

С. А. Назаров

**АСИМПТОТИКА СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С  
УСЛОВИЕМ СТЕКЛОВА НА МЕЛКИХ  
МНОЖЕСТВАХ, РАСПРЕДЕЛЁННЫХ  
ПЕРИОДИЧЕСКИ ВДОЛЬ КОНТУРА**

**Посвящаю Нине Николаевне Уральцевой,  
познакомившей меня в студенческие годы  
с уравнениями в частных производных**

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, СОДЕРЖАНИЕ СТАТЬИ И ЕЕ  
ПРЕДЫСТОРИЯ

Пусть  $\Omega$  – область в полупространстве  $\mathbb{R}_+^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_d > 0\}$ ,  $d \geq 3$ , с компактным замыканием  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  и кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ , часть  $\Sigma$  которой расположена на гиперплоскости  $\mathbb{R}_0^d = \{x : x_d = 0\}$ . На плоскости  $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)$  выделим простой гладкий (класса  $C^\infty$ ; ср. п. 2° §9) замкнутый контур  $\Gamma$  (рис. 1, а), вложение  $\{x : (x_1, x_2, 0, \dots, 0) \in \Gamma \times \{0\}^{d-2}\}$  которого на гиперплоскость  $\mathbb{R}_0^d$  попадает вовнутрь  $\Sigma$ . При каком-то  $R_\Gamma > 0$  в двумерной  $R_\Gamma$ -окрестности  $\mathcal{V}_{R_\Gamma}^2$  контура  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  введём естественную систему криволинейных координат  $(n, s)$ , где  $n$  – ориентированное расстояние до  $\Gamma$ ,  $n < 0$  внутри контура, а  $s$  – длина дуги, измеренная против часовой стрелки от начала координат  $\mathcal{O}$ . Масштабированием сведём длину контура  $|\Gamma|$  к единице, т.е. сделаем декартовы координаты  $x_j$  безразмерными. Двумерные множества и их вложения в  $\mathbb{R}^d$  на  $\mathbb{R}_0^d$  по указанному правилу не различаем в обозначениях, точку  $\mathcal{O} \subset \Sigma$  считаем началом всей декартовой системы координат  $x$ , а через  $s$  обозначаем как точки на контуре, так и их координаты, в частности,  $s_k^\varepsilon = \varepsilon k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ ,

---

*Ключевые слова:* спектральная задача Стеклова–Дирихле, мелкие периодические быстроосциллирующие возмущения вдоль контура, асимптотика собственных чисел, локализация собственных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект No. 124041500009-8).

– “центры” мелких множеств (рис. 1, b)

$$\begin{aligned}\omega_k^\varepsilon &= \{x = (x', x_d) : (x_1, x_2) \in \mathcal{V}_{R_\Gamma}^2, z := x_d = 0, \\ \xi' &:= (\varepsilon^{-1}s - k, \varepsilon^{-1}n, \varepsilon^{-1}x_3, \dots, \varepsilon^{-1}x_{d-1}) \in \omega\}.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь  $N$  – большое натуральное число,  $\varepsilon = 1/N$  – малый параметр,  $s_N^\varepsilon := s_0^\varepsilon$ . а  $\omega$  – конечное открытое (не обязательно связное) множество с гладкой  $(d-2)$ -мерной границей, причём

$$\begin{aligned}\omega \subset \Upsilon &:= \{\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1} : \\ \xi^b &:= (\xi_2, \dots, \xi_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-2}, |\xi_1| < 1/2\}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

В области  $\Omega$  рассмотрим спектральную задачу Стеклова–Дирихле для оператора Лапласа

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \overline{\omega^\varepsilon}, \quad (1.4)$$

$$-\partial_z u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \omega^\varepsilon := \omega_0^\varepsilon \cup \dots \cup \omega_{N-1}^\varepsilon, \quad (1.5)$$

где  $-\partial_z$  – производная вдоль внешней нормали на гиперплоскости  $\partial\mathbb{R}_+^d$ , и её вариационную формулировку как интегральное тождество [1]

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_\Omega = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} \quad \forall \psi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon; \partial\Omega \setminus \omega^\varepsilon). \quad (1.6)$$

Здесь  $\nabla_x = \text{grad}$ ,  $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ ,  $\lambda^\varepsilon$  – спектральный параметр,  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\Omega)$ , а  $H_0^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \omega^\varepsilon)$  – пространство функций из класса Соболева, удовлетворяющих условию Дирихле (1.4). Отметим, что  $\partial_\nu = -\partial_z$  – производная вдоль внешней нормали  $\nu$  на “уплощённом” куске  $\Sigma$  границы области  $\Omega$ .

Основная цель работы – выяснить асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow +0$  собственных чисел

$$\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_p^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (1.7)$$

и соответствующих собственных функций  $u_p^\varepsilon \in H_0^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \omega^\varepsilon)$  задачи (1.3)–(1.5), которые, обозначив через  $\delta_{p,q}$  символ Кронекера, подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(u_p^\varepsilon, u_q^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.8)$$

Геометрическое строение множества  $\omega^\varepsilon$ , состоящего из близко расположенных мелких “пятен” Стеклова, причисляет сформулированную задачу к классу задач о пограничном осреднении. Количество

исследований в этом направлении огромно (см. [2–7] – список конечно же неполный), но основные отличия полученного результата от предшествующих – локализация собственных функций  $u_p^\varepsilon$  около подмногообразия  $\Gamma \subset \Sigma \subset \partial\Omega$  меньшей размерности и появление в асимптотике величин  $\lambda_p^\varepsilon$  собственных чисел некоторого обыкновенного дифференциального уравнения на контуре  $\Gamma$ . Ранее подобные эффекты при разнообразных постановках смешанных краевых задач со спектральными условиями Стеклова не наблюдались.

Проведенный асимптотический анализ поведения собственных пар около мелкозернистого множества  $\omega^\varepsilon$  годится и для возмущений условия Дирихле спектральным условием Стеклова на полученном “слиянием пятен” тонком тороидальном множестве (рис. 1, с)

$$\omega^\varepsilon = \{x \in \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d : s \in \Gamma, x_d = 0, \varepsilon^{-1}(n, x_3, \dots, x_{d-1}) \in \omega^\#\}, \quad (1.9)$$

где  $\omega^\#$  – ограниченное открытое множество в пространстве  $\mathbb{R}^{d-2}$  с гладкой границей. В трёхмерном ( $d = 3$ ) случае, когда множество (1.9) – тонкая искривлённая полоска  $\omega^\varepsilon = \{x \in \mathcal{V}_{R_\Gamma}^3 : s \in \Gamma, x_3 = 0, |n| < \varepsilon/2\}$ , и при замене условия Дирихле (1.4) условием Неймана

$$\partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \overline{\omega^\varepsilon}, \quad (1.10)$$

задача приобретает ясный физический смысл в рамках линейной теории волн на поверхности весомой жидкости (см., например, [8]), а именно, после перенаправления вниз оси  $x_3 = z$  интерпретируем  $\Omega$  как покрытый льдом водоём с замкнутой узкой полынью  $\omega^\varepsilon$ . Асимптотика собственных пар спектральной смешанной краевой задачи (1.3), (1.10), (1.5) была изучена в работе [9], как частный случай задачи с условием Стеклова на границе тонкого тороидального множества в  $\mathbb{R}^3$ . При этом в качестве предельной задачи, дающей главные асимптотические члены собственных чисел  $\lambda_{N,p}^\varepsilon$ , получено псевдодифференциальное уравнение на контуре  $\Gamma$  с главным символом  $-(2\pi)^{-1}(1 + (\ln|\zeta|)_+)$  (здесь и далее  $\zeta \in \mathbb{R}$  – двойственная переменная преобразования Фурье и  $t_+ = (t + |t|)/2$  – положительная часть числа  $t \in \mathbb{R}$ ), а для собственных чисел установлен рост  $O((\varepsilon|\ln\varepsilon|)^{-1})$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , чуть более медленный чем у собственных чисел задачи (1.3)–(1.5) (см. теорему 9.1). Желая существенно упростить процедуру обоснования асимптотики, но продемонстрировать серьёзное отличие результатов для задачи Стеклова–Дирихле, в частности, эффект концентрации собственных функций около множества  $\omega^\varepsilon$ , вводим условие двойной симметрии

множества  $\omega$ :

$$\omega = \{\xi' : (-\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{d-1}) \in \omega\} = \{\xi' : (\xi_1, -\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{d-1}) \in \omega\}, \tag{1.11}$$

Оно, разумеется, выполнено для тонкой искривлённой полоски на рис. 1, с. Новые эффекты, возникающие при нарушении требования (1.11) обсуждаются в §9, п. 3°.

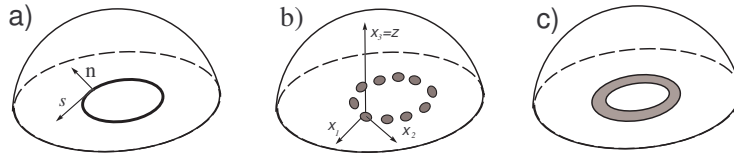


Рис. 1. Область  $\Omega$  (a) с контуром  $\Gamma \subset \Sigma$  (полужирная линия), и (b) с семейством тонированных “пятен” Стеклова  $\omega_0^\varepsilon, \dots, \omega_{N-1}^\varepsilon$  при  $N = 10$ . Тонкая криволинейная полоска Стеклова (c).

В §2 приведены известные результаты о спектре модельной задачи Стеклова–Дирихле в полуслое с условиями периодичности на его боковых гранях. В частности, указаны основные свойства её первой собственной пары  $\{\mu_1; w_1\}$ , используемые при осреднении в §§3, 4 и 6, где изучены асимптотические корректоры и выведено предельное обыкновенное дифференциальное уравнение в случаях  $d > 3$  и  $d = 3$  соответственно. В §5 исследуется специальное решение задачи Дирихле в области  $\Omega$  с особенностью  $O(\text{dist}(x, \Gamma)^{2-d})$ , свойства которого предопределяют отличия асимптотических конструкций в трёхмерном случае, в частности, появления большого параметра  $|\ln \varepsilon|$ . Следующие два параграфа посвящены процедуре обоснования асимптотики, которая (процедура) по обыкновению разделена на два этапа. Если первый, устанавливающий погрешность асимптотической формулы для собственных чисел во всех размерностях (теорема 7.1 и 7.2) и использующий классическую лемму 7.1 о “почти собственных” числах и векторах, вполне традиционен, то второй этап, относящийся к проверке теоремы 8.1 о сходимости в ситуации  $d > 3$  и потребовавший разработки нового подхода, оказался технически наиболее сложным элементом работы – подчеркнём, что именно с целью его демонстрации

вместо тонкого тороидального множества (1.9) спектральные условия (1.5) назначены на периодическом семействе мелких множеств. Вместе с тем в трёхмерной ситуации обосновать найденные асимптотические формулы в полном объёме не удалось – причины указаны в §9, п. 3°.

Финальные теоремы 9.1 и 9.2 об асимптотике собственных пар  $\{\lambda_p^\varepsilon; u_p^\varepsilon\}$  при  $d > 3$  сформулированы в начале §9, где также обсуждаются доступные обобщения и открытые вопросы.

## §2. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Замена спектрального параметра и растяжение координат

$$\lambda^\varepsilon \mapsto \mu^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \lambda^\varepsilon \quad \text{и} \quad x \mapsto \xi = (\xi', \xi_d) = (\varepsilon^{-1} s, \varepsilon^{-1} n, \varepsilon^{-1} x_3, \dots, \varepsilon^{-1} x_d) \quad (2.1)$$

(ср. определение (1.2)) с последующим формальным переходом к  $\varepsilon = 0$  порождают в полуслое

$$\begin{aligned} \Xi := \Upsilon \times \mathbb{R}_+^{d-2} &= \{\xi = (\xi_1, \xi^\circ) = (\xi_1, \xi^b, \xi_d) \in \mathbb{R}^d : \\ &|\xi_1| < 1/2, \xi^b \in \mathbb{R}^{d-2}, \xi_d > 0\} \end{aligned}$$

(рис. 2) следующую задачу Стеклова–Дирихле с условиями периодичности:

$$-\Delta_\xi w(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad (2.2)$$

$$w(\xi', 0) = 0, \quad \xi' \in (\Upsilon \setminus \bar{\omega}) \times \mathbb{R}^{d-3}, \quad (2.3)$$

$$-\frac{\partial w}{\partial \xi_d}(\xi', 0) = \mu w(\xi', 0), \quad \xi' \in \omega \times \mathbb{R}^{d-3}, \quad (2.4)$$

$$w\left(\frac{1}{2}, \xi^\circ\right) = w\left(-\frac{1}{2}, \xi^\circ\right), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_1}\left(\frac{1}{2}, \xi^\circ\right) = \frac{\partial w}{\partial \xi_1}\left(-\frac{1}{2}, \xi^\circ\right), \quad \xi^\circ \in \mathbb{R}_+^{d-1}. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.2)–(2.4) унаследованы от исходной задачи (1.3)–(1.5) и представления оператора Лапласа в криволинейных координатах

$$\Delta_x = \frac{1}{J(n, s)} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{J(n, s)} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{J(n, s)} \frac{\partial}{\partial n} J(n, s) \frac{\partial}{\partial n} + \Delta_x^\# + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.6)$$

Здесь  $J(n, s) = 1 + n\kappa(s)$  – якобиан перехода  $(x_1, x_2) \mapsto (n, s)$ ,  $\kappa(s)$  – кривизна контура  $\Gamma$  в точке  $s$ , вообще говоря, знакопеременная, т.е. отрицательная на вогнутых участках контура, а  $\Delta_x^\#$  – оператор Лапласа в пространстве  $\mathbb{R}^{d-3} \ni x^\# := (x_3, \dots, x_{d-1})$ , причём  $\xi^\# = \varepsilon^{-1} x^\#$  – соответствующие растянутые координаты. Условия периодичности (2.5),

назначенные искусственно, далее, как обычно, используются в асимптотических конструкциях.

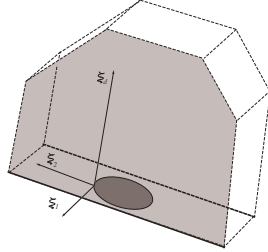


Рис. 2. Половина слоя  $\Xi$ . Одно из оснований, на которых назначены условия периодичности, тонировано. “Пятно” Стеклова  $\omega$  на торце  $\Upsilon$  полуслоя тонировано глубоко.

Обслуживающее задачу (2.2)–(2.5) интегральное тождество

$$(\nabla_{\xi} w, \nabla_{\xi} \psi)_{\Xi} = (w, \psi)_{\omega} \quad \forall \psi \in \mathcal{E}_{per}(\Xi), \quad (2.7)$$

ставится на “энергетическом” пространстве  $\mathcal{E}_{per}(\Xi)$ , полученном пополнением линейного множества  $C_{ср}^{\infty}(\Xi \setminus (\Upsilon \setminus \bar{\omega}))$  (1-периодические по переменной  $\xi_1$  бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями, в частности, удовлетворяющие краевому условию (2.3)) по норме Дирихле  $\|\nabla_{\xi} w; L^2(\Xi)\|$ , которая эквивалентна следующей весовой норме

$$\|w; \mathcal{E}_{per}(\Xi)\| = (\|\nabla_{\xi} w; L^2(\Xi)\|^2 + \|(1 + |\xi^{\circ}|)^{-1} w; L^2(\Xi)\|^2 + \|w; L^2(\omega)\|^2)^{1/2}.$$

Эквивалентность проверяется в несколько шагов. Сначала при учёте условия Дирихле применяется неравенство Фридрихса–Пуанкаре в области

$$\Xi(R_{\omega}) = \{\xi = (\xi_1, \xi^{\circ}) : \rho := |\xi^{\circ}| < R_{\omega}, \xi_d > 0, |\xi_1| < 1/2\}. \quad (2.8)$$

Затем обычное следовое неравенство даёт оценку нормы следа функции  $w$  на  $\omega \subset \partial\Xi$ . Наконец, неравенство Фридрихса на полусфере  $\mathbb{S}_+^{d-2} = \{\xi^{\circ} : \rho = 1, \xi_d > 0\}$  (на полуокружности при  $d = 3$ )

$$\int_{\mathbb{S}_+^{d-2}} |\nabla_{\varphi} W(\varphi)|^2 ds_{\varphi} \geq (d-2) \int_{\mathbb{S}_+^{d-2}} |W(\varphi)|^2 ds_{\varphi} \quad \forall W \in H_0^1(\mathbb{S}_+^{d-2}) \quad (2.9)$$

умножается на  $\rho^{d-3}$  и интегрируется по  $\rho \in (R_\omega, +\infty)$  и  $\xi_1 \in (-1/2, 1/2)$ . Здесь  $d-2$  – первое собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами–Лапласа на полусфере (собственная функция – след на  $\mathbb{S}_+^{d-2}$  монома  $\xi_d$ ),  $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_+^{d-2}$  – сферические координаты в полупространстве  $\mathbb{R}_+^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}_+^d : \xi_1 = 0\} \ni \xi^\circ$ , а радиус  $R_\omega > 0$  выбран так, что  $\bar{\omega} \subset \partial\Xi(R_\omega) \cap \bar{\Upsilon}$ .

Перечислим в целом известные (см., например, монографию [8]) или легко проверяемые свойства собственных пар сформулированной задачи. Ввиду компактности вложения  $H^1(\Xi(R_\omega)) \subset \omega$  её спектр является дискретным и образует положительную монотонную неограниченную последовательность

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_p \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (2.10)$$

а собственные функции можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(w_p, w_q)_\omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Первое собственное число  $\mu_1$  простое, а соответствующую собственную функцию  $w_1$  фиксируем положительной в  $\Xi \cup \omega$ , нормированной в пространстве  $L^2(\omega)$  и имеющей положительный след производной  $\partial w_1 / \partial \xi_d$  на  $\Upsilon \setminus \bar{\omega}$ . Перечисленные свойства обеспечены теоремой Крейна–Рутмана, доказательство которой в ограниченной области (см., например, [10, теорема 1.2.5]) легко приспособляется к задаче (2.2)–(2.5) по причинам компактности вложения  $H^1(\Xi) \subset L^2(\omega)$  и отождествлению боковых граней полуслоя благодаря условиям периодичности (2.5), а также совпадением дробей Рэлея для функций  $w_1$  и  $|w_1|$ .

**Замечание 2.1.** Требование двойной симметрии (1.11) гарантирует, что функция  $w_1$  чётная по обоим переменным  $\xi_2$  и  $\xi_1$ . Эти свойства существенно упрощают процедуры построения и обоснования асимптотики соответственно (см. комментарии в §9, п. 3°). В частности, чётность относительно  $\xi_1$  означает, что  $\{\mu_1; w_1\}$  – первая собственная пара смешанной краевой задачи Стеклова, полученной заменой условий периодичности (2.5) условиями Неймана  $\boxtimes$

Поскольку поверхность  $\partial\omega$  гладкая (при учёте периодичности) и на ней встречаются условия Дирихле и Стеклова (главной частью последнего служит производная  $-\partial/\partial\xi_d$ ) результаты [11–14] (см. также [15,

гл. 11 и 12]) дают допускающую дифференцирование формулу

$$w_1(\xi) = C_1(\varsigma)\rho^{1/2} \cos(\varphi/2) + O(\rho^{3/2}(1 + |\ln \rho|)) \text{ при } \rho \rightarrow +0, \quad (2.12)$$

где  $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \pi)$  – система полярных координат в плоскостях, перпендикулярных  $(d-2)$ -мерному ребру  $\partial\omega$ ,  $\varsigma$  – локальные координаты, порождённые атласом карт на гладком многообразии  $\partial\omega$  без края, а  $C_1 \in C^\infty(\Gamma)$  – положительная функция. Кроме того, для гармонической в  $\mathbb{R}_+^{d-1} \ni \xi^\circ$  при  $\rho > R_\omega$  и обращающейся в нуль при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  функции среднего

$$\mathbb{R}_+^{d-1} \ni \xi^\circ := (\xi_2, \dots, \xi_d) \mapsto \bar{w}_1(\xi^\circ) = \int_{-1/2}^{1/2} w_1(\xi_1, \xi^\circ) d\xi_1, \quad (2.13)$$

выполнено представление

$$\bar{w}_1(\xi^\circ) = K_1 \xi_d \rho^{1-d} + \tilde{w}_1(\xi^\circ) \text{ при } \rho \geq R_\omega. \quad (2.14)$$

При этом отделимое в правой части складывается пропорционально производной по  $\xi_d$  фундаментального решения оператора Лапласа в пространстве  $\mathbb{R}^{d-1}$ , а для остатка  $\tilde{w}_1$  выполнены оценки

$$|\nabla_{\xi^\circ}^\ell \tilde{w}_1(\xi^\circ)| \leq c_\ell \rho^{1-d-\ell} \text{ при } \rho \geq R_\omega, \ell \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.15)$$

Неравенство  $K_1 > 0$  для коэффициента в формуле (2.14) обеспечено, например, следующим наблюдением: положительная гармоническая функция  $\bar{w}_1$  раскладывается при  $\rho \geq R_\omega$  в сходящийся ряд Фурье по положительно однородным функциям с показателями  $2-d, 1-d, -d, \dots$ , среди которых все кроме первой, указанной в (2.14), меняют знак на полусфере  $\mathbb{S}_+^{d-2}$ . Похожие доводы показывают, что  $C_1(\varsigma) > 0$  в представлении (2.12). Наконец, упомянем, что разность

$$w_1^\perp(\xi) = w_1(\xi) - \bar{w}_1(\xi'), \quad \rho > R_\omega, \quad (2.16)$$

обладающая нулевым средним по  $\xi_1 \in (-1/2, 1/2)$ , попадает в пространство Соболева  $H^1(\Xi \setminus \Xi(R_\omega))$  ввиду неравенства Пуанкаре на отрезке  $(-1/2, 1/2) \ni \xi_1$  и, кроме того, исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью<sup>1</sup>. Такое быстрое затухание компоненты  $w_1^\perp$  позволяет приписать формулы (2.14) и (2.15) самой функции  $w_1$  – далее используем их именно для неё.

<sup>1</sup>Простая проверка этого свойства будет приведена в §3 при изучении асимптотического корректора.



Укажем ещё равенство, получаемое применением формулы Грина:

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \int_{\omega} w_1(\xi', 0) d\xi' \\
&= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Xi(R)} \xi_d \Delta_{\xi} w_1(\xi) - \int_{\partial\Xi(R) \setminus \partial\Xi} (\xi_d \partial_{\rho} w_1(\xi) - w_1(\xi) \partial_{\rho} \xi_d) ds_{\xi'} \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow +\infty} K_1 \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_1 R^{d-2} \int_{\mathbb{S}_+^{d-2}} \left( \frac{\xi_d}{\rho^{d-1}} \frac{\partial \xi_d}{\partial \rho} - \xi_d \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\xi_d}{\rho^{d-1}} \right) \Big|_{\rho=R} ds_{\xi^{\circ}} \\
&= K_1 (d-1) \int_{\mathbb{S}_+^{d-2}} \xi_d^2 ds_{\xi^{\circ}} = \frac{K_1}{2} (d-1) \int_{\mathbb{S}^{d-2}} \xi_d^2 ds_{\xi^{\circ}} \\
&= \frac{K_1}{2} \int_{\mathbb{S}^{d-2}} |\xi^{\circ}|^2 ds_{\xi^{\circ}} = \frac{K_1}{2} |\mathbb{S}^{d-2}|. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Здесь  $|\mathbb{S}^{d-2}|$  – площадь единичной сферы в пространстве  $\mathbb{R}^{d-1}$ . Из равенства (2.17) также вытекает соотношение  $K_1 > 0$ . Схожее интегральное представление с (положительной) весовой гармонической функцией, имеющей особенность  $O(|\zeta - x|^{-3/2})$  в точке  $\zeta \in \partial\omega$ , справедливо и для коэффициента  $C_1(\zeta)$  в разложении (2.12) (см. [16], а также [15, глава 10, §1 и глава 12, §8]).

### §3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АНЗАЦЫ И КОРРЕКТОРЫ В СЛУЧАЕ $d > 3$

В соответствии с классической процедурой осреднения (см. [17–20] и многие другие публикации) асимптотические анзацы для собственных пар  $\{\lambda_p^{\varepsilon}; u_p^{\varepsilon}\}$  задачи (1.3)–(1.5) возьмём такими:

$$\lambda^{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \mu_1 + \mu' + \varepsilon \beta + \dots, \quad (3.1)$$

$$u^{\varepsilon}(x) = \chi_{\Gamma}(x) (w_1(\xi)v(s) + \varepsilon W'(\xi, s; v) + \varepsilon^2 W''(\xi, s; v)) + \varepsilon^{d-2} u'(x) + \dots \quad (3.2)$$

Многоточие замещает младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа, и  $\chi_{\Gamma} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$  – срезающая функция, равная единице в  $(R_{\Gamma}/2)$ -окрестности  $\mathcal{V}_{R_{\Gamma}/2}^d$  контура  $\Gamma$  и нулю вне

его  $R_\Gamma$ -окрестности (напоминаем, что в двумерной полоске  $\mathcal{V}_{R_\Gamma}^2$  введена система криволинейных координат  $(n, s)$ ). Кроме того,  $\{\mu_1; w_1\}$  – первая собственная пара задачи (2.2)–(2.5), а остальные ингредиенты анзацев подлежат определению, в частности, слагаемое  $u'$  гладкого типа. По окончании асимптотического анализа в §4 окажется, что  $\{\beta; v\}$  – собственная пара некоего обыкновенного дифференциального уравнения на  $\Gamma$ .

Подставив разложения (3.1) и (3.2) в задачу (1.3)–(1.5), соберём множители при одинаковых степенях малого параметра, учитывая замены (2.1), а также сопутствующее расщепление дифференциального оператора (2.6)

$$\Delta_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_\xi + \frac{1}{\varepsilon} \left( \kappa(s) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial s} - 2 \xi_2 \kappa(s) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) + L_2(\xi_1, s, \nabla_\xi, \partial_s) + \dots \quad (3.3)$$

Множители при  $1/\varepsilon^2$  и  $1/\varepsilon$  обозначим через  $L_0(\nabla_\xi)$  и  $L_1(\xi_2, s, \nabla_\xi, \partial_s)$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} L_2(\xi_2, s, \nabla_\xi, \partial_s) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \xi_2 \kappa(s)^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ &\quad + \xi_2 \partial_s \kappa(s) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 4 \xi_2 \kappa(s) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial s} + 3 \xi_2^2 \kappa(s)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}. \end{aligned}$$

При этом принята во внимание формула дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\mathcal{W}}{ds} \left( \frac{s}{\varepsilon}, s \right) = \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi_1}(\xi_1, s) + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial s}(\xi_1, s) \right) \Big|_{\xi_1=s/\varepsilon}.$$

Строение множителя при  $1/\varepsilon$  в расщеплении (3.3) подсказывает представление

$$W'(\xi, s; v) = \kappa(s) W_0(\xi) v(s) + W_1(\xi) \partial_s v(s), \quad (3.4)$$

а также следующие уравнения Пуассона для его коэффициентов  $W_q$ :

$$-\Delta_\xi W_0(\xi) = F_0(\xi) := \frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi) - 2 \xi_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi_1^2}(\xi), \quad \xi \in \Xi, \quad (3.5)$$

$$-\Delta_\xi W_1(\xi) = F_1(\xi) := 2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi), \quad \xi \in \Xi. \quad (3.6)$$

Помимо условий Дирихле (2.3) и периодичности (2.5) замкнём задачи условиями Стеклова

$$-\frac{\partial W_0}{\partial \xi_d}(\xi', 0) - \mu_1 W_0(\xi', 0) = \frac{\mu'}{\kappa(s)} w_1(\xi', 0), \quad \xi' \in \omega, \quad (3.7)$$

$$-\frac{\partial W_1}{\partial \xi_d}(\xi', 0) - \mu_1 W_1(\xi', 0) = 0, \quad \xi' \in \omega. \quad (3.8)$$

Единственное ( $\mu_1$  – простое собственное число) условие разрешимости  $\int_{\Xi} w_1(\xi) F_1(\xi) d\xi = 0$  задачи (3.6), (2.3), (3.8), (2.5) выполнено из-за периодичности функции  $w_1$  по переменной  $\xi_1$  и быстрого затухания подынтегрального выражения, допускающего применение формулы интегрирования по частям. Рассмотрим аналогичный интеграл при  $q = 0$ :

$$\begin{aligned} I_0 &:= \int_{\Xi} w_1(\xi) \left( \frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi) - 2\xi_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi_1^2}(\xi) \right) d\xi \\ &= \int_{\Xi} w_1(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi) d\xi_1 + 2 \int_{\Xi} \xi_2 \left| \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Первое слагаемое в правой части аннулируется ввиду возможности проинтегрировать по частям. Последнее подынтегральное выражение экспоненциально затухает при  $\rho = |\xi^\circ| \rightarrow +\infty$ , а сам интеграл обращается в нуль благодаря чётности функции  $w_1$  относительно переменной  $\xi_2$ . Таким образом, и условие разрешимости задачи (3.5), (2.3), (3.7), (2.5) формально выполнено в случае  $\mu' = 0$ . Это важное равенство устраняет видимое несоответствие для переменной кривизны, а именно зависимость правой части условия (3.6) от координаты  $s \in \Gamma$  (см. §9, п. 3°).

Несмотря на проверку условий разрешимости задач для  $W_0$  и  $W_1$ , нужно пояснить, почему они разрешимы и как исследуется поведение их решений на бесконечности и около ребра  $\partial\omega$ . Интегральные тождества, обслуживающие названные задачи ( $\mu' = 0$  при  $q = 0$ ), выглядят так:

$$(\nabla_\xi W_q, \nabla_\xi \Psi)_{\Xi} - \mu_1 (W_q, \Psi)_{\omega} = (F_q, \Psi)_{\Xi} \quad \forall \Psi \in \mathcal{E}_{per}(\Xi). \quad (3.10)$$

Для применения теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве требуется проверить указанное свойство для скалярных произведений из правых частей тождеств

(3.10). Функции  $F_q$  гладкие вне поверхности  $\partial\omega$  – начнём анализ с её  $R_{\partial\omega}$ -окрестности  $\mathcal{V}_{R_{\partial\omega}}^d$  при каком-то  $R_{\partial\omega} > 0$ . Представление (2.12) влечёт за собой соотношения  $F_0(\xi) = O(\rho^{-3/2})$  и  $F_1(\xi) = O(\rho^{-1/2})$ . Обеспеченное условием Дирихле на  $\Upsilon \setminus \bar{\omega}$  неравенство Фридрихса на дуге  $(0, \pi) \ni \varphi$

$$\int_0^\pi |\partial_\varphi \mathbf{W}(\rho, \varphi, \varsigma)|^2 d\varphi \geq \frac{\pi^2}{4} \int_0^\pi |\mathbf{W}(\rho, \varphi, \varsigma)|^2 d\varphi \quad (3.11)$$

$$\forall \mathbf{W} \in H^1(0, \pi), \mathbf{W}|_{\varphi=\pi} = 0,$$

проинтегрированное по  $\rho \in (0, R_{\partial\omega})$  и  $\varsigma \in \partial\omega$  после умножения на  $\rho^{-1}$ , сначала даёт весовую оценку на множестве  $\Xi \cap \mathcal{V}_{R_{\partial\omega}}^d$ , а затем при учёте обычного, многомерного, неравенства Фридрихса–Пуанкаре на множестве (2.8) – оценку  $\|\rho^{-1}W_q; L^2(\Xi(R_\omega))\|^2 \leq c_R \|\nabla_\xi W_q; L^2(\Xi)\|^2$ . Показывающую, в частности, что в обоих случаях  $q = 0, 1$  в формулах

$$\int_{\Xi(R_\omega)} F_q(\xi)W_q(\xi)d\xi \leq c_R^0 \|\nabla_\xi W_q; L^2(\Xi)\| \|\rho F_q; L^2(\Xi(R_\omega))\| \quad (3.12)$$

последние сомножители конечны по причине указанного поведения функций  $F_q$  при  $\rho \rightarrow +0$ .

Для окончания проверки разрешимости нужны сопутствующие неравенствам (3.12) оценки

$$\int_{\Xi \setminus \Xi(R_\omega)} F_q(\xi)W_q(\xi)d\xi \leq c_R^\infty \|\nabla_\xi W_q; L^2(\Xi)\| \|\rho F_q; L^2(\Xi \setminus \Xi(R_\omega))\| \quad (3.13)$$

вместе с конечностью последней нормы, которая, к сожалению, имеет место безусловно только при  $q = 1$  ввиду экспоненциального затухания величины  $F_1(\xi)$  при  $\rho \rightarrow +\infty$ , которое к тому же обеспечивает полностью аналогичное (2.14) разложение

$$\bar{W}_1(\xi^\circ) = K_1^1 \xi_a \rho^{1-d} + \widetilde{\bar{W}}_1(\xi^\circ) \text{ при } \rho \geq R_\omega \quad (3.14)$$

с каким-то коэффициентом  $K_1^1$ , а разность  $W_1^\perp = W_1 - \bar{W}_1$  затухает экспоненциально (см. ниже).

В случае  $q = 0$  представление (2.14) с коэффициентом  $K_1 > 0$  и оценка (2.15) при  $\ell = 1$  показывают, что  $F_0(\xi) = O(\rho^{1-d})$ , а значит, включение  $\rho F_0 \in L^2(\Xi \setminus \Xi(R_\omega))$  выполнено в размерности  $d > 3$ . При

$d = 3$  последний множитель в оценке (3.13) с  $q = 0$  может стать бесконечным – нужны дополнительные построения. При этом разложение (2.14) выглядит так:

$$\bar{w}_1(\xi_2, \xi_3) = K_1(1 - \chi_\omega(\rho))\rho^{-1} \sin \varphi + \tilde{w}_1(\xi_2, \xi_3). \quad (3.15)$$

Здесь  $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \pi)$  – система полярных координат. В итоге имеем

$$F_0(\xi) = 2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi) = -(1 - \chi_\omega(\rho))K_1 \frac{\sin(2\varphi)}{\rho^2} + \widehat{F}_0(\xi),$$

причём  $\chi_\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  – срезка, равная единице при  $\rho < R_\omega$  и нулю при  $\rho > 2R_\omega$ , а остаток  $\widehat{F}_0(\xi)$  приобретает бóльшую скорость затухания  $O(\rho^{-3})$ . Решение задачи (3.10) при  $q = 0$  ищем в виде

$$W_0(\xi) = -(1 - \chi_\omega(\rho)) \frac{K_1}{4} \sin(2\varphi) + \widehat{W}_0(\xi) \text{ в случае } d = 3. \quad (3.16)$$

Новая правая часть интегрального тождества для остатка  $\widehat{W}_0$  отличается от быстро затухающей функции  $\widehat{F}_0$  лишь слагаемым с компактным носителем. Нетрудно убедиться в том, что условие разрешимости изменённой задачи выполнено благодаря обращению в нуль выражения (3.9).

**Замечание 3.1.** Для любой гармонической функции  $\mathbf{w}$  справедлива формула  $\Delta_\xi(\xi_2 \mathbf{w}(\xi)) = 2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_2}(\xi)$ , которая приводит к представлению (3.16), а также к представлению

$$W_0(\xi) = -(1 - \chi_\omega(\rho))K_1 \frac{\xi_2 \xi_d}{2\rho^{d-1}} + \widehat{W}_0(\xi) \text{ в случае } d > 3 \quad (3.17)$$

с остатком  $\widehat{W}_0(\xi)$ , затухающим на бесконечности со скоростью  $O(\rho^{2-d})$ .  $\square$

Итак, существование обоих корректоров  $W_1$  и  $W_0$  доказано в любой размерности. Они определены с точностью до слагаемых  $c_q w_1$  – зафиксируем их требованием  $(w_1, W_q)_\omega = 0$ .

Аналогичное (2.12) разложение корректора  $W_1$

$$W_1(\xi) = C_1^1(\varsigma) \rho^{1/2} \cos(\varphi/2) + O(\rho^{3/2}(1 + |\ln \rho|)) \text{ при } \rho \rightarrow +0. \quad (3.18)$$

с каким-то коэффициентом  $C_1^1 \in C^\infty(\partial\omega)$  вытекает из общих результатов работ [11–14] (см. также [15, глава 11 и 12]) благодаря медленному

росту  $O(\rho^{-1/2})$  правой части уравнения (3.6). Согласно тем же результатам другой корректор  $W_0$  приобретает такое разложение:

$$W_0(\xi) = C_1^0(\varsigma)\rho^{1/2} \cos(\varphi/2) + C_3^0(\varsigma)\rho^{1/2} \cos(3\varphi/2) + O(\rho^{3/2}(1+|\ln \rho|)) \text{ при } \rho \rightarrow +0. \quad (3.19)$$

В принципе обнаруженный рост  $F_0(\xi) = O(\rho^{-3/2})$  правой части уравнения может привести логарифмический множитель в главный член асимптотики (3.19) – поясним, почему этого не происходит. Первое слагаемое в правой части уравнения (3.5) приводит к слабой сингулярности  $O(\rho^{-1/2})$ , которая, как и в случае корректора  $W_1$ , влияет только на коэффициент  $C_1^0(\varsigma)$ . Второе слагаемое порождает большую сингулярность  $O(\rho^{-3/2})$  в результате двукратного дифференцирования главного члена асимптотики (2.12). Такое дифференцирование превращает гармоническую функцию  $\rho^{1/2} \cos(\varphi/2)$  на плоскости в гармоническую функцию  $-\frac{1}{4}\rho^{-3/2} \cos(3\varphi/2)$  (подробности см. в [15, гл. 7, § 4 и гл. 12, § 8]), при компенсации которой и возникает в разложении (3.19) слагаемое  $C_3^0(\varsigma)\rho^{1/2} \cos(3\varphi/2)$  с множителем, гладко зависящим от  $\varsigma \in \partial\omega$ .

Наконец, формула (3.17) проверяется разделением функции  $W_0$  на составляющие  $\overline{W}_0$  и

$$W_0^\perp(\xi) = W_0(\xi) - \overline{W}_0(\xi^\circ), \quad \int_{-1/2}^{1/2} W_0^\perp(\xi_1, \xi^\circ) d\xi_1 = 0 \text{ при } \rho > R_\omega, \quad (3.20)$$

в согласии с соотношениями (2.13) и (2.16). Среднее  $\overline{W}_0$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\Delta_{\xi^\circ} \overline{W}_0(\xi^\circ) = \overline{F}_0(\xi^\circ) := \int_{-1/2}^{1/2} F_0(\xi_1, \xi^\circ) d\xi_1, \quad \xi^\circ \in \mathbb{R}_+^{d-1}, \quad \rho > R_\omega,$$

и обращается в нуль при  $\xi_d = 0$  и  $\rho > R_\omega$ . Таким образом, базисные результаты теории Кондратьева [21] (см. также монографии [15] и [22]) дают для  $\overline{W}_0$  в случае  $d > 3$  представление вида (3.17), причём для остатка  $\widetilde{W}_0(\xi^\circ)$  выполнены обеспеченные оценками (2.15) неравенства

$$|\nabla_{\xi^\circ}^\ell \widetilde{W}_0(\xi^\circ)| \leq c_\ell \rho^{2-d-\ell} (1 + |\ln \rho|) \quad \rho > R_\omega, \quad \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Поясним, почему функция  $W_0^\perp$  исчезает с экспоненциальной скоростью при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Произведение  $W_\omega(\xi) = (1 - \chi_\omega(\rho))W_0^\perp(\xi)$  удовлетворяет уравнению Пуассона в полуслое  $\Xi$  с правой частью  $F_\omega(\xi)$ , подчинённой включению  $e^{\gamma\rho}F_\omega \in L^2(\Xi)$  с каким-то показателем  $\gamma > 0$ . В самом деле, она лишь финитным слагаемым отличается от функции  $F_0^\perp(\xi) = 2\frac{\partial w_1^\perp}{\partial \xi_2}(\xi)$ , для которой нужное включение обеспечивается формулой<sup>2</sup>  $e^{\gamma\rho}w_1^\perp \in H^1(\Xi)$  для собственной функции задачи (2.2)–(2.5). Введём непрерывную кусочно-гладкую весовую функцию  $\Xi \ni \xi \mapsto \mathcal{R}_\gamma^T(\eta)$ , равную  $e^{\gamma\rho}$  при  $\rho < T$  и  $e^{\gamma T}$  при  $\rho \geq T > R_\omega$ . В интегральном тождестве для  $W_\omega \in H_{0per}^1(\Xi; \Upsilon)$  (1-периодичность по  $\xi_1$  и обращение в нуль при  $\xi_d = 0$ ) в качестве пробной возьмём функцию  $\mathcal{R}_{2\gamma}^T W_\omega = \mathcal{R}_\gamma^T \mathcal{W}_\gamma^T$ , где  $\mathcal{W}_\gamma^T = \mathcal{R}_\gamma^T W_\omega$ . Оба введённых произведения попадают в пространство  $H_{0per}^1(\Xi; \Upsilon)$ , так как вес постоянен около бесконечности. В результате простых преобразований (двукратное коммутирование множителя  $\mathcal{R}_\gamma^T$  и градиент-оператора  $\nabla_\xi$ ) получим соотношение

$$\|\nabla_\xi \mathcal{W}_\gamma^T; L^2(\Xi)\|^2 - \|\mathcal{W}_\gamma^T \mathcal{R}_{-\gamma}^T \nabla_\xi \mathcal{R}_\gamma^T; L^2(\Xi)\|^2 = (\mathcal{W}_\gamma^T, \mathcal{R}_\gamma^T F_\omega)_\Xi.$$

Поскольку  $\int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{W}_\gamma^T(\xi) d\xi_2 = 0$ , неравенство Пуанкаре на интервале  $(-1/2, 1/2) \ni \xi_2$  даёт соотношение

$$\|\nabla_\xi \mathcal{W}_\gamma^T; L^2(\Xi)\|^2 \geq \pi^2 \|\mathcal{W}_\gamma^T; L^2(\Xi)\|^2.$$

Кроме того,  $|\nabla_\xi \mathcal{R}_\gamma^T(\xi^\circ)| \leq \gamma \mathcal{R}_\gamma^T(\xi^\circ)$ , а значит, при  $\gamma \leq 2$  выполнено неравенство

$$\frac{\pi^2}{4} \|\nabla_\xi \mathcal{W}_\gamma^T; L^2(\Xi)\|^2 + \left(\frac{\pi^4}{4} - \gamma^4\right) \|\mathcal{W}_\gamma^T; L^2(\Xi)\|^2 \leq \|\mathcal{R}_\gamma^T F_\omega; L^2(\Xi)\|^2$$

с положительным коэффициентом при норме самой функции  $\mathcal{W}_\gamma^T$ . Правая часть равномерно ограничена при  $T > R_\omega$ , а левая монотонно возрастает при  $T \rightarrow +\infty$  и, следовательно, имеет предел. Иными словами, справедливо искомое весовое неравенство

$$\|\nabla_\xi(e^{\gamma\rho}W_\omega); L^2(\Xi)\|^2 + \|e^{\gamma\rho}W_\omega; L^2(\Xi)\|^2 \leq c \|e^{\gamma\rho}F_\omega; L^2(\Xi)\|^2, \quad (3.21)$$

<sup>2</sup>Проверяется по излагаемой схеме, так как в уравнении Пуассона для неё правая часть отсутствует.

указывающее на экспоненциальное затухание составляющей  $W_0^\perp = W_0 - \overline{W}_0$  корректора  $W_0$ .

Отметим, что приёмы из статьи [23] переделывают интегральную оценку (3.21) в весовые поточечные (гёльдеровские) оценки самой функции и её производных. Такие же рассуждения показывают, что в силу экспоненциального затухания правой части  $F_1$  уравнения (3.6) для его решение  $W_1$  выполнены походящая на (2.14) формула с каким-то коэффициентом  $K_1^1$  и оценки

$$|\nabla_\xi^\ell W_1(\xi)| \leq c_{1\ell} \rho^{2-d-\ell} \text{ при } \rho > R_\omega, \ell \in \mathbb{N}_0. \quad (3.22)$$

Нужные свойства асимптотических корректоров  $W_0$  и  $W_1$  представления (3.4) установлены.

#### §4. ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ $d > 3$

Составим задачу для третьего члена  $W''$  типа пограничного слоя в анзаце (3.2). При учёте расщепления (3.3) выводим уравнение

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi W''(\xi, s; v) &= L_2(\xi_2, s, \nabla_\xi, \partial_s)(w_1(\xi)v(s)) \\ &+ L_1(\xi_2, s, \nabla_\xi, \partial_s)W'(\xi, s; v), \quad \xi \in \Xi, \end{aligned} \quad (4.1)$$

с условиями Дирихле (2.3) и Стеклова

$$-\partial_{\xi_d} W''(\xi', 0, s; v) - \mu_1 W''(\xi', 0, s; v) = \beta w_1(\xi', 0)v(s), \quad \xi' \in \omega, \quad (4.2)$$

а также условиями периодичности (2.5). Приняв во внимание формулы для операторов  $L_1$  и  $L_2$ , видим, что правая часть  $F''(\xi, s; v)$  уравнения (4.1) – сумма произведений

$$\begin{aligned} &\partial_s^2 v(s) \left( w_1(\xi) + \underbrace{2 \frac{\partial W_1}{\partial \xi_1}(\xi)} \right) \\ &+ \kappa(s) \partial_s v(s) \left( \frac{\partial W_1}{\partial \xi_2}(\xi) + \underbrace{2 \frac{\partial W_0}{\partial \xi_1}(\xi) - 2\xi_2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi_1^2}(\xi) - 4\xi_2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi)} \right) + \\ &+ v(s) \left( \kappa(s)^2 \left( \frac{\partial W_0}{\partial \xi_2}(\xi) - \xi_2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(\xi) + \underbrace{3\xi_2^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi_1^2}(\xi) - 2\xi_2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi_1^2}(\xi)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_s \kappa(s) \left( \underbrace{2 \frac{\partial W_0}{\partial \xi_1}(\xi) + \xi_2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi)} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$



Множители при функции  $v$  и её производных суть  $O(\rho^{2-d})$  при  $\rho \rightarrow +\infty$  (фигурными скобками снизу отмечены экспоненциально затухающие составляющие; см. конец §3). Следовательно, интеграл по  $\Xi$  в условии разрешимости сформированной задачи (4.1), (2.3), (4.2), (2.5)

$$\int_{\Xi} w_1(\xi) F''(\xi, s; v) d\xi + \beta v(s) \int_{\omega} |w_1(\xi', 0)|^2 d\xi' = 0$$

сходится абсолютно при  $d > 3$  (случай  $d = 3$  см. в §6). Кроме того,  $W_0$  – нечётная, а  $w_1, W_1$  – чётные функции переменной  $\xi_2$ , т.е. произведение  $\kappa \partial_s v$ , при котором в (4.3) стоит нечётный по  $\xi_2$  множитель, аннулируется после интегрирования по  $\xi_2 \in \mathbb{R}$ . То же самое можно сказать о выражении  $v \partial_s \kappa$ , коэффициент при котором выделен фигурной скобкой сверху. В итоге условие разрешимости (4.3) принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения на контуре

$$-B \partial_s^2 v(s) + b \kappa(s)^2 v(s) = \beta v(s), \quad s \in \Gamma. \quad (4.4)$$

Правая часть унаследована от интеграла по  $\omega$  в формуле (4.3) согласно нормировке (2.11), а коэффициент  $b$ , явная формула для которого черезчур громоздка, не оказывает принципиальное влияние на предопределённое очередным утверждением строение “предельного” спектра

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots \leq \beta_p \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (4.5)$$

**Предложение 4.1.**  $B = \|w_1; L^2(\Xi)\|^2 + 2 \int_{\Xi} w_1(\xi) \frac{\partial W_1}{\partial \xi_1}(\xi) d\xi > 0$ .

**Доказательство.** Применим метод факторизации [24, 25] и положим  $Z(\xi) = w_1(\xi)^{-1} W_1(\xi)$ . Соответствующие формальные вычисления выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} B &= \|w_1; L^2(\Xi)\|^2 + 2 \int_{\Xi} w_1(\xi)^2 \frac{\partial Z}{\partial \xi_1}(\xi) d\xi + 2 \int_{\Xi} W_1(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}(\xi) d\xi \\ &= \|w_1; L^2(\Xi)\|^2 + 2 \int_{\Xi} w_1(\xi)^2 \frac{\partial Z}{\partial \xi_1}(\xi) d\xi - \int_{\Xi} W_1(\xi) \Delta_{\xi} W_1(\xi) d\xi \quad (4.6) \\ &= \|w_1; L^2(\Xi)\|^2 + 2 \int_{\Xi} w_1(\xi)^2 \frac{\partial Z}{\partial \xi_1}(\xi) d\xi - \int_{\Xi} W_1(\xi) Z(\xi) \Delta_{\xi} w_1(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Xi} w_1(\xi) Z(\xi) (w_1(\xi) \Delta_{\xi} Z(\xi) + 2 \nabla_{\xi} Z(\xi) \cdot \nabla_{\xi} w_1(\xi)) d\xi \\
& = \|w_1; L^2(\Xi)\|^2 + 2 \int_{\Xi} w_1(\xi)^2 \frac{\partial Z}{\partial \xi_1}(\xi) d\xi - 0 + \int_{\Xi} w_1(\xi)^2 |\nabla_{\xi} Z(\xi)|^2 d\xi \\
& \quad + \int_{\omega} w_1(\xi', 0)^2 Z(\xi', 0) \frac{\partial Z}{\partial \xi_d}(\xi', 0) d\xi' \\
& = \int_{\Xi} w_1(\xi)^2 \left( |\nabla_{\xi^{\circ}} Z(\xi)|^2 + \left| 1 + \frac{\partial Z}{\partial \xi_1}(\xi) \right|^2 \right) d\xi + 0 > 0.
\end{aligned}$$

Последнее подинтегральное выражение не обращается в нуль тождественно ввиду 1-периодичности функции  $Z$  по переменной  $\xi_1$ . Некоторые интегралы аннулировались благодаря уравнению Лапласа (2.2) для функции  $w_1$  и обеспеченными краевыми условиями (2.4) и (3.8) равенствами

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} w_1(\xi', 0)^2 Z(\xi', 0) \frac{\partial Z}{\partial \xi_d}(\xi', 0) d\xi' \\
& = \int_{\omega} W_1(\xi', 0) Z(\xi', 0) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi', 0) d\xi' - \int_{\omega} W_1(\xi', 0) \frac{\partial W_1}{\partial \xi_d}(\xi', 0) d\xi' \\
& = -\mu_1 \int_{\omega} W_1(\xi', 0) Z(\xi', 0) w_1(\xi', 0) d\xi' + \mu_1 \int_{\omega} W_1(\xi', 0)^2 d\xi' = 0.
\end{aligned}$$

Сходимость всех возникших интегралов подтверждена свойствами функций  $w_1$  и  $W_1$ , перечисленными в §§2 и 3, а именно, в силу соотношений (2.12), (3.18)–(2.14), (3.14) функция  $Z$  оказывается ограниченной соответственно около поверхности  $\partial\omega$  и на бесконечности в полуслое  $\Xi$ , а её градиент становится равным  $O(\rho^{-1})$  и  $O(\rho^{-1})$  вблизи указанных особенностей границы, вне которых она бесконечно дифференцируема. Перечисленные иррегулярности компенсируются весомым множителем  $w_1(\xi)^2$ , который приобретает порядки  $\rho$  при  $\rho \rightarrow +0$  и  $\rho^{2-d}$  при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Подчеркнём ещё раз, что последний интеграл в (4.6) сходится только в случае  $d > 3$ , так как подинтегральное выражение в нём затухает со скоростью  $O(\rho^{4-2d})$ .  $\square$

**Замечание 4.1.** Похожая на (4.6) выкладка впервые была реализована в [24], где рассматривалась ячейка периодичности с условиями

Дирихле на гладкой части её границы. Способ обработки особенностей собственных функций около сингулярностей границы и на бесконечности предложен<sup>3</sup> в [27], однако в [25] разработан более общий подход, так как принятое геометрическое ограничение из [28, следствие С4] очевидным образом выполнено для угловых и конических точек, рёбер и вершин многогранных углов. Последние результаты могут быть приспособлены к рассматриваемой задаче Стеклова–Дирихле ввиду компактности вложения  $H^1(\Xi(R_\omega)) \subset L^2(\omega)$ . Отметим, что в [29] на коэффициенты дифференциальных операторов назначены минимальные ограничения, допускающие “спрямление” даже липшицевой границы.

**Замечание 4.2.** Около ребра  $\partial\omega$  решение  $W''$  задачи (4.1), (4.2), (2.3), (2.5), существующее при выполнении уравнения (4.4), допускает аналогичное (2.12) разложение с главным членом  $C_1''(\varsigma)\rho^{1/2}\Psi(\varphi)$ . Этот факт, используемый в §8, нуждается в проверке, так как общие процедуры позволяют линейную зависимость угловой части от  $\ln \rho$ . Отсутствие такой зависимости устанавливается посредством тех же рассуждений, что и в комментариях к формуле (3.19), где вместе с указанной гармонической фигурирует бигармоническая функция  $\rho^{-3/2} \cos(7\varphi/2)$ . По индукции можно убедиться в отсутствии логарифма и у отсутствующих в анзаце (3.2) младших членов асимптотики. Подобные соображения были приспособлены в [15, глава 4, §4] и к смешанным краевым задачам для самосопряжённых эллиптических систем на полуплоскости.

## §5. СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Из-за необходимости умножения на срезающую функцию  $\chi_\Gamma$  членов типа пограничного слоя в анзаце (3.2), определённых только в окрестности контура  $\Gamma$ , в уравнении (1.3) возникает недопустимо большая невязка, для компенсации которой требуется построение члена  $u'$  гладкого типа. При  $\varepsilon \rightarrow +0$  множества (1.1) исчезают в пределе, и поэтому в качестве ещё одной предельной возникает “чистая” (без условий

<sup>3</sup>В публикации [26] также применялся метод факторизации, однако без ссылок на первоисточники и с неустраняемыми ошибками из-за неправильного учёта особенностей решений в угловых точках.

Стеклова) задача Дирихле в области  $\Omega$  (рис. 1, а)

$$-\Delta_x U(x; v) = 0, \quad x \in \Omega, \quad U(x; v) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma. \quad (5.1)$$

Следуя материалу главы 12 в монографии [15], найдём каноническое сингулярное решение задачи (5.1), заданное своим иррегулярным поведением около контура  $\Gamma \subset \partial\Omega$

$$U(x; v) = v(s)x_d r^{1-d} + O(r^{1-d}), \quad r \rightarrow +0,$$

Здесь  $v$  – гладкая функция на контуре  $\Gamma \ni s$ , а  $(r, \varphi)$  – система сферических координат в гиперплоскостях, перпендикулярных контуру  $\Gamma$ , т.е.  $r = \varepsilon\rho$  (ср. формулу (2.14)). Такое решение иницировано дельта-функцией Дирака, распределённой вдоль  $\Gamma$  с плотностью  $v$  (см. [15, глава 12]), и может быть представлено как весовой интеграл по контуру  $\Gamma$  от ядра Пуассона в области  $\Omega$  с сингулярностью  $O(|x - s|^{1-d})$  в точке  $s \in \Gamma$  (см. [15, глава 10 §1 и глава 12]). Однако далее понадобится только уточнённое разложение при  $r \rightarrow +0$

$$U(x; v) = \chi_\Gamma(x)(v(s)x_d r^{1-d} + \mathcal{U}_1(r, \varphi, s; v) + \mathcal{U}_0(r, \varphi, s; v)) + \tilde{U}(x; v), \quad (5.2)$$

которое ввиду гладкости плотности  $v$  строится при помощи известной и простой процедуры (см. [13, 14], [15, глава 11] и др.). С этой целью напишем соответствующее расщепление оператора (2.6) с выделенными членами обобщённой однородности по  $(n, z)$  порядков  $-2$ ,  $-1$  и  $0$ :

$$\Delta_x = (\partial_n^2 + \Delta_x^\# + \partial_z^2) + \kappa(s)\partial_n + (\partial_s^2 - n\kappa(s)^2\partial_n) + \dots, \quad (5.3)$$

Расщепление (5.3) выглядит более просто нежели (3.3) потому, что производной  $\partial_s$  придан нулевой показатель однородности, больший, чем  $-1$  у производных  $\partial_n$  и  $\partial_{x_3}, \dots, \partial_{x_d}$ .

Вспомнив замечание 3.1 о функции  $W_0$ , сразу же получим, что

$$\mathcal{U}_1(r, \varphi, s; v) = -v(s)\kappa(s)\frac{nx_d}{2r^{d-1}}. \quad (5.4)$$

Задача Дирихле на полупространстве для составляющей  $\mathcal{U}_1$  выглядит так:

$$\begin{aligned} -(\partial_n^2 + \Delta_x^\# + \partial_z^2)\mathcal{U}_0(r, \varphi, s; v) &= \mathcal{F}_0(r, \varphi, s; v) := \kappa(s)\partial_n\mathcal{U}_1(r, \varphi, s; v) \\ &- \partial_s^2 v(s)\frac{x_d}{r^{d-2}} + \kappa(s)^2 v(s)n\frac{\partial}{\partial n}\frac{x_d}{r^{d-2}} \quad \text{при } x_d > 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\mathcal{U}_0(r, \varphi, s; v) = 0 \quad \text{при } x_d = 0.$$

Правая часть  $\mathcal{F}_0$  – положительно однородная функция переменной  $r$  порядка  $2 - d$ , т.е.  $\mathcal{F}_0(tr, \varphi, s; v) = t^{2-d}\mathcal{F}_0(r, \varphi, s; v)$  при любом  $t > 0$ .

Таким образом, согласно теории Кондратьева [21] (см. также, например, [15, 22]) в качестве решения  $\mathcal{U}_0$  задачи (5.5) выступает положительно однородная функция порядка  $4-d$ . Для этого вывода требуется ограничение  $d > 3$ .

**Замечание 5.1.** Поясним последнее ограничение. Модельная задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве  $\mathbb{R}_+^{d-1}$  имеет нетривиальное степенное решение  $r^\Lambda \Psi(\varphi)$  лишь в том случае, когда целочисленный показатель  $\Lambda$  попадает в множество  $\mathbb{L} := \{l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \mid l \neq 2-d, \dots, 0\}$  (простой факт: см., например, [30, следствие 2.4]). Поскольку  $4-d \notin \mathbb{L}$  при  $d > 3$ , задача (5.5) имеет решение, подчинённое соотношению  $\mathcal{U}_0(tr, \varphi, s; v) = t^{4-d} \mathcal{U}_0(r, \varphi, s; v)$  при любом  $t > 0$ , и такое решение единственно (см., например, [15, гл. 3, § 5]).

Сформулируем результат для больших размерностей, а затем разберём трёхмерный случай.

**Предложение 5.1.** *Если  $d > 3$ , то для любой плотности  $v \in C^\infty(\Gamma)$  у задачи (5.1) есть решение (5.2), в котором слагаемое  $\mathcal{U}_1$  имеет вид (5.4), слагаемое  $\mathcal{U}_0$  находится из задачи (5.5), а остаток  $\tilde{U}(x; v) \in H^1(\Omega)$  удовлетворяет оценкам<sup>4</sup>*

$$\begin{aligned} |\partial_s^j \nabla_{x^\circ}^k \tilde{U}(x; v)| &\leq c_{jk}(\gamma) r^{5-d-k} (1 + |\ln r|)^{\delta_{d,4}} \\ &\text{при } x \in \overline{\Omega \cap \mathcal{V}}, j, k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При  $d = 3$  составляющая (5.4) разложения (5.2) принимает вид

$$\mathcal{U}_1(r, \varphi; v) = -\frac{1}{4} \kappa(s) v(s) \sin(2\varphi), \quad (5.7)$$

а составляющая  $\mathcal{U}_0$  находится из следующей задачи на полуплоскости с декартовой  $(n, z)$  и полярной  $(r, \varphi)$  системами координат (при этом

---

<sup>4</sup>Появление логарифма в правой части оценок при  $d = 4$  обусловлено замечанием 5.1.

$z = r \sin \varphi$  и  $n = r \cos \varphi$ ):

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathcal{U}_1(r, \varphi, s; v) = - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \mathcal{U}_1(r, \varphi, s; v) \\
& = r^{-1} \mathcal{F}_{-1}(\varphi, s; v) \\
& := \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s) \frac{\sin \varphi}{r} - v(s) \kappa(s)^2 n \frac{\partial}{\partial n} \frac{\sin \varphi}{r} - v(s) \frac{\kappa(s)^2}{4} \frac{\partial}{\partial n} \sin(2\varphi), \quad (n, z) \in \mathbb{R}_+^2, \\
& \mathcal{U}_1(r, 0, s; v) = \mathcal{U}_1(r, \pi, s; v) = 0.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Следовательно, в свете замечания 5.1 упомянутая процедура построения асимптотики (см. [21] и, например, [15, глава 2, §5 и глава 3, §5]) даёт формулу

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1(r, \varphi, s; v) &= -\frac{1}{2} r \ln r \sin \varphi \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s) + \frac{\kappa(s)^2}{4} v(s) \right) \\
&+ v(s) \frac{3\kappa(s)^2}{32} r \sin(3\varphi) + (\mathcal{K}v)(s) r \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

где  $(\mathcal{K}v) \in C^\infty(\Gamma)$  – некоторая функция, зависящая от плотности  $v$  и от формы области  $\Omega$ , причём, как показано в [15, глава 12],  $\mathcal{K}$  – псевдодифференциальный оператор с главным символом  $-|\mathbf{z}|^2(1 + (\ln|\mathbf{z}|)_+)$  (это его свойство далее не используется).

**Предложение 5.2.** *Если  $d = 3$ , то для любой плотности  $v \in C^\infty(\Gamma)$  у задачи (5.1) есть решение (5.2), в котором степенно-логарифмические решения  $\mathcal{U}_1$  и  $\mathcal{U}_0$  имеют вид (5.7) и (5.9) соответственно, а остаток  $\tilde{U}(x; \gamma) \in H^1(\Omega)$  удовлетворяет оценкам (5.6), в которых мажоранта приобретает вид  $c_{jk}(\gamma)r^{2-k}(1 + |\ln r|)$ .*

## §6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АНЗАЦЫ И ПЕРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРИ $d = 3$

В очередном параграфе при построении приемлемого асимптотического приближения к собственной паре исходной задачи (1.3)–(1.5) при  $d > 3$  сингулярное решение  $U(\cdot; v)$ , точнее, остаток  $\tilde{U}(\cdot; v)$  в его разложении (5.2), будет использовано для компенсации главного члена невязки, порождённой членами пограничного слоя из-за умножения на

срезающую функцию  $\chi_\Gamma$ . При  $d = 3$  механизм компенсации становится иным из-за появления в члене (5.9) представления (5.2) множителя  $\ln r = \ln \rho + \ln \varepsilon$ . Изменяются и коэффициенты предельного уравнения на контуре  $\Gamma$  – представим его вывод.

Начнём с важного наблюдения для всех размерностей. Экспоненциально затухающие слагаемые в правых частях задач для членов  $W'$  и  $W''$  (в формуле (4.3) такие слагаемые выделены фигурными скобками снизу) не сказываются на степенных составляющих разложений этих членов на бесконечности. В итоге видим, что при  $d > 3$  процедуры построения асимптотик в §§5 и 4 в значительной степени одинаковы. Для того чтобы такое же сходство случилось в трёхмерной области, приходится модифицировать вторые поправочные члены в анзацах (3.1) и (3.2):

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \mu_1 + \varepsilon(|\ln \varepsilon| \beta + \beta'') + \dots, \quad (6.1)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_\Gamma(x) \left( w_1(\xi) v(s) + \varepsilon W'(\xi, s; v) + \varepsilon^2 (|\ln \varepsilon| W(\xi, s; v) + W''(\xi, s; v)) \right) + \varepsilon u'(x) + \dots \quad (6.2)$$

Первые два поправочных члена анзаца (6.2) по-прежнему находятся из задач (3.5), (3.7), (3.6), (3.8) и (4.1), (4.2) с условиями Дирихле (2.3) и периодичности (2.5). Согласно формулам (3.15) и (3.16) оставленные без выделения фигурными скобками слагаемые в списке (4.3) формируют правую часть уравнения (5.8), а значит, процедура построения асимптотики решений в полуслое  $\Xi$ , описанная в §3, и вычисления из конца §5 показывают, что для слагаемого  $W''$  при надлежащем выборе числа  $\beta''$  справедливо представление

$$\begin{aligned} W''(\xi, s; v) &= (1 - \chi_\omega(\rho)) \left( -\frac{1}{2} \rho \ln \rho \sin \varphi \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s) + \frac{\kappa(s)^2}{4} v(s) \right) \right. \\ &\quad \left. + v(s) \frac{3\kappa(s)^2}{32} \rho \sin(3\varphi) + c''(c; v) \rho \sin \varphi \right) \\ &\quad + \widetilde{W}''(\xi, s; v) = (1 - \chi_\omega(\rho)) \mathcal{W}(\rho, \varphi, s; v) + \widetilde{W}''(\xi, s; v) \end{aligned}$$

с каким-то коэффициентом  $c''(c; v)$  и остатком, подчинённом оценкам

$$|\nabla_\xi^\ell \widetilde{W}''(\xi, s; v)| \leq c_\ell \rho^{-\ell} \text{ при } \rho \geq R_\omega, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Подчеркнём, что отсутствие в мажоранте множителя  $1 + |\ln \rho|$  объясняется замечанием 5.1.

Поскольку  $\varepsilon \rho \ln \rho \sin \varphi = \varepsilon \xi_3 \ln \rho = x_3 (\ln r - \ln \varepsilon)$ , имеем

$$\varepsilon^2 W''(\varepsilon^{-1} x, s; v) = \varepsilon \left( -\frac{1}{2} |\ln \varepsilon| r \sin \varphi \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s) + \frac{\kappa(s)^2}{4} v(s) \right) + O(1) \right).$$

В итоге для согласования с составляющей (5.9) сингулярного решения (5.2) задачи Дирихле (5.1) при  $d = 3$  требуется вставить в анзац (6.2) такой член с коэффициентом  $\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|$ :

$$W(\xi, s; v) = \frac{\xi_3}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s) + \frac{\kappa(s)^2}{4} v(s) \right) + \widehat{W}(\xi, s; v).$$

Собрав члены невязки с множителем  $|\ln \varepsilon|$ , получим для добавки  $\widehat{W}(\cdot; v)$ , которая по своему назначению должна исчезать на бесконечности, задачу (2.2), (2.3), (2.5) с условием Стеклова

$$-\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \xi_3}(\xi', 0, s; v) = \beta w_1(\xi', 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s) + \frac{\kappa(s)^2}{8} v(s), \quad \xi' \in \omega.$$

В силу нормировки (2.3) и соотношения (2.17), в котором  $d = 3$  и  $|\mathbb{S}^1| = 2\pi$  — длина единичной окружности, условие разрешимости сформированной задачи в классе  $\mathcal{E}_{per}(\Xi)$

$$\beta v(s) \int_{\omega} |w_1(\xi', 0)|^2 d\xi' + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s) + \frac{\kappa(s)^2}{4} v(s) \right) \int_{\omega} w_1(\xi', 0) d\xi' = 0$$

принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения (4.4) с коэффициентами

$$B = \frac{\pi K_1}{2\mu_1}, \quad b = -\frac{\pi K_1}{8\mu_1}. \quad (6.3)$$

Для такой предельной задачи верно сказанное в §4, в частности, формула (4.5). Во всех случаях собственные функции  $v_p \in C^\infty(\Gamma)$  подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(v_p, v_q)_\Gamma = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

## §7. ОЦЕНКИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОСТАТКОВ

Начнём с абстрактной формулировки задачи (1.3)–(1.5), а именно, в гильбертовом пространстве  $\mathbf{H}^\varepsilon := H_0^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \omega^\varepsilon)$  введём скалярное произведение и положительно определённый, непрерывный и симметричный, а значит, самосопряжённый, и к тому же компактный оператор  $\mathbf{T}^\varepsilon$  при помощи формул



$$\langle u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle = (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_\Omega, \quad (7.1)$$

$$\langle \mathbf{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle = (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} \quad \forall u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathbf{H}^\varepsilon. \quad (7.2)$$

В силу теорем 10.1.5 и 10.2.2 [31] существенный спектр оператора  $\mathbf{T}^\varepsilon$  состоит из одной точки  $\tau = 0$ , а дискретный спектр образует бесконечно малую монотонную положительную последовательность

$$\tau_1^\varepsilon \geq \tau_2^\varepsilon \geq \tau_3^\varepsilon \geq \dots \geq \tau_p^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0. \quad (7.3)$$

Согласно определениям (7.1) и (7.2) интегральное тождество (1.6) эквивалентно абстрактному уравнению  $\mathbf{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon$  в пространстве  $\mathbf{H}^\varepsilon$  со спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = (\lambda^\varepsilon)^{-1}. \quad (7.4)$$

Соотношение (7.4) связывает последовательности (7.3) и (1.7).

Очередное утверждение известно как лемма о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [32]) и обеспечено спектральным разложением резольвенты (см. [31, гл. 6]).

**Лемма 7.1.** Пусть  $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}^\varepsilon$  и  $\mathbf{t}^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  таковы, что

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathbf{T}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{t}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon\| =: \delta^\varepsilon \in (0, \mathbf{t}^\varepsilon). \quad (7.5)$$

Тогда у оператора  $\mathbf{T}^\varepsilon$  есть собственное число  $\tau_{\mathbf{n}^\varepsilon}^\varepsilon$ , подчинённое неравенству  $|\tau_{\mathbf{n}^\varepsilon}^\varepsilon - \mathbf{t}^\varepsilon| \leq \delta^\varepsilon$ . Более того, для любого  $\delta_\bullet^\varepsilon \in (\delta^\varepsilon, \mathbf{t}^\varepsilon)$  найдётся столбец коэффициентов  $\mathbf{c}^\varepsilon = (\mathbf{c}_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathbf{c}_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}$ , при котором выполнены соотношения

$$\left\| \mathbf{u}^\varepsilon - \sum_{j=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} \mathbf{c}_j^\varepsilon \mathbf{U}_j^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\delta^\varepsilon}{\delta_\bullet^\varepsilon} \quad \text{и} \quad \sum_{j=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} |\mathbf{c}_j^\varepsilon|^2 = 1. \quad (7.6)$$

Здесь  $\tau_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \tau_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  – набор всех собственных чисел оператора  $\mathbf{T}^\varepsilon$  из замкнутого сегмента  $[\mathbf{t}^\varepsilon - \delta_\bullet^\varepsilon, \mathbf{t}^\varepsilon + \delta_\bullet^\varepsilon]$ , а соответствующие собственные векторы  $\mathbf{U}_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathbf{U}_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  подчинены условиям ортогональности и нормировки  $\langle \mathbf{U}_j^\varepsilon, \mathbf{U}_k^\varepsilon \rangle = \delta_{j,k}$ .

Сначала рассмотрим случай  $d > 3$  и назначим “почти собственную” пару оператора  $\mathbf{T}^\varepsilon$

$$\{\mathbf{t}_p^\varepsilon; \mathbf{u}_p^\varepsilon\} = \{\varepsilon(\mu_1 + \varepsilon^2 \beta_p)^{-1}; \|\mathbf{v}_p^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{v}_p^\varepsilon\}. \quad (7.7)$$

При этом  $\mathbf{v}_p^\varepsilon$  – сумма отделённых членов анзаца (3.2) (далее – асимптотический конгломерат),  $v = v_p$  – собственная функция уравнения

(4.4), отвечающая его собственному числу  $\beta_p$ , а член  $u'_p$  гладкого типа – остаток в разложении сингулярного решения (5.2), т.е.

$$u'_p(x) = K_1 \tilde{U}(x; v_p). \quad (7.8)$$

Сразу же отметим, что в силу соотношения (6.4) справедливы неравенства

$$|\langle \mathbf{v}_p^\varepsilon, \mathbf{v}_q^\varepsilon \rangle - \mu_1 \varepsilon^{d-3} \delta_{p,q}| \leq C_{pq} \varepsilon^{d-2} \Rightarrow |\langle \mathbf{u}_p^\varepsilon, \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle - \delta_{p,q}| \leq C_{pq} \varepsilon. \quad (7.9)$$

В самом деле, при дифференцировании функции  $\mathbf{v}_p^\varepsilon$  главным оказывается слагаемое  $\varepsilon^{-1} \chi_\Gamma(x) \nabla_\xi w_1(\xi) v_p(s)$ , для которого

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \int_{\Omega} \chi_\Gamma(x)^2 |\nabla_\xi w_1(\xi)|^2 v_p(s) v_q(s) dx \\ &= \varepsilon^{d-2} \left( \int_{\Xi} |\nabla_\xi w_1(\xi)|^2 d\xi + O(\varepsilon) \right) \sum_{k=0}^{N-1} v_p(s_k^\varepsilon) v_q(s_k^\varepsilon) \\ &= \varepsilon^{d-2} (\mu_1 + O(\varepsilon)) \sum_{k=0}^{N-1} v_p(s_k^\varepsilon) v_q(s_k^\varepsilon) = \varepsilon^{d-3} (\mu_1(v_p, v_q)_\Gamma + O(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Приведём пояснения. Сначала перешли к криволинейным координатам  $(s, n, x_3, \dots, x_d)$ , заморозили функции  $v_p$  и  $v_q$  в точках  $s_k^\varepsilon \in \Gamma$  и сделали замену  $x \mapsto \xi$ . Затем убрали срезку  $\chi_\Gamma$  и якобиан  $J(n, s) = 1 + n\kappa(s)$  – погрешность составила  $O(\varepsilon)$  ввиду гладкости функций  $v_m$  и  $\kappa$ , а также скорости  $O(\rho^{1-d})$  затухания вектор-функции  $\nabla_\xi w_1$ , локализующего подынтегральное выражение около контура  $\Gamma$ . Наконец, применили формулы (2.7) и (2.11) для пары  $\{\mu_1; w_1\}$  и заменили интегральную сумму скалярным произведением  $(v_p, v_q)_\Gamma = \delta_{p,q}$ . Вклад остальных членов конгломератов  $\mathbf{v}_p^\varepsilon$  и  $\mathbf{v}_q^\varepsilon$  формирует мажоранту в оценке (7.9) по причинам затухания градиентов членов типа пограничного слоя и наличия множителя  $\varepsilon^{d-2}$  при члене гладкого типа.

Обработка величины  $\delta_p^\varepsilon$ , фигурирующую в формуле (7.5), но найденную по “почти собственной” паре (7.7). Определения (7.1) и (7.2), показывают, что

$$\begin{aligned}
\delta_p^\varepsilon &= \sup \left| \langle \mathbf{T}^\varepsilon \mathbf{u}_p^\varepsilon - \mathbf{t}_p^\varepsilon \mathbf{u}_p^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle \right| \\
&= \mathbf{t}_p^\varepsilon \|\mathbf{v}_p^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup \left| (\varepsilon^{-1} \mu_1 + \varepsilon \beta_p) (\mathbf{v}_p^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} - (\nabla_x \mathbf{v}_p^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_\Omega \right| \\
&= \mathbf{t}_p^\varepsilon \|\mathbf{v}_p^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup \left| (\Delta_x \mathbf{v}_p^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega - (\partial_z \mathbf{v}_p^\varepsilon + (\varepsilon^{-1} \mu_1 + \varepsilon \beta_p) \mathbf{v}_p^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} \right|.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве  $\mathbf{H}^\varepsilon$ , т.е. по таким пробным функциям  $\psi^\varepsilon \in \mathbf{H}^\varepsilon$ , что  $\|\psi^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon\| \leq 1$ , а значит, в силу обычного следового неравенства (см., например, [1]), а также неравенств Фридрикса (2.9), (3.11) и указанных после них действий выводим соотношение

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{r}^{-1} \psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \|\rho_\varepsilon^{-1} \psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 \\
&\leq c_{\Omega, \Gamma} \|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = c_{\Omega, \Gamma}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Здесь  $\mathbf{r} = \text{dist}(x, \Gamma)$  и  $\rho_\varepsilon = \text{dist}(x, \partial\omega^\varepsilon)$ .

Согласно (7.7) и (7.9) множитель при  $\sup |\dots|$  в правой части цепочки (7.10) не превосходит  $c_p \varepsilon^{(5-d)/2}$ . Выражение  $I_p^\varepsilon(\psi^\varepsilon)$  между знаками модуля представим как сумму таких слагаемых:

$$\begin{aligned}
I_{u_p}^\varepsilon(\psi^\varepsilon) &= ([\Delta_x, \chi_\Gamma](w_1 v_p + \varepsilon W_p' + \varepsilon^2 W_p'') + \varepsilon^{d-2} \Delta_x u_p', \psi^\varepsilon)_\Omega \\
&\quad - \varepsilon^{d-2} (\partial_z u_p' + (\varepsilon^{-1} \mu_1 + \varepsilon \beta_p) u_p', \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} =: I_{u_p}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon) + I_{u_p}^{\varepsilon\omega}(\psi^\varepsilon),
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
I_{w_p}^\varepsilon(\psi^\varepsilon) &= (\Delta_x (w_1 v_p + \varepsilon W_p' + \varepsilon^2 W_p''), \chi_\Gamma \psi^\varepsilon)_{\Omega \cap \mathcal{V}} \\
&\quad - ((\partial_z + \varepsilon^{-1} \mu_1 + \varepsilon \beta_p)(w_1 v_p + \varepsilon W_p' + \varepsilon^2 W_p''), \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} \\
&=: I_{w_p}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon) + I_{w_p}^{\varepsilon\omega}(\psi^\varepsilon).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

При этом  $W_p'$  и  $W_p''$  — члены пограничного слоя, в которых положили  $v = v_p$ , а  $[\Delta_x, \chi_\Gamma] = 2\nabla_x \chi_\Gamma \cdot \nabla_x + (\Delta_x \chi_\Gamma)$  — коммутатор оператора Лапласа со срезкой  $\chi_\Gamma$ .

Благодаря упомянутому в начале §6 совпадению главных членов разложений на бесконечности членов типа пограничного слоя с отделёнными членами асимптотики сингулярного решения (5.2) в сумме из скалярного произведения  $I_{u_p}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon)$ , величины порядка  $\varepsilon^{d-2}$  взаимно уничтожаются, а значит, при учёте соотношений (2.14), (2.15), (3.17),

(3.14) и (3.22) находим:

$$\begin{aligned} |I_{up}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon)| &\leq c_p \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \\ &\times \left( \int_{R_\Gamma/2}^{R_\Gamma} \left( \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{1-d} + \varepsilon \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2-d} + \varepsilon^2 \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{3-d} \left(1 + \left|\ln \frac{r}{\varepsilon}\right|\right)^{\delta_{a,4}} \right)^2 r^{d-2} dr \right)^{1/2} \\ &\leq C_p \varepsilon^{d-1} (1 + |\ln \varepsilon|)^{\delta_{a,4}}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Формулы (5.6), (7.11) и (1.1) дают оценку последнего скалярного произведения в списке (7.12)

$$\begin{aligned} |I_{up}^{\varepsilon\omega}(\psi^\varepsilon)| &\leq c_p \varepsilon^{d-2} \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\| |\omega^\varepsilon|^{1/2} \max_{x \in \omega^\varepsilon} (r^{5-d} (r^{-1} + \varepsilon^{-1}) (1 + |\ln r|)^{\delta_{a,4}}) \\ &\leq C_p \varepsilon^{d-2} \varepsilon^{1/2} \varepsilon^{(d-2)/2} \varepsilon^{4-d} (1 + |\ln \varepsilon|)^{\delta_{a,4}} \\ &= C_p \varepsilon^{(d+3)/2} (1 + |\ln \varepsilon|)^{\delta_{a,4}}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Вспомнив условия Стеклова (2.4), (3.7), (3.8) и (4.2) для членов суммы на первой позиции в скалярном произведении  $I_{wp}^{\varepsilon\omega}(\psi^\varepsilon)$  из списка (7.13) аналогично выкладке (7.15) выводим, что

$$\begin{aligned} |I_{wp}^{\varepsilon\omega}(\psi^\varepsilon)| &= c_p \varepsilon^2 |\beta_p(W'_p + \varepsilon W''_p, \psi^\varepsilon)_\omega| \\ &\leq c_p \varepsilon^2 |\omega^\varepsilon|^{1/2} \|\psi^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\| \leq C_p \varepsilon^2 \varepsilon^{(d-2)/2} \varepsilon^{1/2} = C_p \varepsilon^{(d+3)/2}. \end{aligned}$$

Для похожей суммы в скалярном произведении  $I_{wp}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon)$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \Delta_x(w_1 v_p + \varepsilon W'_p + \varepsilon^2 W''_p) &= \varepsilon^{-2} \Delta_\xi(w_1 v_p) + \varepsilon^{-1} (\Delta_\xi W'_p + L_1(w_1 v_p)) \\ &+ \varepsilon^0 (\Delta_\xi W''_p + L_1 W'_p + L_2(w_1 v_p)) + \tilde{L}_2(w_1 v_p) + \varepsilon \tilde{L}_1 W'_p + \varepsilon^2 \tilde{L}_0 W''_p, \end{aligned} \quad (7.16)$$

Первые три слагаемых из правой части обращаются в нуль согласно построениям из §§3 и 5. Операторы  $\tilde{L}_\ell$  при  $\ell = 0, 1, 2$  получены удалением из оператора (3.3) суммы  $\varepsilon^{-2} L_0 + \dots + \varepsilon^{\ell-2} L_\ell$ , и поэтому согласно способу вывода расщепления оператора Лапласа (2.6) и перечисленным ранее свойствам функций  $w_1$  и  $W'_p, W''_p$  оценки весовых норм из (7.11) приводят к формуле

$$\begin{aligned} |I_{wp}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon)| \\ \leq c_p \varepsilon \left( \|\rho_\varepsilon^{-1} \psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \sum_{\ell=0}^2 \|\rho_\varepsilon \nabla_\xi^\ell (w_1 v_p + \varepsilon W'_p + \varepsilon^2 W''_p); L^2(\mathcal{V}_{\varepsilon R_\omega} \cap \Omega)\| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\mathbf{r}^{-1}\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \left( \int_{\varepsilon R_\omega}^{R_\Gamma} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{2-d} + \varepsilon^2 \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{3-d} + \varepsilon^3 \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{4-d} \right)^2 r^d dr \Big)^{1/2} \\
& \leq c_p \varepsilon \left( (\varepsilon^2 \varepsilon^{d-1})^{1/2} + \varepsilon^{d-2} \left( \int_{\varepsilon R_\omega}^{R_\Gamma} \frac{r^d dr}{r^{2d-4}} \right)^{1/2} \right) \leq C_p \varepsilon^{(d+3-\delta_{d,4})/2}. \quad (7.17)
\end{aligned}$$

Соберём приведенные неравенства для слагаемых в выражениях (7.12) и (7.13). Поскольку наихудшая мажоранта появилась в (7.17), для величины (7.10) справедливы соотношения

$$\delta_p^\varepsilon \leq c_p \varepsilon^{(5-d)/2} \varepsilon^{(d+3-\delta_{d,4})/2} = c_p \varepsilon^{4-\delta_{d,4}/2}. \quad (7.18)$$

Таким образом, лемма 7.1 и равенства (7.4), (7.7) предоставляют собственное число  $\tau_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon$  оператора  $\mathbf{T}^\varepsilon$  и собственное число  $\lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon$  задачи (1.3)–(1.5), для которых верны оценки

$$\begin{aligned}
& |\tau_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon - \mathbf{t}_p^\varepsilon| \leq c_p \varepsilon^{4-\delta_{d,4}/2} \Leftrightarrow \\
& |\lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon - \varepsilon^{-1}\mu_1 - \varepsilon\beta_p| \leq c_p \varepsilon^{4-\delta_{d,4}/2} (\varepsilon^{-1}\mu_1 + \varepsilon\beta_p) \lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon. \quad (7.19)
\end{aligned}$$

Отсюда в первую очередь выводим формулу  $\lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon \leq 2(\varepsilon^{-1}\mu_1 + \varepsilon\beta_p)$  при  $c_p \varepsilon^{4-\delta_{d,4}/2} (\mu_1 + \varepsilon^2\beta_p) \leq 1/2$ , а затем при удачном выборе величины  $\varepsilon_p > 0$  превращаем эти соотношения в такое:

$$|\lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon - \varepsilon^{-1}\mu_1 - \varepsilon\beta_p| \leq 2c_p \varepsilon^{2-\delta_{d,4}/2} (\mu_1 + \varepsilon^2\beta_p)^2 \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p]. \quad (7.20)$$

**Теорема 7.1.** *Для любого  $p \in \mathbb{N}$  при выполнении условия (1.11) в размерности  $d > 3$  существуют такие положительные  $\varepsilon_p$  и  $C_p$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p]$  найдутся собственное число  $\lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon$  задачи (1.3)–(1.5) (свое для каждого  $p$ ), для которого выполнена оценка*

$$|\lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon - \varepsilon^{-1}\mu_1 - \varepsilon\beta_p| \leq C_p \varepsilon^{2-\delta_{d,4}/2}, \quad (7.21)$$

где  $\mu_1$  и  $\beta_p$  – собственные числа задачи (2.2)–(2.4) и дифференциального уравнения (4.4).

**Доказательство.** Нужно ещё рассмотреть двукратное собственное число  $\beta_p$  предельного уравнения (4.4), т.е.  $\beta_{p-1} < \beta_p = \beta_{p+1} < \beta_{p+2}$ , и убедиться в том, что можно соблюсти соотношение  $n_p^\varepsilon \neq n_{p+1}^\varepsilon$ . Для этого привлечём вторую часть леммы 7.1 и возьмём в ней  $\delta^\varepsilon = \max\{\delta_p^\varepsilon, \delta_{p+1}^\varepsilon\}$  и  $\delta_*^\varepsilon = \theta^{-1}\delta^\varepsilon$  с некоторым  $\theta \in (0, 1)$ . Обозначим через

$\mathbf{c}_q^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}$  и  $\mathbf{S}_q^\varepsilon \in H_0^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \omega^\varepsilon)$  при  $q = p, p+1$  столбцы и линейные комбинации собственных векторов, фигурирующие в формуле (7.6) для двух “почти собственных” пар  $\{\mathbf{t}_p^\varepsilon; \mathbf{u}_p^\varepsilon\}$  и  $\{\mathbf{t}_{p+1}^\varepsilon; \mathbf{u}_{p+1}^\varepsilon\}$ . Если столбцы имеют разные высоты, то уравниваем их добавлением нулевых элементов. В силу соотношений (7.6), (7.9) и равенств  $\langle \mathbf{U}_j^\varepsilon, \mathbf{U}_k^\varepsilon \rangle = \delta_{j,k}$  выводим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |(\mathbf{c}_m^\varepsilon, \mathbf{c}_n^\varepsilon)_{\mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}} - \delta_{m,n}| &= |\langle \mathbf{S}_m^\varepsilon, \mathbf{S}_n^\varepsilon \rangle - \delta_{m,n}| \leq |\langle \mathbf{S}_m^\varepsilon - \mathbf{u}_m^\varepsilon, \mathbf{S}_n^\varepsilon \rangle| + \\ &+ |\langle \mathbf{u}_m^\varepsilon, \mathbf{S}_n^\varepsilon - \mathbf{u}_n^\varepsilon \rangle| + |\langle \mathbf{u}_m^\varepsilon, \mathbf{u}_n^\varepsilon \rangle - \delta_{m,n}| \leq 2\theta + 2\theta + C_{pq}\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Следовательно, при малых  $\theta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  столбцы  $\mathbf{c}_p^\varepsilon$  и  $\mathbf{c}_{p+1}^\varepsilon$  “почти ортонормированы” в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}$ , а значит,  $\mathbf{X}^\varepsilon \geq 2$ , что и требовалось, так как увеличение мажоранты в оценке (7.18) в  $\theta^{-1}$  раз не сказывается на выкладках (7.19), (7.20).  $\square$

При  $d = 3$  в соответствии с принятыми анзацами (6.1) и (6.2) в качестве “почти собственной” пары возьмём выражения

$$\{\mathbf{t}_p^\varepsilon; \mathbf{u}_p^\varepsilon\} = \{\varepsilon(\mu_1 + \varepsilon |\ln \varepsilon| \beta_p)^{-1}; \|v_p^\varepsilon; \mathbf{H}^\varepsilon\|^{-1} v_p^\varepsilon\}, \quad (7.23)$$

в которых фигурируют асимптотический конгломерат

$$v_p^\varepsilon(x) = \chi_\Gamma(x) (w_1(\xi) v_p(s) + \varepsilon W_p'(\xi, s; v_p) + \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| W_p(\xi, s; v_p)) + \varepsilon u'(x), \quad (7.24)$$

и собственные пары  $\{\mu_1; w_1\}$  и  $\{\beta_p; v_p\}$  соответственно задачи (2.2)–(2.5) и уравнения (4.4) с коэффициентами (6.3). Члены типа пограничного слоя, у которых нижний индекс  $p$  подразумевает замену  $v \mapsto v_p$ , были построены в §6, однако из-за расхождения асимптотик этих членов и сингулярного решения (5.2) (ср. слагаемое  $\mathcal{K}v$  в (5.9)) определение (7.8) при  $d = 3$  не годится: член  $u'$  гладкого типа считаем решением задачи Дирихле в  $\Omega$  для такого уравнения Пуассона:

$$-\Delta_x u'(x) = K_1 [\Delta_x, \chi_\Gamma(x)] (v_p(s) r^{-1} \sin \varphi + \mathcal{U}_1(r, \varphi, s; v_p) + \mathcal{W}(r, \varphi, s; v_p)), \quad x \in \Omega.$$

Подчеркнём, что  $\ln \varepsilon$  исчез из последнего слагаемого согласно построениям из §6.

Последующие вычисления в целом такие же, как и в случае  $d > 3$ , – перечислим изменения в проделанных выкладках. Заметим, что формулы (7.9) сохраняются, но в их мажоранты нужно добавить множитель  $1 + |\ln \varepsilon|$ , который мало влияет на необходимый вывод из соотношения (7.22). У величины (7.10), найденной по паре (7.23), множитель

при  $\sup |I_p^\varepsilon(\psi^\varepsilon)|$  не превосходит  $c_p\varepsilon$ , а сама разность  $I_p^\varepsilon(\psi^\varepsilon)$  скалярных произведений в  $L^2(\Omega)$  и  $L^2(\partial\omega^\varepsilon)$  представима как сумма величин (7.12) и (7.13), в которых требуется сделать понятные изменения в формулах (7.23) и (7.24). Оценки (7.14) и (7.15) составляющих выражения (7.12) остаются без изменений, причём их мажоранты приобретают порядки  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^3$  соответственно. Величина  $I_{wp}^{\varepsilon\omega}(\psi^\varepsilon)$  обрабатывается при учёте условий Стеклова для членов типа пограничного слоя следующим образом:

$$\begin{aligned} & |I_{wp}^{\varepsilon\omega}(\psi^\varepsilon)| \\ &= |(\partial_z + (\varepsilon^{-1}\mu_1 + \varepsilon|\ln\varepsilon|\beta_p)(w_1v + \varepsilon W'(\cdot; v_p) + \varepsilon^2|\ln\varepsilon|W(\cdot; v_p), \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon}| \\ &= \varepsilon^2|\ln\varepsilon|\beta_p(W_p'(\cdot; v_p) + \varepsilon|\ln\varepsilon|W_p(\cdot; v_p), \psi^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon}| \leq C_p\varepsilon^3|\ln\varepsilon|. \end{aligned}$$

Наконец, для скалярного произведения  $I_{wp}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon)$  справедливы похожие на (7.16) и (7.17) формулы

$$\begin{aligned} & \Delta_x(w_1v_p + \varepsilon W_p'(\cdot; v_p) + \varepsilon^2|\ln\varepsilon|W_p(\cdot; v_p)) \\ &= \tilde{L}_2(w_1v_p) + \varepsilon\tilde{L}_1W_p'(\cdot; v_p) + \varepsilon^2|\ln\varepsilon|\tilde{L}_0W_p(\cdot; v_p), \\ & |I_{wp}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon)| \leq C_p\varepsilon^3(1 + |\ln\varepsilon|), \end{aligned}$$

которые обеспечены прежней аргументацией, а множитель  $1 + |\ln\varepsilon|$  пришёл в мажоранту от предпоследнего слагаемого в анзаце (6.2).

Подведём итог и сформулируем результат. В случае  $d = 3$  величина (7.10) не превосходит  $c_p\varepsilon^3$ : наихудшая мажоранта  $O(\varepsilon^2)$  возникла в оценке слагаемого  $I_{wp}^{\varepsilon\Omega}(\psi^\varepsilon)$ , а дополнительный множитель  $\varepsilon$  приписан согласно формулам (7.23) и (7.9).

**Теорема 7.2.** *В трёхмерном случае при условии (1.11) для любого  $p \in \mathbb{N}$  найдутся такие величины  $\varepsilon_p > 0$  и  $C_p > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p]$  в последовательности (1.7) есть собственное число  $\lambda_{n_p}^\varepsilon$  (свое для каждого  $p$ ), удовлетворяющее соотношению*

$$|\lambda_{n_p}^\varepsilon - \varepsilon^{-1}\mu_1 - \varepsilon|\ln\varepsilon|\beta_p| \leq C_p\varepsilon, \quad (7.25)$$

где  $\mu_1$  и  $\beta_p$  – собственные числа задачи (2.2)–(2.4) и уравнения (4.4) с коэффициентами (6.3).

## §8. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Если не оговорено противное, в этом параграфе считаем, что  $d > 3$  (см. §9, п. 3° по поводу трёхмерного случая). Выберем какую-то собственную пару  $\{\lambda_p^\varepsilon; u_p^\varepsilon\}$  задачи (1.3)–(1.5). В силу теорем 7.1 и 7.2, утверждающих, в частности, что при малом  $\varepsilon$  отображение  $p \mapsto n_p^\varepsilon$  – инъекция, существуют такие величины  $\varepsilon_p \in (0, 1)$  и  $c_p > 0$ , что справедливо соотношение

$$\lambda_p^\varepsilon \leq \lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon \leq \varepsilon^{-1}\mu_1 + c_p\varepsilon \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p]. \quad (8.1)$$

Следовательно, найдётся положительная бесконечно малая последовательность  $\{\varepsilon^{(\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ , вдоль которой имеет место сходимость (индекс  $\ell$  не пишем)

$$\beta_p^\varepsilon := \varepsilon^{-1}(\lambda_p^\varepsilon - \varepsilon^{-1}\mu_1) \rightarrow \widehat{\beta}_p \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (8.2)$$

Ближайшая цель – убедиться в том, что  $\widehat{\beta}_p$  – собственное число предельного уравнения на контуре  $\Gamma$ . Начнём с проверки локализации собственной функции  $u_p^\varepsilon$  в малой окрестности контура, для чего введём кусочно-гладкую непрерывную весовую функцию  $\mathcal{R}_\varepsilon$  формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\varepsilon(x) &= \varepsilon, \quad x \in \mathcal{V}_{\varepsilon R_\omega}^d, \quad \mathcal{R}_\varepsilon(x) = R_\omega^{-1}r, \quad x \in \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon R_\omega}^d, \\ \mathcal{R}_\varepsilon(x) &= R_\Gamma^{-1}R_\omega, \quad x \in \Omega \setminus \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d. \end{aligned}$$

**Лемма 8.1.** *Для любых  $d \geq 3$ ,  $\gamma \in (0, \sqrt{d-2})$  и  $p \in \mathbb{N}$  найдутся такие положительные  $\varepsilon_p(\gamma)$  и  $c_p(\gamma)$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p(\gamma)]$  собственная функция  $u_p^\varepsilon$  задачи (1.3)–(1.5), подчинённая условию нормировки (1.8), удовлетворяет весовой оценке*

$$\|\mathcal{R}_\varepsilon^\gamma \nabla_x u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \|\mathcal{R}_\varepsilon^{\gamma-1} u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq c_p(\gamma) \varepsilon^{2\gamma-1}. \quad (8.3)$$

**Доказательство.** В интегральное тождество (1.6) для пары  $\{\lambda_p^\varepsilon; u_p^\varepsilon\}$  подставим пробную функцию  $\psi^\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon^{2\gamma} u_p^\varepsilon \in H_0^1(\Omega; \partial\Omega \setminus \omega^\varepsilon)$  и после несложных преобразований (двукратное коммутирование  $\nabla_x$  и  $\mathcal{R}_\varepsilon^\gamma$ ) получим для произведения  $\mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma} = \mathcal{R}_\varepsilon^\gamma u_p^\varepsilon$  следующее равенство:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2\gamma} \lambda_p^\varepsilon &= \lambda_p^\varepsilon \|\mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma}; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 \\ &= \|\nabla_x \mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma}; L^2(\Omega)\|^2 - \|\mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma} \mathcal{R}_\varepsilon^{-\gamma} \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\gamma; L^2(\Omega \cap (\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon R_\omega}^d))\|^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Заметим, что  $\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\gamma(x) = 0$  при  $x \notin \Omega \cap (\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon R_\omega}^d)$  и

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\gamma(x)^{-1} |\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\gamma(x)| \leq \gamma r^{-1}$$



при  $\varepsilon R_\omega \leq r \leq R_\Gamma$ , а значит, модуль вычитаемого  $\mathcal{I}_p^\varepsilon$  в (8.4) не превосходит  $\gamma^2 \|r^{-1} \mathcal{U}_m^{\varepsilon\vartheta}; L^2(\Omega \cap (\mathcal{V}_{R_\Gamma} \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon R_\omega}))\|^2$ . Теперь применим неравенство (2.9) для функции  $r \mapsto W(r) = \mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma}(x)$ , которое умножим на  $J(n, s)r^{d-4}$  и проинтегрируем по  $\varsigma \in \partial\omega$  и  $r \in (\varepsilon R_0, R_\Gamma)$ , где  $R_0 \geq 0$ . Поскольку  $1 - \kappa R_\Gamma \leq J(n, s) \leq 1 + \kappa R_\Gamma$ , где  $\kappa = \max\{|\kappa(s)| : s \in \Gamma\}$ , указанные действия приводят к соотношению

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x \mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma}; L^2(\Omega \cap (\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon R_0}^d))\|^2 \\ & \geq (d-2 - \varrho_\Gamma(d)) \|r^{-1} \mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma}; L^2(\Omega \cap (\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon R_0}^d))\|^2, \end{aligned} \quad (8.5)$$

причём  $\varrho_\Gamma(d) \rightarrow +0$  при  $R_\Gamma \rightarrow +0$  (выбор радиуса  $R_\Gamma > 0$  условен и его уменьшение допустимо). В итоге выводим из соотношений (8.4) и (8.5) неравенство

$$\begin{aligned} & \delta \|\nabla_x \mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma}; L^2(\Omega)\|^2 \\ & + ((1-\delta)(d-2 - \varrho_\Gamma(d)) - \gamma^2) \|r^{-1} \mathcal{U}_p^{\varepsilon\gamma}; L^2(\Omega \cap (\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon R_0}^d))\|^2 \leq \varepsilon^{2\gamma} \lambda_p^\varepsilon. \end{aligned}$$

При учёте предположения  $\gamma^2 < d-2$  выбираем величины  $\delta > 0$  и  $R_\Gamma$  настолько малыми, чтобы множитель при последнем квадрате нормы стал положительным. Наконец, множитель  $\mathcal{R}_\varepsilon$  в первой норме из (8.5) выносится из-под градиент-оператора посредством прежних соображений, а сама оценка (8.3) получается при помощи ещё одного применения формул (8.1) и (8.5).  $\square$

Теперь введём кусочно-линейную функцию  $\bar{u}_p^\varepsilon \in H^1(\Gamma)$  со значениями в точках изломов

$$\bar{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{d/2}} \int_{\omega_k^\varepsilon} w_1(\xi', 0) u_p^\varepsilon(x') J(n, s)^{-1/2} dx', \quad k=0, \dots, N-1, \quad (8.6)$$

и заметим, что, во-первых, якобиан  $J(n, s)$  положителен всюду в  $\mathcal{V}_{R_\Gamma}^2$ , во-вторых,

$$\begin{aligned} \bar{S}_p^\varepsilon & := \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} |\bar{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \left( \int_{\omega_k^\varepsilon} J(n, s)^{-1/2} w_1(\xi', 0) u_p^\varepsilon(x') dx' \right)^2 \\ & \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \left( \int_{\varepsilon\omega} |w_1(\xi', 0)|^2 ds dndx_3 \dots dx_{d-1} \right) \int_{\omega_k^\varepsilon} |u_p^\varepsilon(x')|^2 dx' \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\omega_k^\varepsilon} |u_p^\varepsilon(x', 0)|^2 dx' = 1. \quad (8.7)$$

(использованы нормировки (2.11) и (1.7), а  $\varepsilon\omega$  –  $\varepsilon$ -сжатие множества  $\omega$ ) и, в-третьих,

$$\frac{1}{3}\overline{S}_p^\varepsilon \leq \|\overline{u}_p^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 \leq \overline{S}_p^\varepsilon. \quad (8.8)$$

Итак,  $\|\overline{u}_p^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| \leq 1$ , а значит, вдоль подпоследовательности  $\{\varepsilon^{(\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  (сохраняем обозначение и по-прежнему не пишем индекс  $\ell$ ) справедлива следующая слабая сходимость в  $L^2(\Gamma)$ :

$$\overline{u}_p^\varepsilon \rightarrow \widehat{u}_p \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (8.9)$$

Как уже упоминалось, далее в этом разделе считаем, что  $d > 3$  и  $\gamma = 1$  (ср. §9, п. 3°).

**Лемма 8.2.** *Сходимость (8.9) слабая в  $H^1(\Gamma)$  и сильная в  $L^2(\Gamma)$ , причём  $\|\widehat{u}_p; L^2(\Gamma)\| > 0$ .*

**Доказательство.** Подставим в интегральное тождество (1.6) пробную функцию  $\psi^\varepsilon = \varepsilon\chi_\Gamma^2 u_p^\varepsilon$  и согласно оценке (8.3) при  $\gamma = 1$ , которую применим к членам, содержащим множитель  $\nabla_x \chi_\Gamma$  и аннулирующим-ся вне множества  $\Omega \cap (\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d \setminus \mathcal{V}_{R_\Gamma/2}^d)$ , придём к соотношению

$$\varepsilon \|\nabla_x(\chi_\Gamma u_p^\varepsilon); L^2(\Omega)\|^2 - \varepsilon \lambda_p^\varepsilon \|u_p^\varepsilon; L^2(\omega^\varepsilon)\|^2 = O(\varepsilon \varepsilon^{2\gamma-1}) = O(\varepsilon^2). \quad (8.10)$$

Разобьем трубчатое множество  $\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d$  на тонкие “пластинки”

$$\Xi_k^\varepsilon = \{x \in \Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d : \xi_1^k := \varepsilon^{-1}(s - s_k^\varepsilon) \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)\}, \quad k=0, \dots, N-1, \quad (8.11)$$

которые после перехода к растянутым координатам  $\xi^k = (\xi_1^k, \xi^\#, \xi_d)$  (см. формулу (1.2)) превращаются в пределе при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в полуслой  $\Xi$ . Для сужения функции  $\chi_\Gamma u_p^\varepsilon$  на  $\Xi_k^\varepsilon$ , записанного в растянутых координатах и продолженного нулём на всю область  $\Xi$ , напомним представление

$$\varepsilon^{d/2} J(n, s)^{1/2} \chi_\Gamma(x) u_p^\varepsilon(x) = \overline{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon) w_1(\xi^k) + w_{k,p}^{\varepsilon \perp}(\xi^k). \quad (8.12)$$

При этом согласно определениям (8.6), (8.12) и нормировке (2.11) выполнены соотношения

$$\int_{\omega} w_1(\xi', 0) w_{kp}^{\varepsilon \perp}(\xi', 0) d\xi' = 0 \quad \text{и} \quad (8.13)$$

$$\int_{\omega} (\bar{u}_p^{\varepsilon}(s_k^{\varepsilon}) w_1(\xi', 0) + w_{kp}^{\varepsilon \perp}(\xi', 0))^2 d\xi' = |\bar{u}_p^{\varepsilon}(s_k^{\varepsilon})|^2 + \|w_{kp}^{\varepsilon \perp}; L^2(\omega)\|^2.$$

Благодаря замечанию 2.1 и условию ортогональности из списка (8.13) справедливо неравенство<sup>5</sup>

$$\|\nabla_{\xi} w_{kp}^{\varepsilon \perp}; L^2(\Xi)\|^2 \geq \mu_2^N \|w_{kp}^{\varepsilon \perp}; L^2(\omega)\|^2 \quad \text{при некотором } \mu_2^N \in (\mu_1, \mu_2].$$

Теперь интегралы по  $\Omega \cap \mathcal{V}_{R_{\Gamma}}^d$  и  $\omega^{\varepsilon}$  в левой части формулы (8.10) представим как сумму интегралов по “пластинкам” (8.11) и “пятнам” Стеклова на их торцах. В результате после растяжения координат и учёта формулы  $\nabla_x = (\partial_n, J(n, s)^{-1} \partial_s, \partial_{x^{\#}}, \partial_z)$  приходим к соотношению

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left( \|\nabla_{\xi} (\bar{u}_p^{\varepsilon} w_1 + w_{kp}^{\varepsilon \perp}); L^2(\Xi)\|^2 - \varepsilon \lambda_p^{\varepsilon} (|\bar{u}_p^{\varepsilon}|^2 + \|w_{kp}^{\varepsilon \perp}; L^2(\omega)\|^2) \right) \quad (8.14)$$

$$= O(\varepsilon^{2\gamma}) + \varepsilon \mathcal{J}_p^{\varepsilon} = O(\varepsilon).$$

Поясним оценку  $|\mathcal{J}_p^{\varepsilon}| \leq c_p$  для интеграла

$$\mathcal{J}_p^{\varepsilon} = \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_{\Gamma}}^d} \left( \frac{\kappa(s)^2}{4J(n, s)^2} |\chi_{\Gamma}(x) u_p^{\varepsilon}(x)|^2 - \frac{\kappa(s)}{J(n, s)} \chi_{\Gamma}(x) u_p^{\varepsilon}(x) \partial_n (\chi_{\Gamma}(x) u_p^{\varepsilon}(x)) \right.$$

$$+ \frac{n^2 \partial_s \kappa(s)^2}{4J(n, s)^4} |\chi_{\Gamma}(x) u_p^{\varepsilon}(x)|^2 - \frac{n \partial_s \kappa(s)}{J(n, s)^2} \chi_{\Gamma}(x) u_p^{\varepsilon}(x) \partial_s (\chi_{\Gamma}(x) u_p^{\varepsilon}(x))$$

$$\left. - n \kappa(s) \frac{2 + n \kappa(s)}{J(n, s)} |\partial_s (\chi_{\Gamma}(x) u_p^{\varepsilon}(x))|^2 \right) dx,$$

который появился вследствие дифференцирования множителя  $J(n, s)^{-1/2}$ , пришедшего из представления (8.12). Первое и третье слагаемые в подынтегральном выражении обрабатываются при помощи обеспеченного леммой 8.2 неравенства

$$\|\chi_{\Gamma} u_p^{\varepsilon}; L^2(\Omega)\|^2 dx \leq c \|\mathcal{R}_{\varepsilon}^{\gamma-1} u_p^{\varepsilon}; L^2(\Omega)\|^2 \leq C_p \varepsilon^{2\gamma-1} = C_p \varepsilon.$$

<sup>5</sup>Второе собственное число  $\mu_2^N$  смешанной краевой задачи в  $\Xi$  не обязательно совпадает с членом  $\mu_2$  последовательности (2.10) собственных чисел задачи условиями периодичности.

Для второго предварительно применяем формулу интегрирования по частям (“перебрасываем” производную  $\partial_n$  от  $(\chi_\Gamma u_p^\varepsilon)^2$ ). Наконец, для четвёртого при учёте соотношения  $|n| \leq \mathcal{R}_\varepsilon(x)$  в  $\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d$  используем ещё раз неравенство (8.3) с иным (но также допустимом) показателем  $\gamma = 1/2$ .

Поскольку величина  $\|\nabla_\xi(\bar{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon)w_1 + w_{kp}^{\varepsilon\perp}); L^2(\Xi)\|^2$  равна

$$\begin{aligned} |\bar{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon)|^2 \|\nabla_\xi w_1; L^2(\Xi)\|^2 + \|\nabla_\xi w_{kp}^{\varepsilon\perp}; L^2(\Xi)\|^2 \\ \geq \mu_1 |\bar{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon)|^2 + \mu_2^N \|w_{kp}^{\varepsilon\perp}; L^2(\omega)\|^2, \end{aligned}$$

теперь выводим из соотношения (8.14) неравенство

$$(\mu_2^N - \varepsilon\lambda_p^\varepsilon) \sum_{k=0}^{N-1} \|w_{kp}^{\varepsilon\perp}; L^2(\omega)\|^2 \leq |\varepsilon\lambda_p^\varepsilon - \mu_1| \sum_{k=0}^{N-1} |\bar{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon)|^2 + C_p \varepsilon.$$

В силу формул (8.1) и (8.7) правая часть не превосходит  $(c_p + C_p)\varepsilon$ , а множитель при сумме в левой части больше  $(\mu_2^N - \mu_1)/2$  при малом  $\varepsilon$ . В итоге находим, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|w_{kp}^{\varepsilon\perp}; L^2(\omega)\|^2 \leq c_p^\perp \varepsilon,$$

а значит, нормировка (1.8), левая оценка (8.8) и второе равенство (8.13) показывают, что

$$\|\bar{u}_p^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| \geq \frac{1}{3}(1 - c_p^\perp \varepsilon^2).$$

Закончим доказательство леммы проверкой слабой сходимости (8.9) в пространстве Соболева  $H^1(\Gamma)$ , для чего нужно обработать выражение

$$\|\partial_s \bar{u}_p^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{N-1} |\bar{u}_p^\varepsilon(s_{k+1}^\varepsilon) - \bar{u}_p^\varepsilon(s_k^\varepsilon)|^2. \quad (8.15)$$

Оценку разностей значений функции  $\bar{u}_p^\varepsilon$  в соседних точках  $s_k^\varepsilon$  и  $s_{k+1}^\varepsilon$  на контуре  $\Gamma$  проведём в два этапа. Сначала применим метод факторизации и положим  $\chi_\Gamma(x)u_p^\varepsilon(x) = \mathbf{z}_p^\varepsilon(x)\mathbf{w}_1^\varepsilon(x)$ , где

$$\mathbf{w}_1^\varepsilon(\xi) = w_1(\xi) + \varepsilon\kappa(s)W_0(\xi) + \varepsilon^2\widehat{\mathbf{w}}^\varepsilon(x),$$

$W_0$  – решение задачи (3.5), (3.7), (2.3), (2.5), допускающее представление (3.17) и (3.19), а  $\widehat{\mathbf{w}}^\varepsilon$  – функций с носителем в  $\overline{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d}$ , которая

далее будет наделена подходящими свойствами, обеспечивающими соотношения

$$cw_1(\xi) \leq \mathbf{w}_1^\varepsilon(x) \leq Cw_1(\xi), \quad |\widehat{\mathbf{w}}^\varepsilon(x)| \leq \widehat{c}w_1(\xi), \quad x \in \Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d, \quad (8.16)$$

а  $c < C$  и  $\widehat{c}$  – положительные постоянные. Согласно разложениям (2.14) и (3.17) сумма  $w_1(\xi) + \varepsilon\kappa(s)W_0(\xi)$  теряет положительность при  $\xi_d \geq 2(\varepsilon\kappa(s))^{-1}$ , но, уменьшив при необходимости радиус  $R_\Gamma > 0$ , считаем что она положительна всюду в  $\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d$ .

Аналогично формулам (4.6) и (8.4), (8.10) получаем равенства

$$\begin{aligned} \lambda_p^\varepsilon - \frac{\mu_1}{\varepsilon} + \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} |\nabla_x \chi_\Gamma|^2 |u_p^\varepsilon|^2 dx \\ = \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} |\nabla_x (\chi_\Gamma u_p^\varepsilon)|^2 dx - \frac{\mu_1}{\varepsilon} \int_{\omega^\varepsilon} |u_p^\varepsilon|^2 dx' \\ =: \mathbf{I}_p^\varepsilon - \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} \mathbf{z}_p^\varepsilon \mathbf{w}_1^\varepsilon (\mathbf{w}_1^\varepsilon \Delta_x \mathbf{z}_p^\varepsilon + 2\nabla_x \mathbf{w}_1^\varepsilon \cdot \nabla_x \mathbf{z}_p^\varepsilon) dx - \int_{\omega^\varepsilon} u_p^\varepsilon \mathbf{w}_1^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{z}_p^\varepsilon}{\partial x_d} dx' \\ = \mathbf{I}_p^\varepsilon + \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} |\mathbf{w}_1^\varepsilon|^2 |\nabla_x \mathbf{z}_p^\varepsilon|^2 dx. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Модуль выражения из левой части не превосходит  $c_p \varepsilon$  в силу соотношения (8.1) и оценки (8.3) при  $\gamma = 1$ , суженной на

$$\overline{\Omega} \cap (\overline{\mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} \setminus \mathcal{V}_{R_\Gamma/2}^d) \supset \text{supp} |\nabla_x \chi_\Gamma|.$$

Похожие на выкладку (4.6) преобразования придают определённому в средней части (8.17) слагаемому  $\mathbf{I}_p^\varepsilon$  следующий вид:

$$\mathbf{I}_p^\varepsilon = - \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} u_p^\varepsilon \mathbf{z}_p^\varepsilon \Delta_x \mathbf{w}_1^\varepsilon dx - \int_{\omega^\varepsilon} u_p^\varepsilon \mathbf{z}_p^\varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{w}_1^\varepsilon}{\partial x_d} - \frac{\mu_1}{\varepsilon} \mathbf{w}_1^\varepsilon \right) dx' =: \mathbf{I}_{p\Omega}^\varepsilon + \mathbf{I}_{p\omega}^\varepsilon. \quad (8.18)$$

Условия Стеклова (2.4) и (3.7), а также назначенное далее условие Неймана

$$\partial_z \widehat{\mathbf{w}}^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \omega^\varepsilon, \quad (8.19)$$

показывают, что в силу нормировки (1.8) и проверяемого далее второго соотношения (8.16) интеграл  $\mathbf{I}_{p\omega}^\varepsilon$  по семейству “пятен” (1.1) удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{I}_{p\omega}^\varepsilon| = \mu_1 \varepsilon \left| \int_{\omega^\varepsilon} u_p^\varepsilon \mathbf{z}_p^\varepsilon \widehat{\mathbf{w}}^\varepsilon dx' \right| \leq C \mu_1 \varepsilon \int_{\omega^\varepsilon} |u_p^\varepsilon|^2 dx' = C \mu_1 \varepsilon.$$

После вывода оценки для первого интеграла  $\mathbf{I}_{p\Omega}^\varepsilon$  из правой части (8.18) с подобной мажорантой, придём к желанному неравенству

$$\|\mathbf{w}_1^\varepsilon \nabla_x \mathbf{z}_p^\varepsilon; L^2(\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d)\|^2 \leq c\varepsilon. \quad (8.20)$$

Из-за используемых криволинейных координат подынтегральное выражение в  $\mathbf{I}_{p\Omega}^\varepsilon$  может не обратиться в нуль: при учёте расщепления (3.3) оператора (2.6) видим, что

$$-\Delta_x(w_1(\xi) + \varepsilon\kappa(s)W_0(\xi)) = \varepsilon^0 \mathbf{f}(\xi; s) + \dots,$$

где многочлен замещает младшие асимптотические члены (ср. §3). Функция  $\xi \mapsto \mathbf{f}(\xi; s)$  из правой части ведёт себя на бесконечности как  $O(\rho^{2-d})$ , а значит, благодаря соотношению (2.14) и оценке (8.3) с показателем  $\gamma = 1$  выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} u_p^\varepsilon(x) \mathbf{z}_p^\varepsilon(x) (1 - \chi_\omega(\rho)) \mathbf{f}(\xi; s) dx \right| &\leq c_\infty \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} |u_p^\varepsilon| |w_1| |\mathbf{z}_p^\varepsilon| dx \\ &\leq c_\infty \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} |u_p^\varepsilon|^2 dx \leq C_\infty \varepsilon. \end{aligned}$$

Вместе с тем эта функция приобретает особенности  $O(\rho^{-3/2})$  вблизи рёбер  $\partial\omega_k^\varepsilon$ . Разумеется, такая особенность допустима и в силу неравенства Харди (2.9) справедливо соотношение

$$\left| \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} u_p^\varepsilon(x) \mathbf{z}_p^\varepsilon(x) \chi_\omega(\rho) \mathbf{f}(\xi; s) dx \right| \leq c_{\partial\omega} \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_\Gamma}^d} |\nabla_x u_p^\varepsilon(x)|^2 dx, \quad (8.21)$$

впрочем неудовлетворительное, так как правая часть есть  $O(\varepsilon^{-1})$  ввиду соотношений (1.6), (1.8) и (8.1). Поэтому приходится повторить итерационный процесс, описанный в §§3 и 4, и построить пару младших асимптотических членов  $\varepsilon^2 \widehat{\mathbf{w}}^\varepsilon(x) = \varepsilon^3 W_3(\xi; s) + \varepsilon^4 W_4(\xi; s)$ , однако с важными изменениями: компенсируется только финитные (умноженные на срезку  $\chi_\omega$ ) части невязок и на “пятнах” Стеклова ставятся

условия Неймана (см. формулу (8.19)), делающие задачу в полуслое  $\Xi$  однозначно разрешимой. Следовательно, во-первых, функции  $W_q$ ,  $q = 3, 4$ , допускают при  $\rho \rightarrow +\infty$  представления вида (2.14), (3.14) и, во-вторых, согласно замечанию 4.2 главными членами их разложений около рёбер служат степенные решения  $C_q(\varsigma)\rho^{1/2}\Psi_q(\varphi)$  (без логарифма!). Таким образом, вопрос о соблюдении условий (8.16) не возникает, а в формуле (8.21) при замене  $\mathbf{f} \mapsto -\Delta_x \mathbf{w}_1^\varepsilon$  появляется дополнительный множитель  $\varepsilon^2$ . В итоге объявленные оценки интегралов  $\mathbf{I}_{p\Omega}^\varepsilon$  и  $\mathbf{I}_{p\omega}^\varepsilon$ , а вместе с ними и желанное неравенство (8.20) установлены.

На втором этапе соединим соседние “пятна”  $\omega_k^\varepsilon$  и  $\omega_{k+1}^\varepsilon$  аркой  $\Pi_k^\varepsilon$  (см. рис. 3), а именно, восстановим из этих “пятен” цилиндры  $\Pi_{k-}^\varepsilon$  и  $\Pi_{k+}^\varepsilon$  со скошенными верхними торцами:

$$\{x^\bullet : x^{\bullet'} = (s, n, x_3, \dots, x_{d-1}) \in \omega_k^\varepsilon, 0 < z < \varepsilon H + s_k^\varepsilon - s\}$$

и

$$\{x^\bullet : x^{\bullet'} \in \omega_{k+1}^\varepsilon, 0 < z < \varepsilon H + s - s_{k+1}^\varepsilon\}.$$

Взяв параметр  $H > 0$  достаточно большим и вспомнив первое условие симметрии (1.11), соединим разнонаправленные торцы стоек  $\Pi_{k\pm}^\varepsilon$  ещё одним цилиндром-перекладной  $\Pi_{k0}^\varepsilon$  с заострёнными концами и тем же, но повернутым на угол  $\pi/4$  сечением (см. рис. 3, а). Наконец, проводим путь  $\pi_k^\varepsilon(x^{\bullet'})$  из каждой точки  $x^{\bullet'} \in \omega_k^\varepsilon$  с координатой  $s_k^\varepsilon + t$  в соответствующую точку  $\hat{x}^{\bullet'}$  с координатой  $s_{k+1}^\varepsilon - t$  на “пятне”  $\omega_{k+1}^\varepsilon$ . Пути  $\pi_k^\varepsilon(x^{\bullet'}) \ni \mathbf{s}$ , образованные высотами цилиндров  $\Pi_{k-}^\varepsilon$ ,  $\Pi_{k+}^\varepsilon$  и “горизонтальными” отрезками внутри  $\Pi_{k0}^\varepsilon$ , заполняют всю арку  $\Pi_k^\varepsilon$ . Справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$w_1(\hat{x}^{\bullet'}, 0)^2 \mathbf{z}_p^\varepsilon(\hat{x}^{\bullet'}, 0) - |w_1(x^{\bullet'}, 0)|^2 \mathbf{z}_p^\varepsilon(x^{\bullet'}, 0) = \int_{\pi_k^\varepsilon(x^{\bullet'})} \mathbf{w}_1(x^\bullet)^2 \partial_s \mathbf{z}_p^\varepsilon(x^\bullet) ds, \quad (8.22)$$

в которой величина  $\mathbf{w}_1(x^\bullet)$  равна  $w_1(\xi', 0)$  на стойке  $\Pi_{k-}^\varepsilon$  и не изменяется вдоль неё. Аналогичные определения оформим на элементах  $\Pi_{k0}^\varepsilon$  и  $\Pi_{k+}^\varepsilon$  арки  $\Pi_k^\varepsilon$ , заметив, что в итоге непрерывная кусочно-гладкая на области  $\Pi_k^\varepsilon$  функция  $\mathbf{w}_1$  не зависит от продольной координаты  $\mathbf{s}$  и потому производная  $\partial_s \mathbf{w}_1$  не появилась в интеграле из (8.22). Эти равенства с индексами  $k = 0, \dots, N-1$ , умноженные на подходящую степень малого параметра  $\varepsilon$ , проинтегрированные по малым “пятнам”

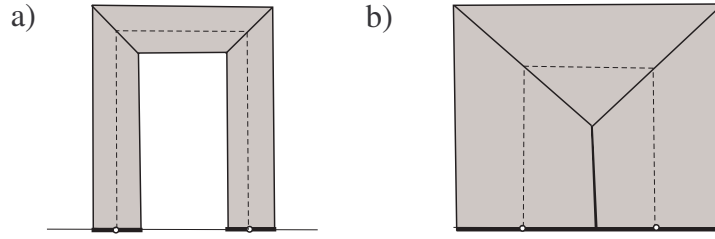


Рис. 3. “Арка” (а), соединяющая “пятна”  $\omega_k^\varepsilon$  и  $\omega_{k+1}^\varepsilon$ , которые схематично изображены полужирными линиями. Точки  $s_k^\varepsilon$  и  $s_{k+1}^\varepsilon$  помечены значком  $\circ$ . В случае тороидального множества (1.9) “арка” полностью перекрыта (б). Одиночные пути отмечены штрихпунктирными линиями.

$\varepsilon\omega$  и возведённые в квадрат, дают соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-d-1} \left| \int_{\omega_{k+1}^\varepsilon} w_1(\xi', 0) u_p^\varepsilon(x', 0) dx' - \int_{\omega_k^\varepsilon} w_1(\xi', 0) u_p^\varepsilon(x', 0) dx' \right|^2 \\ \leq c\varepsilon^{-d-1} \left| \int_{\Pi_k^\varepsilon \cup \Pi_{k+1}^\varepsilon} w_1(\xi) |\partial_s \mathbf{z}_p^\varepsilon(x^\bullet)| dx^\bullet \right|^2 \\ \leq C\varepsilon^{-d-1} |\Pi_k^\varepsilon \cup \Pi_{k+1}^\varepsilon| \int_{\Pi_k^\varepsilon \cup \Pi_{k+1}^\varepsilon} |\mathbf{w}_1^\varepsilon(x)|^2 |\nabla_x \mathbf{z}_p^\varepsilon(x^\bullet)|^2 dx^\bullet. \quad (8.23) \end{aligned}$$

Замены  $\mathbf{w}_1 \mapsto w_1$  и  $w_1 \mapsto \mathbf{w}_1^\varepsilon$  в первом и втором переходах стали возможны благодаря перечисленным в §2 свойствам собственной функции  $w_1$  и левому соотношению (8.16).

Просуммируем неравенства (8.23) по  $k = 0, \dots, N-1$ . Левая часть полученной формулы лишь слагаемым  $O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  отличается от выражения (8.15) (опять учитываем искажение  $O(\varepsilon)$  якобианом, а также “лишний” множитель  $1/\sqrt{\varepsilon}$  в сравнении с определением (8.6)). В силу формулы (8.20) правая часть не превосходит



$$4C_{\Pi} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega \cap \mathcal{V}_{R_{\Gamma}}^d} |\mathbf{w}_1^{\varepsilon}(\xi)|^2 |\nabla_x \mathbf{z}_p^{\varepsilon}(x)|^2 dx \leq 4C_{\Pi} c,$$

так как  $|\Pi_k^{\varepsilon}| \leq c_{\Pi} \varepsilon^d$  и в результате суммирования возникает удвоенный интеграл по малой окрестности контура  $\Gamma$ . Полученная оценка показывает ограниченность нормы  $\|\partial_s \bar{u}_p^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|$  и заканчивает доказательство леммы 8.2.  $\square$

Убедимся в том, что  $\{\widehat{\beta}_p; \widehat{u}_p\}$  – собственная пара предельного уравнения (4.4) (напоминаем, что  $d > 3$ ). Возьмём какую-либо функцию  $\psi \in C^{\infty}(\Gamma)$  и соорудим пробную функцию, симитировав асимптотические структуры из §§3, 4, но домножив их на  $\varepsilon^{-(d-3)/2}$ :

$$\begin{aligned} \psi^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-(d-3)/2} \chi_{\Gamma}(x) (w_1(\xi) \psi(s) + \varepsilon W'(\xi, s; \psi) \\ + \varepsilon^2 W''(\xi, s; \psi)) + \varepsilon^{(d-1)/2} u'(x; \psi). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Слагаемые  $W'$  и  $u'$  зададим прежними формулами (3.4) и (7.8), но в задаче (4.1), (2.3), (4.2), (2.5) для слагаемого  $W''(\dots; \psi)$  для выполнения условия её разрешимости (функция  $\psi$  не удовлетворяет уравнению (4.4)) изменим краевое условие Стеклова следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial W''}{\partial \xi_d}(\xi', 0, s; \psi) - \mu_1 W''(\xi, s; \psi) = (\beta_p^{\varepsilon} \psi(s) \\ + (B \partial_s^2 \psi(s) - \kappa(s)^2 \psi(s)) w_1(\xi), \quad \xi' \in \omega. \end{aligned}$$

В итоге выкладки из §7, применённые к выражению (8.24), показывают, что правая часть равенства  $0 = (u_p^{\varepsilon}, \Delta_x \psi^{\varepsilon})_{\Omega} + (u_p^{\varepsilon}, (\partial_{\nu} - \lambda_p^{\varepsilon}) \psi^{\varepsilon})_{\omega^{\varepsilon}}$ , полученного интегрированием по частям в интегральном тождестве (1.6), оказывается равной

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-(d-1)/2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\omega_k^{\varepsilon}} w_1(\xi', 0) u_p^{\varepsilon}(x', 0) (B \partial_s^2 \psi(s) - (\kappa(s)^2 b - \beta_p^{\varepsilon}) \psi(s)) dx' \\ + O(\varepsilon^{1/2}) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Теперь определение (8.6) и формулы Тейлора для функций  $\psi \in C^{\infty}(\Gamma)$  и  $\kappa$ , а также привычный учёт якобиана дают соотношение

$$0 = \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \bar{u}_p^{\varepsilon}(\varepsilon k) (B \partial_s^2 \psi(\varepsilon k) - (b \kappa(\varepsilon k)^2 + \beta_p^{\varepsilon}) \psi(\varepsilon k)) + O(\varepsilon^{1/2}),$$

которое при помощи сходимостей (8.2) и (8.9), уточнённых леммой 8.2, и предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow +0$  превращается в интегральное тождество

$$\int_{\Gamma} \widehat{u}_p(s) (B\partial_s^2 \psi(s) - \kappa(s)^2 \psi(s) - \widehat{\beta}_p \psi(s)) ds = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\Gamma). \quad (8.25)$$

Как обычно, отсюда вытекает, что бесконечно дифференцируемая на контуре  $\Gamma$  функция  $\widehat{u}_p$  удовлетворяет уравнению (4.4) с параметром  $\widehat{\beta}_p$ . Поскольку  $\|\widehat{u}_p; L^2(\Gamma)\| \neq 0$ , доказана

**Теорема 8.1.** Пусть  $d > 3$ . Для любого  $p \in \mathbb{N}$  предельные переходы (8.2) и (8.9) дают собственную пару  $\{\widehat{\beta}_p; \widehat{v}_p\}$  предельного уравнения (4.4).

**Замечание 8.1.** Представленный вывод интегрального тождества (8.25) с небольшими изменениями годится и трёхмерной ситуации, однако отсутствие проверки нетривиальности предела (8.9) не позволяет заключить, что  $\{\widehat{\beta}_p; \widehat{u}_p\}$  – собственная пара предельного уравнения при  $d = 3$ .

### §9. ВЫВОДЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

1°. Теоремы об асимптотике. Утверждения теорем 7.1, 7.2 и 8.1 позволяют установить финальные асимптотические формулы в размерностях  $d > 3$ .

**Теорема 9.1.** Пусть выполнены требования симметрий (1.11) и  $d > 3$ . Номер  $n_p^\varepsilon$  собственного числа  $\lambda_{n_p^\varepsilon}^\varepsilon$  исходной задачи (1.3)–(1.5), фигурирующего в оценке (7.21), совпадает с номером  $p \in \mathbb{N}$  собственного числа  $\beta_p$  предельного обыкновенного дифференциального уравнения (4.4).

**Доказательство.** Из формулы (8.1) вытекает, что  $n_p^\varepsilon \geq p$ . Предположим, что для некоторой бесконечно малой положительной последовательности  $\{\varepsilon^{(\ell)}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  выполнено неравенство  $n_p^{\varepsilon^{(\ell)}} > p$  при каком-то номере  $p$  в случае  $\beta_p < \beta_{p+1} - d_p \varepsilon$  и  $d_p > 0$ . Тогда найдётся собственное

число  $\lambda_*^{\varepsilon^{(\ell)}} \in (0, \varepsilon^{-1}\mu_1 + \varepsilon\beta_p + c_p\varepsilon^2]$  задачи Стеклова–Дирихле, которому отвечает собственная функция  $u_*^{\varepsilon^{(\ell)}}$ , ортогональная в  $L^2(\omega^{\varepsilon^{(\ell)}})$  собственным функциям  $u_1^{\varepsilon^{(\ell)}}, \dots, u_p^{\varepsilon^{(\ell)}}$ . В силу теоремы 8.1 предельные переходы (8.2) и (8.9) предоставляют собственную пару  $\{\widehat{\beta}_*; \widehat{u}_*\}$  предельного уравнения (4.4). При этом, во-первых,  $\widehat{\beta}_* < \beta_{p+1}$  и, во-вторых, функция  $\widehat{u}_*$  ортогональна в  $L^2(\Gamma)$  собственным функциям  $v_1, \dots, v_p$  (по причине сильной сходимости, установленной в лемме 8.2). Эти наблюдения противоречат способу составления последовательности (4.5) и тем самым гарантируют равенство  $n_p^\varepsilon = p$ .  $\square$

После проверки асимптотических формул для собственных чисел вторая часть леммы 7.1, точнее неравенство (7.6), также позволяет указать асимптотику собственных функций  $u_p^\varepsilon$ . Это делается по стандартной, весьма простой, схеме и поэтому ограничимся формулировкой соответствующего утверждения, причём в неполном объёме, впрочем достаточном для подтверждения свойства локализации собственных функций исходной задачи в окрестности контура  $\Gamma$ .

**Теорема 9.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 9.1 и  $\beta_p = \beta_{p+\kappa_p-1}$  – собственное число предельного уравнения (4.4) с кратностью  $\kappa_p \in \{1, 2\}$ . Тогда найдутся такие положительные величины  $c_p, \varepsilon_p$  и ортогональная  $(\kappa_p \times \kappa_p)$ -матрица  $M^{\varepsilon, p} = (M_{nm}^{\varepsilon, p})_{m, n=1}^{\kappa_p}$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p]$  для собственных функций  $u_p^\varepsilon, u_{p+\kappa_p-1}^\varepsilon$  задачи (1.3)–(1.5), подчинённых условиям (1.8), верны оценки*

$$\left\| \nabla_x \left( u_n^\varepsilon - \chi_\Gamma \varepsilon^{1-d/2} \sum_{m=1}^{\kappa_p} M_{nm}^{\varepsilon, p} w_1 v_m \right); L^2(\Omega) \right\|^2 \leq c_p \varepsilon, \quad (9.1)$$

$$n = p, p + \kappa_p - 1,$$

где  $w_1$  и  $v_p, v_{p+\kappa_p-1}$  – собственные функции задачи (2.2)–(2.5) в полуслое  $\Xi \ni \xi$  и уравнения (4.4) на контуре  $\Gamma \ni s$ , подчинённые соотношениям (2.11) и (6.4) соответственно.

Отметим, что  $\|\nabla_x u_n^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = \lambda_n^\varepsilon$  благодаря формулам (1.6) и (1.8), а значит, в силу соотношения  $\lambda_n^\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$  оценка (9.1) в самом деле оправдывает выделенный член асимптотики, который сконцентрирован около контура  $\Gamma$  по причине представления (2.14) функции  $w_1$ .

2°. *Граница.* Требования к границе  $\partial\Omega$ , на которой поставлено условие Дирихле, можно существенно ослабить. Для самого контура  $C^\infty$ -гладкость также не нужна – достаточно предположить его включение в класс Гёльдера  $C^{3,\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Ту же гладкость можно приписать границе  $\partial\omega \subset \mathbb{R}^2$ . В обоих случаях доступна “рёберная” асимптотика возникающих решений  $w_1$ ,  $W_q$  и  $U(\cdot; v)$  из §§2–6 (см., например, [15, глава 10, 11]). В принципе годятся и кусочно-гладкие контуры, образующие границу  $\partial\omega$ , но для этого требуется привлечь сложно устроенные асимптотические формулы около вершин многогранных углов (см., например, [15, глава 10]).

Уплощённость участка  $\Sigma \supset \Gamma$ , существенно использовалась в выкладках даже в трёхмерной ситуации. Если участок  $\Sigma$  границы  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – произвольная гладкая двумерная поверхность и  $\Gamma$  – простой гладкий замкнутый контур на ней, то разработанный подход пригоден для построения асимптотики собственных пар задачи (1.3)–(1.5). Вместе с тем представление вида (2.6) для оператора Лапласа в естественных локальных координатах, привязанных к контуру и порождённых репером {касательная, нормаль, бинормаль}, ощутимо загромождается.

3°. *О снятии дополнительных ограничений.* Теорема 8.1 о сходимости (8.2), (8.9) не была доказана при  $d = 3$  потому, что показатель  $\gamma = 1$ , использованный по существу в лемме 8.2, отвергнут ограничением  $\gamma < \sqrt{d-2}$  в лемме 8.1. В результате представленные в §8 выкладки не обеспечивают необходимую равномерную относительно малого параметра  $\varepsilon$  ограниченность нормы  $\|\bar{u}_p; H^1(\Gamma)\|$ . Материал статьи [9] подсказывает, что при  $d = 3$  нужная оценка выполнена в пространстве Хёрмандера [33] с весовой функцией  $(1 + (\ln|\zeta|)_+)\sqrt{|\zeta|}$ , однако из-за неимоверного объёма выкладок произведён лишь формальный асимптотический анализ в трёхмерной ситуации – по поводу обоснования асимптотик в случае тонкого тороидального множества (1.9) отсылаем читателя к книге [34, гл. 12] и статьям [9, 35].

Отказ от одного из двух требований (1.11) имеет разные последствия. Зеркальная симметрия множества  $\omega$  относительно гиперплоскости  $\{\xi' : \xi_2 = 0\}$  позволила сократить объём восьмого параграфа благодаря видимому упрощению доказательства леммы 8.2 (см. замечание 2.1): при отсутствии симметрии пришлось бы применять преобразование Гельфанда [36] и изучать зависимость от параметра Флоке собственных чисел модельной задачи в полуслое  $\Xi$  с условиями квазипериодичности на его основаниях (см. [15, 37, 38] и др.).

Вместе с тем устранение зеркальной симметрии “пятна”  $\omega$  относительно другой гиперплоскости  $\{\xi' : \xi_1 = 0\}$  может существенно изменить асимптотическое строение собственных пар задачи (1.3)–(1.5). Второе равенство (1.11) понадобилось в §3 для того, чтобы соблюсти условие разрешимости задачи (3.5), (2.3), (3.7), (2.5) путём уничтожения второго члена  $\mu'$  анзаца (3.1). Если кривизна  $\kappa = \kappa_0$  постоянна, т.е.  $\Gamma$  – окружности, то в принципе такая симметрия не нужна: указанная задача разрешима при  $\mu' = \kappa_0 I_0$  (см. формулу (3.9)), а представление (3.1) собственного числа сохраняет вид, причём ненулевой второй член не разрушает процедуру построения асимптотики и лишь немного усложняет выкладки.

С другой стороны, если производная функции  $\Gamma \ni s \mapsto \kappa(s)$  отлична от нуля и кривизна приобретает экстремальные точки, то при  $I_0 \neq 0$  эффект локализации собственных функций задачи (1.3)–(1.5) усугубляется: они концентрируются около точек глобального максимума или минимума кривизны в зависимости от знака величины  $I_0$ . Соответствующие асимптотические анзацы, включающие растяжение координаты  $s$ , а также алгоритмы построения их членов можно извлечь из работ [39–43] и других публикаций.

Аналогичные эффекты сугубой локализации возникают в случае гладкой зависимости “пятен” Стеклова от координаты  $s \in \Gamma$ , при которой множества  $\omega_k^\varepsilon$  определены формулой (1.1) с заменой  $\omega \mapsto \omega(\varepsilon k)$ , где  $\omega(s) = \phi_s \omega$ , а  $\phi_s$  – диффеоморфизм в пространстве  $\mathbb{R}^{d-1}$ , несколько раз непрерывно дифференцируемый по параметру  $s$ . В этом случае собственные числа модифицированной задачи (2.2)–(2.5) в  $\Xi$  приобретают зависимость от переменной  $s \in \Gamma$ , а концентрация собственных функций задачи (1.3)–(1.5) в  $\Omega$  наблюдается около точек минимума функции  $\Gamma \ni s \mapsto \mu_1(s)$ .

Изучение обоих обобщений выведено за пределы статьи.

4°. *Полные асимптотические разложения.* В принципе после определения главных асимптотических членов собственных пар задачи (1.3)–(1.5) построение бесконечных формальных рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$  сопровождается разве лишь алгебраическими поправками, вызванными кратными собственными числами предельного уравнения (4.4). Благодаря установленному в разд. 3 экспоненциальному затуханию составляющих (2.16), (3.20) и подобных им полностью годятся итерационные процессы из книги [34, главы 2, 4, 11, 12], однако лишь в размерностях  $d \geq 4$ . Трёхмерная задача стоит особняком

из-за появления нового параметра  $|\ln \varepsilon|$ . Попытка соорудить асимптотические разложения с остатками степенной малости по  $\varepsilon$  встречает осложнения, которые нельзя признать неощутимыми, так как для этого в предельное уравнение на контуре  $\Gamma$  приходится включить фигурирующий в разложении (5.9) псевдодифференциальный оператор  $\mathcal{K}$  с малым коэффициентом  $|\ln \varepsilon|^{-1}$  и доказать аналитическую зависимость собственных пар такого предельного уравнения от  $|\ln \varepsilon|^{-1}$ . Похожие предельные задачи уже изучались в полном объёме, хотя и для иных операторов (см. [9, 35, 44, 45], [34, глава 11] и др.).

Подчеркнём, что при оценивании погрешностей частичных сумм рядов достаточно применить лемму 7.1, а технически наиболее сложный материал из §8 воспроизводить не надо.

5°. *Множественность серий собственных чисел с устойчивыми асимптотиками.* Собственные пары  $\{\mu_\ell; w_\ell\}$  задачи (2.2)–(2.5) с номерами  $\ell > 1$  также можно использовать для построения анзацев вида (3.1), (3.2) (или (6.1), (6.2) в трёхмерной ситуации), однако итерационные процессы остаются без серьёзных изменений только в случае ненулевого множителя  $K_\ell$  в представлении (2.14) среднего собственной функции  $w_\ell$ . Если же  $K_\ell = 0$  и  $w_\ell(\xi) = O(\rho^{1-d})$ , то выкладки значительно облегчаются, так как поправочные члены  $W'$  и  $W''$  приобретают большую скорость затухания при  $\rho \rightarrow +\infty$  и, более того, при  $d = 3$  из асимптотических анзацев исчезает зависимость от  $|\ln \varepsilon|$ . Вместе с тем на первый план выходит неочевидная проверка невырождения коэффициента  $B^{(\ell)}$  при второй производной  $\partial_s^2$  в предельном дифференциальном уравнении (4.4), поскольку из-за отсутствия положительности собственной функции  $w_\ell$  метод факторизации не работает. Вопрос о выводе неравенства  $B^{(\ell)} \neq 0$  остаётся полностью открытым.

Также непонятен вид предельной задачи в случае кратного собственного числа  $\mu_\ell$ .

Если всё-таки случилось, что  $B^{(\ell)} = 0$ , то удаётся активизировать асимптотический анализ иного рода (ср. [39–41, 43] и др.) при условии, что величина  $I_0$  отлична от нуля и кривизна  $\kappa$  переменная (см. формулу (3.9)) и п. 3° §9)

Упомянем одно легкодоступное обобщение: откажемся от условия связности замкнутой кривой  $\Gamma$  и предположим, что она является объединением нескольких окружностей  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_J$  радиусов  $\mathbf{R}_1 < \dots <$

$\mathbf{R}_J$  при  $J > 1$  (если все радиусы одинаковы, то асимптотическая процедура не претерпевает особых изменений, однако кратности собственных чисел (4.5) увеличиваются). Проведенный в данной работе анализ, использующий первую собственную пару  $\{\mu_1; w_1\}$  задачи (2.2)–(2.5), даёт эллиптические уравнения на окружностях  $\Gamma_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, J$ , и асимптотические представления (3.1) с собственными числами  $\beta_p^\ell$  этих уравнений. Если случилось, что величина  $I_0$  из формулы (3.9) обратилась в нуль (например, выполнено требование симметрии (1.11)), то индивидуальные последовательности  $\{\beta_p^\ell\}_{p \in \mathbb{N}}$ ,  $\ell = 1, \dots, J$  следует объединить в единую, после чего возможно применение обоих шагов процедуры обоснования. Если же  $I_1 \neq 0$ , то такое объединение бесполезно и определить номер  $n_{\ell p}^\varepsilon$  в оценке вида (7.21) удастся только для членов одной из последовательностей: при  $\ell = 1$  или  $\ell = J$  в зависимости от знака величины  $I_1$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М., Наука (1973).
2. E. Sanchez-Palencia, *Boundary value problems in domains containing perforated walls*. — // Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar, Vol. III. Res. Notes in Math. V. 70. P. 309–325. Pitman, Boston (1982).
3. A. Damlamian, Та-Tsien Li, *Boundary homogenization for elliptic problems*. — J. Math. Pures Appl. **66**, No. 4 (1987), 351–361.
4. E. Pérez, *On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem*. — Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. **7**, No. 4 (2007), 859–883.
5. А. Г. Чечкина, *Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова*. — Известия РАН. Сер. матем. **81**, No. 1 (2017), 203–240.
6. D. Gomez, S. A. Nazarov, E. Perez, *Homogenization of Winkler–Steklov spectral conditions in three-dimensional linear elasticity*. — Z. Angew. Math. Phys. **69**, No. 2 (2018), 35.
7. Р. Р. Гадьльшин, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, *Об асимптотиках собственных значений краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова*. — Известия РАН. Сер. матем. **82**, No. 6 (2018), 37–64.
8. N. G. Kuznetsov, V. G. Mazia, B. R. Vainberg, *Linear Water Waves: A mathematical approach*. Cambridge: Cambridge Univ. Pr. (2002).
9. V. Chiado Piat, S.A. Nazarov, *Steklov spectral problems in a set with a thin toroidal hole*. — Partial Differential Equations in Applied Mathematics. **1** (2020), 100007.
10. A. Herrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. Basel, Birkhäuser Verlag (2006).

11. В. А. Кондратьев, *О гладкости решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка в окрестности ребра*. — Дифференциальные уравнения **6**, No. 10 (1970), 1831–1843.
12. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно гладкой границей*. — In: Труды симп. по мех. сплошн. сред и родственным пробл. анализа **1**, Мецниереба, Тбилиси (1973), С. 171–181.
13. В. А. Кондратьев, *Особенности решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка в окрестности ребра*. — Дифференциальные уравнения **13**, No. 11 (1977), 2026–2032.
14. V. G. Maz'ya, J. Rosmann, *Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten*. — Math. Nachr. Bd. 138 (1988), 27–53.
15. S. A. Nazarov, V. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Berlin, New York, Walter de Gruyter (1994).
16. С. А. Назаров, *Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва*. — Механика твердого тела No. 2 (1989), 152–160.
17. Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*. М., Мир (1984).
18. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Усреднение процессов в периодических средах*. М., Наука (1984).
19. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*. М., Физматлит (1993).
20. А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и приложения*. Новосибирск, Тамара Рожковская (2007).
21. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
22. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. Providence: Amer. Math. Soc. (1997).
23. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в  $L_p$  и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе*. — Math. Nachr. Bd. 77 (1977), 25–82.
24. M. Vanninathan, *Homogenization of eigenvalue problems in perforated domains*. — Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **90**, No. 3 (1981), 239–271.
25. W. Kirsch, B. Simon, *Comparison theorems for the gap of Schrodinger operators*. — J. Funct. Anal. **75**, No. 2 (1987), 396–410.
26. Т. А. Мел'ник, *Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses*. — Math. Models Methods Appl. Sci. **11**, No. 6 (2001), 1001–1027.
27. S. A. Nazarov, M. E. Perez, *On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary*. — Revista Matemática Complutense **31**, No. 1 (2018), 1–62.
28. E. B. Daners, B. Simon, *Ultracontractivity and the heat kernel for Schrodinger operators and Dirichlet Laplacians*. — J. Funct. Anal. **59** (1984), 335–395.
29. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*. — Алгебра и Анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.



30. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов.* — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
31. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л., изд-во Ленингр. ун-та (1980).
32. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.* — Успехи матем. наук **12**, No. 5 (1957), 3–122.
33. Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* М., изд-во Мир (1965).
34. W. G. Mazja, S. A. Nazarov, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten.* 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000.)
35. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных чисел задачи Неймана при концентрации масс на тонком тороидальном множестве.* — Вестник СПбГУ Сер. 1, Вып. 3, No. 15 (2006), 61–71.
36. И. М. Гельфанд, *Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами.* — Доклады АН СССР **73** (1950), 1117–1120.
37. M. Reed, V. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* Vol 3, New York, Academic Press Inc. (1980).
38. P. Kuchment, *Floquet theory for partial differential equations.* Basel, Birkhäuser (1993).
39. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области.* — Проблемы матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Научн. книга (1999), 105–148.
40. L. Friedlander, M. Solomyak, *On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip.* — Israel J. Math. **170** (2009), 337–354.
41. D. Borisov, P. Freitas, *Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains.* — Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire **26**, No. 2 (2009), 547–560.
42. D. Borisov, P. Freitas, *Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in  $\mathbb{R}^d$ .* — J. Funct. Anal. **258**, No. 3 (2010), 893–912.
43. S. A. Nazarov, E. Perez, J. Taskinen, *Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains.* — Transactions of the American Mathematical Society **368**, No. 7 (2016), 4787–4829.
44. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, А. Б. Пламеневский, *Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом.* — Доклады АН СССР **256**, No. 1 (1981), 37–39.
45. М. В. Федорюк, *Дифракция плоской волны на вытянутом теле вращения.* — Доклады АН СССР **272**, No. 3 (1983), 587–590.

---

Nazarov S. A. Asymptotics of the spectrum of a boundary-value problem with the Steklov condition on small sets periodically distributed along a contour.

We construct asymptotics of eigenvalues of the Laplace equation in a multi-dimensional domain with the spectral Steklov conditions on small identical sets distributed frequently and periodically along a smooth closed contour at a planar part of the boundary while its remaining part is supplied with the Dirichlet condition. We describe the localization effect for the eigenfunctions near the contour. The limiting spectral problem implies an ordinary differential equation at the contour whose coefficients depend quadratically on its curvature. Asymptotic structures in the three-dimensional domain differ from other dimensions because they become dependent on logarithm of the small parameter, namely the period of distribution of the Steklov “spots”.

Институт Проблем Машинovedения РАН,  
Большой проспект, В.О., 61,  
199178 Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: [srgnazarov@yahoo.co.uk](mailto:srgnazarov@yahoo.co.uk)

Поступило 9 октября 2024 г.