{K}_{\mathrm{int}}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Заметим, что каждая точка на сфере $S_r(A^{1/2}[\zeta])$ представима в виде $A^{1/2}[\zeta] + r\varkappa$, $\varkappa \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}$, $|\varkappa| = 1$. Поэтому поверхность $A^{-1/2}S_r(A^{1/2}[\zeta])$ исчерпывается точками

$$[\zeta] + rA^{-1/2}\varkappa, \quad \varkappa \in \mathbb{R}_s^{2\times 2}\ |\varkappa| = 1. \tag{4.3}$$

Пусть

$$A\mathfrak{e}_i = \mu_i\mathfrak{e}_i, \quad \mathfrak{e}_i \in \mathbb{R}_s^{2\times 2},\ \langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j\rangle = \delta_{ij},\ \mu_i > 0,\ i = 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

— система собственных вектором и соответствующих им собственных чисел отображения A. Если в $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ в качестве базисных ортов взять элементы $\mathfrak{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, то сфера $|\varkappa|^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 = r^2$ (здесь $\varkappa_i$ – координаты $\varkappa$ в этом базисе) под действием отображения $A^{-1/2}$ перейдёт в эллипсоид с центром в нуле

$$\frac{\varkappa_1^2}{r^2\mu_1} + \frac{\varkappa_2^2}{r^2\mu_2} + \frac{\varkappa_3^2}{r^2\mu_3} = 1. \tag{4.5}$$

Таким образом, в силу (4.2), (4.3) множество $A^{-1/2}\mathcal{N}^-$ состоит из пар диаметрально противоположных точек, порождаемых согласно (3.11) точками касания эллипсоида (4.5) с перемещённым в точку $[\zeta]$ центром

$$\begin{gathered}\frac{(\varkappa_1 - [\zeta]_1)^2}{r^2\mu_1} + \frac{(\varkappa_2 - [\zeta]_2)^2}{r^2\mu_2} + \frac{(\varkappa_3 - [\zeta]_3)^2}{r^2\mu_3} = 1,\\ [\zeta]_i = \langle [\zeta], \mathfrak{e}_i\rangle, \quad i = 1, 2, 3.\end{gathered} \tag{4.6}$$

с конической поверхностью $\mathcal{K}$. Число $r > 0$, для которого это касание происходит единственно. В том случае когда множество точек касания исчерпывается одной или двумя, ссылка на лемму 2.1 завершат доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 3. Замена $[\zeta]$ на $-[\zeta]$ не меняет ни знака $\det[\zeta]$, поскольку $m = 2$, ни определённого в (2.5) множества $\mathcal{N}^-$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $[\zeta]$ лежит в верхней части определённого в (1.15) конуса $\mathcal{K}_{\text{int}}$.

(a). Рассмотрим сначала изотропный случай (1.23) с $m = 2$

$$\mathrm{e}_1 = \mathfrak{e}_1, \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu, \quad [\zeta]_2 = [\zeta]_3 = 0, \;\; [\zeta]_1 = |[\zeta]|. \tag{4.7}$$

Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{e}_2 = \mathfrak{e}_2$, $\mathrm{e}_3 = \mathfrak{e}_3$. Тогда эллипсоид (4.6) будет эллипсоидом вращения вокруг оси e_1. Поэтому искомые точки касания следует сначала найти в сечении конуса $\mathcal{K}_{\text{int}}$ проходящей через ось e_1 плоскостью, а затем воспользоваться симметрией относительно вращения вокруг оси e_1. Указанная процедура приводит к следующему результату

$$r = |[\zeta]|(\mu_1 + \mu)^{-1/2},$$

точки касания эллипсоида (4.6) *с конической поверхностью* (1.14) *задаются равенством*

$$z_1 = |[\zeta]|\frac{\mu}{\mu_1 + \mu}, \quad \sqrt{z_2^2 + z_3^2} = |[\zeta]|\frac{\mu}{\mu_1 + \mu}. \tag{4.8}$$

(b). Перейдём к условиям (1.24)

$$\mathrm{e}_1 = \mathfrak{e}_1, \quad \mu_2 < \mu_3, \quad [\zeta]_2 = [\zeta]_3 = 0, \;\; [\zeta]_1 = |[\zeta]|. \tag{4.9}$$

Приведём рассуждение, позволяющее свести условие (4.9) к уже исследованному условию (4.7). Как и в случае (4.7) будем считать, что $\mathrm{e}_2 = \mathfrak{e}_2$, $\mathrm{e}_3 = \mathfrak{e}_3$. При выполнении (4.9) рассмотрим построенный в п.(a) эллипсоид вращения

$$\frac{(\varkappa_1 - |[\zeta]|)^2}{r^2\mu_1} + \frac{\varkappa_2^2}{r^2\mu} + \frac{\varkappa_3^2}{r^2\mu} = 1, \quad \mu = \mu_3. \tag{4.10}$$

Значение r для него и точки касания с конической поверхностью $\mathcal{K}$ указаны в (4.8). Благодаря предположению $\mu_2 < \mu_3$ эллипсоид с тем же значением r

$$\frac{(\varkappa_1 - |[\zeta]|)^2}{r^2\mu_1} + \frac{\varkappa_2^2}{r^2\mu_2} + \frac{\varkappa_3^2}{r^2\mu_3} = 1 \tag{4.11}$$

пересекается с эллипсоидом (4.10) лишь в точках

$$\frac{(\varkappa_1 - |[\zeta]|)^2}{r^2\mu_1} + \frac{\varkappa_3^2}{r^2\mu_3} = 1, \quad \varkappa_2 = 0. \tag{4.12}$$

Остальные точки (4.11) лежат в области, охватываемой эллипсоидом (4.10). Учитывая (4.8), приходим к выводу, что при выполнении (4.9)

$$r = |[\zeta]|(\mu_1 + \mu_3)^{-1/2},$$

точки касания эллипсоида (4.6) *с конической поверхностью* (3.12) *задаются равенством*

$$z_1 = |[\zeta]|\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3}, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = \pm\big|[\zeta]\big|\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3}. \tag{4.13}$$

Поскольку точек касания только две, утверждение теоремы 3 является следствием теоремы 2.

Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение текста.

Список литературы

1. М. А.Гринфельдь, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений.* Наука, М. (1990)
2. В. Г. Осмоловский, *Температуры фазовых переходов для вариационной задачи о равновесии двухфазовых сред с ограничениями.* — Побл. мат.анал. **114** (2022), 63–70.
3. В. Г. Осмоловский, *Фазовые переходы для двухфазовых сред с одинаковыми модулями упругости.* — Пробл. мат. анал. **106** (2020), 139–147.
4. В. Г. Осмоловский, *Объёмная доля одной из фаз в состоянии равновесия двухфазовой упругой среды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **459** (2017), 66–82.
5. В. Г. Осмоловский, *Фазовые переходы для двухфазовых сред с одинаковыми модулями упругости.* — Пробл. мат. анал. **106** (2020), 139–147.
6. В. Г. Осмоловский, *Точные решения вариационной задачи теории фазовых переходов в механике сплошных сред.* — Пробл. мат.анал. **27** (2004), 171–206.
7. G. Allaire, R. V. Kohn, *Optimal bounds on the effective behavior of a mixture of two well-odered elastic material.* — Q. Appl. Math. **51**, No. 4 (1983), 643–674.
8. Y. Grabovsky, *Bounds and extremal microstructures for two-component composites: A unified treatment based on the translation method.* — Proc. R. Soc. Lond., Ser. A **452** (1996), 919–944.
9. В. Г. Осмоловский, *Модельная вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред.* — Пробл. мат. анал. **108** (2021), 113–124.
10. G. Allaire, G. Francfort, *Existence of minimizers for non-quasiconvex functionals arising in optimal design.* — Ann. Inst. Henry Poincare, Anal. Non Lineaire **15**, No. 3 (1998), 301–339.
11. G. Allaire, V. Lods, *Minimizers for a double-well problem with affine boundary conditions.* — Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. **129**, No.3 (1999), 439–446.

12. В. Г. Осмоловский *Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред.* — Алгебра и анализ **29**, No. 5 (2017), 111–178.
13. В. Г. Осмоловский, *Равновесные энергии слоистых композитных и двухфазовых сред при периодических и нулевых граничных условиях.* — Пробл. мат.анал. **120** (2023), 71–79.

Osmolovskii V. G. A two-dimensional problem of phase transitions in continuum mechanics with identical elastic modules.

We give a sufficient condition for the unsolvability of the two-dimensional problem of phase transitions in the mechanics of two-phase elastic media with identical tensors of elastic moduli. It is of geometric nature and is based on the properties of the set of points of contact of the ellipsoid in the three-dimensional space of 2×2-symmetric matrices with the conical surface in this space. The ellipsoid depends on the elasticity moduli tensor and the difference of residual deformation tensors while the conical surface consists of degenerate matrices.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: victor.osmolovskii@gmail.com

Поступило 15 июня 2024 г.