

М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко

## О ЗАДАЧЕ М. КАЦА С ДОПОЛНЕННЫМИ ДАНЫМИ

Посвящается юбилею Нины Николаевны Уралцевой

### §0. ВВЕДЕНИЕ

*О работе.* • Пусть  $\Omega$  есть ограниченная плоская область (барабан). Задача Каца состоит в восстановлении ее формы по спектру  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$  задачи Дирихле для оператора  $L = -\Delta \upharpoonright [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$ . Известно, что однозначное восстановление невозможно: существуют изоспектральные, но неизометричные области [8, 10]. Как следствие, вполне мотивирована следующая постановка задачи: найти дополнительные (к спектру) данные, которые обеспечивают однозначность восстановления.

Мы предлагаем вариант таких дополненных данных. Он обеспечивает однозначность восстановления не только для плоской области, но и для широкого класса компактных римановых многообразий с краем, причем никаких ограничений на метрику и топологию многообразия не накладывается.

• Конструкция, которая используется при восстановлении многообразия, была предложена в [1]. В [3] она интерпретирована как *волновой спектр* полуограниченного симметрического оператора. Работа [4] проясняет ее топологические и метрические аспекты. В [5] волновой спектр использован для восстановления риманова многообразия по спектральным данным. В настоящей работе мы адаптируем подход [5] к задаче М. Каца.

*Содержание и результаты.* • Волновым спектром мы называем множество атомов некоторой решетки подпространств гильбертова пространства. Его построение – довольно сложная процедура. Мы даем ее краткое описание, приводя основные понятия теории решеток [6]. Главным элементом является соответствие (изоморфизм) между

---

*Ключевые слова:* задача М. Каца, дополнительные данные, теория решеток, динамическая система с граничным управлением.

некоторой метрической решеткой в  $\Omega$  и соответствующей гильбертовой (под)решеткой в  $L_2(\Omega)$ .

Роль исходных данных в задаче М. Каца играет спектр  $\sigma(L) : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$  задачи Дирихле для оператора  $L = -\Delta \upharpoonright [H^2(\Omega) \cup H_0^1(\Omega)]$ . Преобразование Фурье  $\Phi : L_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{I}_2$ , связанное с базисом его собственных функций, преобразует оператор в

$$\tilde{L} = \Phi L \Phi^* = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \}.$$

Пусть  $\mathcal{K} = \{h \in L_2(\Omega) \mid \Delta h = 0 \text{ в } \Omega\}$  есть подпространство гармонических функций и пусть  $\tilde{\mathcal{K}} = \Phi \mathcal{K} \subset \mathbf{I}_2$  - его спектральное представление. Подпространство  $\tilde{\mathcal{K}}$  можно задать числовым массивом (бесконечной матрицей  $\varkappa$ ), который обобщает спектральные данные одномерных обратных задач (см. Комментарии в конце работы)

Наш основной результат таков: для весьма широкого класса (т.н. *простых*) многообразий, пара  $\tilde{L}, \tilde{\mathcal{K}}$  (эквивалентно, ее числовая версия  $\sigma(L), \varkappa$ ) определяет  $\Omega$  с точностью до изометрии, причем это справедливо не только для плоских областей, но и для простых компактных римановых многообразий произвольной размерности, метрики и топологии. Любое гладкое многообразие можно сделать простым малым гладким шевелением границы. Таким образом, подпространство  $\tilde{\mathcal{K}} \subset \mathbf{I}_2$  дополняет спектр, обеспечивая единственность в задаче М. Каца.

- В конце работы высказывается гипотеза: для восстановления  $\Omega$  достаточно задать два спектра:  $\sigma(L)$  и  $\sigma(L_M)$ , где  $L_M$  есть самосопряженное расширение по М.Г. Крейну минимального оператора Лапласа  $L_0 = -\Delta \upharpoonright H_0^2(\Omega)$  (так называемое *мягкое расширение*).
- Авторы признательны С.В. Иванову и С.А. Симонову за полезные обсуждения результатов работы. Приносим благодарность А.И. Назарову за конструктивные замечания.

## §1. ГЕОМЕТРИЯ И РЕШЕТКИ

*Многообразие.* • Пусть  $\Omega$  – гладкое<sup>1</sup> компактное риманово многообразие с гладким метрическим тензором  $g$  и гладким краем  $\Gamma := \partial\Omega$ ,  $\dim \Omega = n \geq 2$ . Пусть  $d$  расстояние в  $\Omega$ . Тензор  $g$  определяется расстоянием; так что, задав метрическое пространство  $(\Omega, d)$ , мы определим  $\Omega$  и как риманово многообразие.

<sup>1</sup>всюду *гладкое* означает  $C^\infty$ -гладкое

Для множества  $A \subset \Omega$ , символом  $A^r := \{x \in \Omega \mid x' \in \Omega, d(x, x') < r\}$  обозначается его метрическая окрестность радиуса  $r > 0$ ; таким образом  $x^r$  есть открытый шар радиуса  $r$  с центром в  $x \in \Omega$ . Граница  $A \subset \Omega$  это множество  $\partial A := \overline{A} \setminus \text{int } A$ .

Множества

$$\Gamma^t := \{x \in \Omega \mid d(x, \Gamma) < t\}, \quad t > 0 \quad (1)$$

суть приграничные подобласти  $\Omega$ . В силу компактности  $\Omega$  справедливо  $T_* := \inf \{t > 0 \mid \Gamma^t = \Omega\} < \infty$ .

• Пусть  $\mu$  есть мера (риманов объем) на  $\Omega$ . Она обладает следующими свойствами:

1. Для любого  $A \subset \Omega$ , мера  $\mu(A^t)$  непрерывна по  $t > 0$ , причем  $\mu(\overline{A}) = \mu(A^{+0})$ . Как следствие, для границы метрической окрестности имеем  $\partial A^t = \{x \in \Omega \mid d(x, A) = t\}$  и  $\mu(\partial A^t) = 0$ ,  $t > 0$ .

2. Для любого шара выполнены условия  $\mu(x^r) > 0$  и  $\mu(x^{+0}) = 0$  при любом  $x \in \Omega$ .

Эти свойства важны для построения волнового спектра в более общем случае метрического пространства с мерой [5].

*Решетки.* Приведем необходимые сведения из теории решеток [6].

• Решеткой называется частично упорядоченное (по порядку  $\leq$ ) множество  $\mathfrak{L}$ , снабженное двумя операциями  $p \wedge q := \inf\{p, q\}$  и  $p \vee q := \sup\{p, q\}$ . Предполагается, что  $\mathfrak{L}$  содержит крайние (наименьший и наибольший) элементы 0 и 1.

На  $\mathfrak{L}$  имеется каноническая (*порядковая*) топология, задаваемая *порядковой сходимостью*: для сети  $p_\alpha$ , сходимость  $p_\alpha \xrightarrow{o} p$  означает, что выполнено  $p = \bigvee_{\alpha} \bigwedge_{\beta > \alpha} p_\beta = \bigwedge_{\alpha} \bigvee_{\beta > \alpha} p_\beta$ .

Решетка  $\mathfrak{L}$  есть решетка с *дополнением*, если для любого  $p \in \mathfrak{L}$  существует единственный элемент  $p^\perp \in \mathfrak{L}$ , для которого выполнены равенства  $p \wedge p^\perp = 0$  и  $p \vee p^\perp = 1$ . В этом случае в решетке есть операция дополнения  $\perp: p \mapsto p^\perp$ .

Отображение  $i: \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$  называется *изотонным*, если оно сохраняет порядок, т. е. соотношение  $p \leq q$  влечет  $i(p) \leq i(q)$ ,  $p, q \in \mathfrak{L}$ . *Изотония*  $I = \{i^t\}_{t \geq 0}$ ,  $i^0 := \text{id}$  это монотонное семейство изотонных отображений, т. е. такое, что из  $p \leq q$  и  $s < t$  следует  $i^s(p) \leq i^t(q)$ .

Пусть  $\mathfrak{L}$  – решетка с дополнением, а  $I$  – изотония. Пусть  $\{A_\alpha\} \subset \mathfrak{L}$  есть семейство подмножеств. Символом  $\sqcup A_\alpha$  мы обозначаем (под)решетку в  $\mathfrak{L}$ , которая

- (а) содержит все  $A_\alpha$ ,
  - (б) замкнута в порядковой топологии:  $\overline{\sqcup A_\alpha} = \sqcup A_\alpha$ , и инвариантна относительно перехода к дополнению:  $\perp \sqcup A_\alpha = \sqcup A_\alpha$ ,
  - (в) инвариантна относительно изотонии:  $I \sqcup A_\alpha \subset \sqcup A_\alpha$ ,
  - (г) является наименьшей из всех решеток со свойствами (а), (б), (в).
- Будем говорить, что семейство  $\{A_\alpha\}$  порождает решетку  $\sqcup A_\alpha$ .

- Множество  $\mathfrak{F}_\mathfrak{L}$ , состоящее из  $\mathfrak{L}$ -значных функций переменной  $t \geq 0$ , образует решетку с поточечным отношением порядка и операциями  $f \leq g \Leftrightarrow f(t) \leq g(t)$ ;  $(f \wedge g)(t) := f(t) \wedge g(t)$ ;  $(f \vee g)(t) := f(t) \vee g(t)$ ,  $t \geq 0$ , крайними элементами  $0(t) = 0_\mathfrak{L}$ ,  $1(t) = 1_\mathfrak{L}$ ,  $t \geq 0$ , и поточечной сходимостью  $f_\alpha \xrightarrow{\circ} g \Leftrightarrow f_\alpha(t) \xrightarrow{\circ} g(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Решетка  $\mathfrak{F}_\mathfrak{L}$  с изотонией  $I$  содержит множество

$$I\mathfrak{L} := \{Ip \mid (Ip)(t) = i^t(p), p \in \mathfrak{L}, t \geq 0\}$$

и его топологическое замыкание  $\overline{I\mathfrak{L}}$ .

- Пусть частично упорядоченное множество  $\mathcal{P}$  содержит наименьший элемент  $0$ . Элемент  $a \in \mathcal{P}$  называется *атомом*, если соотношение  $0 \neq p \leq a$  влечет равенство  $p = a$ . Символом  $\text{At } \mathcal{P}$  обозначим множество атомов.

Множествам  $\text{At } \overline{I\mathfrak{L}}$  принадлежит ключевая роль в дальнейших рассуждениях.

*Метрические решетки.* Здесь и до раздела "Динамика" приводится краткая сводка нужных фактов и результатов из работ [4] и [5]. Как и ранее,  $\Omega$  – риманово многообразие с краем.

- Семейство открытых множеств  $\mathfrak{D} := \{G \subset 2^\Omega \mid G = \text{int } G\}$  образует решетку с порядком  $\subseteq$ , крайними элементами  $0 = \emptyset$ ,  $1 = \Omega$  и операциями  $\wedge = \cap$ ,  $\vee = \cup$ . Она наделена *метрической изотонией*

$$I = \{i^t\}_{t \geq 0}, \quad i^t(G) := G^t.$$

Очевидно, что  $\mathfrak{D}$  не содержит атомов. В то же время, множество  $\overline{I\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{F}_\mathfrak{D}$   $\mathfrak{D}$ -значных функций атомы содержит:

$$\text{At } \overline{I\mathfrak{D}} = \{a_x \mid x \in \Omega\}, \quad a_x(t) := (Ix)(t) = x^t, \quad t \geq 0,$$

причем соответствие  $\Omega \ni x \leftrightarrow a_x \in \text{At } \overline{I\mathfrak{D}}$  оказывается биекцией. Более того, функция  $d' : \text{At } \overline{I\mathfrak{D}} \times \text{At } \overline{I\mathfrak{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,

$$d'(a, b) := 2 \inf \{t > 0 \mid a(t) \cap b(t) \neq \emptyset\}$$

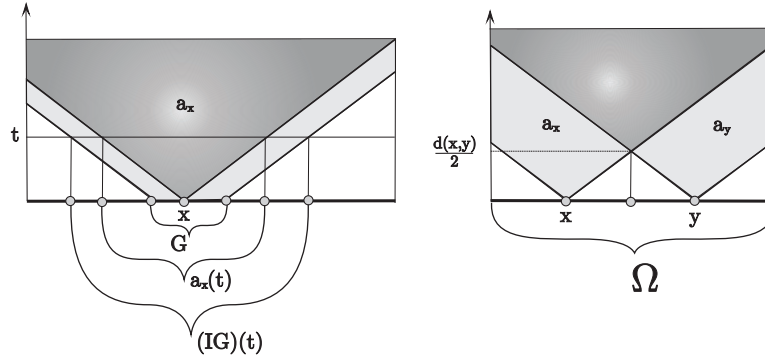


Рис. 1. Атомы и расстояние.

является метрикой и выполнено равенство  $d'(a_x, a_y) = d(x, y)$ . Как следствие, отображение  $\beta: x \mapsto a_x$  оказывается изометрией из  $\Omega$  на  $\text{At } \overline{I\mathfrak{D}}$ . Эти рассуждения иллюстрирует Рис 1:

- Для наших целей решетка  $\mathfrak{D}$  имеет “недостатки”: в ней есть множества с  $\mu(\partial G) \neq 0$  и, кроме того, она не замкнута относительно перехода к дополнению  $\perp: G \mapsto G^\perp = \Omega \setminus G$ . Для исправления первого недостатка мы используем меньшую решетку

$$\mathfrak{D}' := \{G \in \mathfrak{D} \mid \mu(\partial G) = 0\}.$$

Очевидно, справедливо равенство  $\text{At } \overline{I\mathfrak{D}'} = \text{At } \overline{I\mathfrak{D}}$ . Обозначая  $\Omega' := \text{At } \overline{I\mathfrak{D}'}$ , мы видим, что метрическое пространство  $(\Omega', d')$  есть изометрическая копия (волновая модель - см. [4]) исходной области  $(\Omega, d)$ .

- Устранение второго недостатка требует дополнительной работы. Напомним что  $A\Delta B := [A \setminus B] \cup [B \setminus A]$ . Мы говорим, что множества  $A$  и  $B$  эквивалентны и пишем  $A \sim B$ , если выполняется  $\mu(A\Delta B) = 0$ . Символом  $\langle A \rangle$  обозначается класс эквивалентности множества  $A$ . Если открытые множества  $G$  и  $G'$  эквивалентны, то из  $\overline{G} = \overline{G'}$  следует  $\overline{G}^t = \overline{G'}^t$ ,  $t > 0$ . Каждый класс эквивалентности  $\langle G \rangle$  состоит не только из открытых множеств, но содержит канонический открытый представитель  $\dot{G} = \text{int } \overline{G} \in \langle G \rangle$ . Благодаря этому, метрическая изотония продолжается с множеств на классы равенством  $\langle G \rangle^t := \langle G^t \rangle = \langle \dot{G}^t \rangle$ ,

так, что отображение  $\langle G \rangle \mapsto \langle G \rangle^t$  корректно определено (не зависит от представителя  $G \in \langle G \rangle$ ) и оказывается изотонией.

В итоге мы получили решетку классов

$$\mathfrak{L}_\Omega^m := \{\langle G \rangle \mid G \in \mathfrak{D}'\}$$

с порядком  $\langle G \rangle \leq \langle G' \rangle \Leftrightarrow \mu(G' \setminus G) \geq 0$ , крайними элементами  $0 = \langle \emptyset \rangle$  и  $1 = \langle \Omega \rangle$ , операциями

$$\langle G \rangle \cap \langle G' \rangle := \langle G \cap G' \rangle; \quad \langle G \rangle \cup \langle G' \rangle := \langle G \cup G' \rangle; \quad \langle G \rangle^\perp := \langle G^\perp \rangle$$

и изотонией

$$I_\star = \{i_\star^t\}_{t \geq 0}, \quad i_\star^t: \langle G \rangle \mapsto \langle G \rangle^t.$$

Индекс  $m$  в обозначении  $\mathfrak{L}_\Omega^m$  указывает на метрическую природу этой решетки и связь с метрической изотонией.

• Решетка  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}_\Omega^m}$  из  $\mathfrak{L}_\Omega^m$ -значных функций содержит замкнутое множество  $\overline{I_\star \mathfrak{L}_\Omega^m}$ , для которого имеем

$$\text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Omega^m} = \{a_\star^x \mid x \in \Omega\}, \quad a_\star^x(t) := \langle a_x(t) \rangle = \langle x^t \rangle, \quad t \geq 0$$

и, следовательно, есть биекция  $\Omega \ni x \leftrightarrow a_\star^x \in \text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Omega^m}$ . Более того, функция

$$d_\star(a_\star^x, a_\star^y) := 2 \inf \{t > 0 \mid a_\star^x(t) \cap a_\star^y(t) \neq \emptyset\}, \quad a_\star^x, a_\star^y \in \text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Omega^m}$$

оказывается метрикой, выполнено равенство  $d_\star(a_\star^x, a_\star^y) = d(x, y)$  и отображение  $\beta_\star: x \mapsto a_\star^x$  оказывается изометрией из  $\Omega$  на  $\text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Omega^m}$ . В итоге, обозначив  $\Omega_\star := \text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Omega^m}$ , мы получаем  $\beta_\star: (\Omega, d) \rightarrow (\Omega_\star, d_\star)$ . Расстояние  $d_\star$  определяет риманову структуру на множестве  $\Omega_\star$ , превращая последнее в изометрическую копию (модель) исходного риманова многообразия  $\Omega$ .

Мы называем  $(\Omega_\star, d_\star)$  *метрической волновой моделью* многообразия  $\Omega$  [4, 5]. Позже станет ясно, что такая терминология вполне мотивирована.

*Гильбертовы решетки.* • Пусть  $\mathfrak{L}$  есть решетка (замкнутых) подпространств гильбертова пространства  $\mathcal{H} = L_{2, \mu}(\Omega)$  с операциями

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \overline{\mathcal{A} + \mathcal{B}} \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}, \quad \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{A},$$

крайними элементами  $0 = \{0\}$  и  $1 = \mathcal{H}$ . Можно показать, что топология порядка на  $\mathfrak{L}$  совпадает с топологией, задаваемой сильной сходимостью соответствующих ортогональных проекторов:  $\mathcal{A}_\alpha \xrightarrow{o} \mathcal{A} \Leftrightarrow P_{\mathcal{A}_\alpha} \rightarrow P_{\mathcal{A}}$ . Подпространства вида  $\mathcal{H}\langle \omega \rangle := \{\chi_\omega y \mid y \in \mathcal{H}\}$ , где  $\omega \subset \Omega$

– измеримое множество, а  $\chi_\omega$  его характеристическая функция, назовем *локальными*. Для  $\omega \sim \omega'$  справедливо  $\mathcal{H}\langle\omega\rangle = \mathcal{H}\langle\omega'\rangle$ , так что локальное подпространство определяется классом эквивалентности  $\langle\omega\rangle$ . И обратно, из  $\mathcal{H}\langle\omega\rangle = \mathcal{H}\langle\omega'\rangle$  следует  $\omega \sim \omega'$ .

Множество

$$\mathfrak{L}_\Omega^h := \{\mathcal{H}\langle G \rangle \mid \langle G \rangle \in \mathfrak{L}_\Omega^m\}$$

является топологически замкнутой подрешеткой решетки  $\mathfrak{L}$ , которая инвариантна относительно изотонии

$$I_\dagger = \{i_\dagger^t\}_{t \geq 0}, \quad i_\dagger^t: \mathcal{H}\langle G \rangle \mapsto \mathcal{H}\langle G^t \rangle. \quad (2)$$

Индекс  $h$  указывает на гильбертову основу конструкции.

**Предложение 1.** [5] *Отображение  $\theta: \langle G \rangle \mapsto \mathcal{H}\langle G \rangle$  есть изоморфизм решеток из  $\mathfrak{L}_\Omega^m$  на  $\mathfrak{L}_\Omega^h$ : оно сохраняет все решеточные операции и сплетает изотонии:  $\theta I_\star = I_\dagger \theta$ .*

Обозначим  $\Omega_\dagger := \overline{\text{At } I_\dagger \mathfrak{L}_\Omega^h}$ . Изоморфизм решеток определяет каноническое соответствие атомов:

$$\Omega_\star \ni a_x^\star \leftrightarrow a_x^\dagger \in \Omega_\dagger: \quad a_x^\star(t) = \langle x^t \rangle, \quad a_x^\dagger(t) = \mathcal{H}\langle x^t \rangle, \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Принимая  $d_\dagger(a^\dagger, b^\dagger) := 2 \inf\{t > 0 \mid a_x^\dagger(t) \cap b_x^\dagger(t) \neq 0_{\mathcal{H}}\}$ , мы получаем изометричные многообразия

$$(\Omega_\dagger, d_\dagger) \leftrightarrow (\Omega_\star, d_\star) \leftrightarrow (\Omega, d) \quad (3)$$

или, точнее говоря, две изометрические копии  $(\Omega_\dagger, d_\dagger)$  и  $(\Omega_\star, d_\star)$  оригинала  $(\Omega, d)$ . Отображение  $\beta_\dagger: x \mapsto a_x^\dagger$  есть изометрия  $\Omega$  на  $\Omega_\dagger$ . В дальнейшем мы будем называть  $(\Omega_\dagger, d_\dagger)$  *гильбертовой волновой моделью* многообразия  $\Omega$ .

*Простые многообразия.* • Вернемся к метрическим решеткам в  $\Omega$ . Семейство расширяющихся окрестностей  $\gamma := \{\Gamma^t\}_{t > 0}$  (см. (1)) будем называть *граничным гнездом*. Свойства риманова объема обеспечивают равенство  $\mu(\partial\Gamma^t) = 0$ , из чего следует вложение  $\gamma^m := \{\{\Gamma^t\}\}_{t > 0} \subset \mathfrak{L}_\Omega^m$ .

Обозначим символом  $\mathfrak{L}_\Gamma^m := \sqcup \gamma^m$  подрешетку в  $\mathfrak{L}_\Omega^m$ , порожденную граничным гнездом.

**Определение 1.** *Многообразие  $\Omega$  называется простым, если семейство множеств  $\{G \mid \langle G \rangle \in \mathfrak{L}_\Gamma^m\}$  является базой метрической топологии в  $\Omega$ .*

По этому определению, для любого  $x \in \Omega$  и (произвольно малого)  $\varepsilon > 0$  найдется открытое множество  $G \in \langle G \rangle \in \mathfrak{L}_\Gamma^m$ , такое, что выполнено  $x \in G$  и  $\text{diam } G < \varepsilon$ . Из этого следует  $\text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Gamma^m} = \text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Omega^m} = \Omega_\star$ .

Очевидным препятствием к простоте многообразия  $\Omega$  являются симметрии. Например, если  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = R\}$  - шар, то, как легко проверить, его метрическая копия  $(\Omega_\star, d_\star)$  изометрична отрезку  $[0, R] \subset \mathbb{R}$ . В то же время, на римановом многообразии шар  $x^r \subset \Omega$  радиуса меньше, чем радиус инъективности в  $x$ , может иметь тривиальную группу симметрий, но его метрическая копия опять же изометрична отрезку  $[0, r]$ . Треугольник  $T \subset \mathbb{R}^2$  с попарно различными длинами сторон - простой: его метрическая копия изометрична ему самому.

- Наметим схему, по которой копии (3) используются для последующего восстановления  $\Omega$ . Многообразие  $\Omega$  предполагается *простым*.

Пусть нам даны  $\gamma^m$  и  $I_\star$ . Метрическую копию  $\Omega$  мы восстановим по следующей схеме

$$\gamma^m, I_\star \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{L}_\Gamma^m \Rightarrow \text{At } \overline{I_\star \mathfrak{L}_\Gamma^m} \Rightarrow (\Omega_\star, d_\star).$$

Введем обозначение  $\gamma^h := \theta \gamma^m = \{\mathcal{H} \langle \Gamma^t \rangle\}_{t \geq 0} \subset \mathfrak{L}_\Omega^h = \theta \mathfrak{L}_\Omega^m$ . Гильбертову копию можно построить, воспроизводя предыдущую схему:

$$\gamma^h, I_\dagger \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{L}_\Gamma^h \Rightarrow \text{At } \overline{I_\dagger \mathfrak{L}_\Gamma^h} \Rightarrow (\Omega_\dagger, d_\dagger).$$

Гильбертова копия имеет инвариантную природу в следующем смысле. Пусть  $U: \mathcal{H} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$  - унитарный оператор. В  $\widetilde{\mathcal{H}}$  есть объекты двойственные объектам в  $\mathcal{H}$ :  $\widetilde{\gamma}^h = U \gamma^h = \{U \mathcal{H} \langle \Gamma^t \rangle\}_{t \geq 0}$ ,  $\widetilde{I}_\dagger = U I_\dagger U^*$ ,  $\widetilde{\mathfrak{L}}_\Gamma^h = \sqcup \widetilde{\gamma}^h$  и так далее. Используя их, можно построить изометричную копию исходного  $\Omega$  следующим образом:

$$\widetilde{\gamma}^h, \widetilde{I}_\dagger \xrightarrow{\sqcup} \widetilde{\mathfrak{L}}_\Gamma^h \Rightarrow \text{At } \overline{\widetilde{I}_\dagger \widetilde{\mathfrak{L}}_\Gamma^h} \Rightarrow (\widetilde{\Omega}_\dagger, \widetilde{d}_\dagger) \stackrel{\text{isom}}{=} (\Omega, d). \quad (4)$$

Именно эта схема будет использована для восстановления многообразия: в нашем распоряжении окажется конкретное  $\widetilde{\mathcal{H}}$  вместе с гнездом  $\widetilde{\gamma}^h$  и изотонией  $\widetilde{I}_\dagger$ , что определит отправную точку процедуры (4).

Мы называем  $(\widetilde{\Omega}_\dagger, \widetilde{d}_\dagger)$  гильбертовой волновой моделью  $\Omega$  в  $U$ -представлении.



## §2. ДИНАМИКА

*Операторы.* Напомним, что  $\mathcal{H} = L_{2,\mu}(\Omega)$ . Пусть  $L_0 := -\Delta \upharpoonright H_0^2(\Omega) = -\Delta \upharpoonright C_0^\infty(\Omega)$  есть *минимальный* оператор Лапласа–Бельтрами в  $\mathcal{H}$ . Это симметрический (но не самосопряженный) положительно определенный оператор: выполнено  $(L_0 y, y) \geq \nu \|y\|^2$  с  $\nu > 0$  для  $y \in \text{Dom } L_0$ ; его индексы дефекта суть  $n^\pm = \infty$ . Для его расширения по Фридрихсу  $L := -\Delta \upharpoonright [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$  выполняется  $L = L^*$  и  $(Ly, y) \geq \nu \|y\|^2$ . Сопряженный к нему есть *максимальный* лапласиан  $L_0^* = -\Delta \upharpoonright [\text{Dom } L \dot{+} \mathcal{H}]$ , где

$$\mathcal{K} := \text{Ker } L_0^* = \{y \in \mathcal{H} \mid \Delta y = 0 \text{ в } \Omega \setminus \Gamma\}$$

– подпространство гармонических функций,  $\dim \mathcal{K} = n^\pm = \infty$ . Таким образом, имеем тройку операторов

$$L_0 \subset L \subset L_0^*. \quad (5)$$

*Система  $\alpha$ .* • С этими операторами связана динамическая система  $\alpha$  вида

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в } (\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbb{R}_+; \quad (6)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (7)$$

$$u = f \quad \text{на } \Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+}; \quad (8)$$

где  $t$  – время;  $\Delta$  – оператор Лапласа–Бельтрами в  $\Omega$ ,  $f$  – *граничное управление*. Символом  $u = u^f(x, t)$  обозначим его решение (*волну*). Для гладких управлений  $f \in C^\infty(\Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+})$ , аннулирующихся вблизи  $t = 0$ , решение  $u^f$  единственно и является классическим. Как известно, соответствие  $f \mapsto u^f(\cdot, t)$  непрерывно из  $L_{2,d\Gamma}(\Gamma \times [0, t])$  в  $\mathcal{H}$  для всех  $t > 0$ , где  $d\Gamma$  – элемент границы, индуцированный римановым объемом  $\mu$ . Отметим, что гладкие управления плотны в  $L_{2,d\Gamma}(\Gamma \times [0, t])$  для всех  $t > 0$ .

• Множества  $\mathcal{U}^t := \{u^f(\cdot, t) \mid f \in L_{2,d\Gamma}(\Gamma \times [0, t])\}$  ( $t > 0$ ) называются *достижимыми*. Следующий факт играет ключевую роль в нашем подходе к обратной задаче.

**Предложение 2.** *Справедливо равенство*

$$\overline{\mathcal{U}^t} = \mathcal{H}\langle \Gamma^t \rangle, \quad t > 0 \quad (9)$$

(см. [2]). Оно основано на фундаментальной теореме Хольмгрена–Йона–Татару о единственности продолжения решений гиперболического уравнения через нехарактеристическую поверхность. Это равенство интерпретируется как свойство *локальной приближенной граничной управляемости системы*  $\alpha$  или как полнота волн в заполняемой ими области. В силу компактности  $\Omega$  последнее означает, что  $\overline{\mathcal{U}^t} = \mathcal{H}$  при  $t \geq T_*$ .

*Волновое гнездо.* Семейство расширяющихся подпространств  $\gamma^w := \{\overline{\mathcal{U}^t}\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{H}$  называется *волновым гнездом*. Из тождества (9) следует совпадение гнезд:

$$\gamma^w = \gamma^h. \quad (10)$$

Подготовим представление волнового гнезда, удобное для дальнейшего использования.

Запишем волновое уравнение (6) в операторной форме:  $u_{tt} + L_0^* u = 0$  в  $\mathcal{H}$ . Управление  $f$  в (8) определяет гармоническую ( $\mathcal{K}$ -значную) функцию  $\check{f}$ , которая зависит от времени как параметра и удовлетворяет системе

$$\Delta \check{f}(\cdot, t) = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \Gamma; \quad \check{f}(\cdot, t)|_{\Gamma} = f(\cdot, t), \quad t \geq 0.$$

Представляя  $u = \check{f} + w$ , с учетом (5) получим  $w_{tt} + Lw = -\check{f}_{tt}$ . Интегрирование последнего уравнения дает

$$u^f(\cdot, t) = \check{f}(\cdot, t) - L^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \check{f}_{tt}(\cdot, s) ds \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad \check{f}(\cdot, t) \in \mathcal{K}.$$

В результате получаем представление в  $\mathcal{H}$ ;

$$\begin{aligned} \gamma^w &= \{\overline{\mathcal{U}^t}\}_{t \geq 0}; \quad \mathcal{U}^t = \{u^h(\cdot, t) \mid h \in C^\infty([0, t]; \mathcal{K}), \text{ supp } h \subset (0, t]\}, \\ u^h(\cdot, t) &= h(\cdot, t) - L^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] h_{tt}(\cdot, s) ds, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

в терминах  $\mathcal{H}$ - и  $\mathcal{K}$ -значных функций. После этого, для описания образа волнового гнезда  $\widetilde{\gamma}^w = U\gamma^w$  в пространстве  $\widetilde{\mathcal{H}} = U\mathcal{H}$  достаточно

снабдить соответствующие члены из (11) значком "тильда":

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^w &= \{\tilde{\mathcal{U}}^t\}_{t \geq 0}; \quad \tilde{\mathcal{U}}^t = \{\tilde{u}^h(t) \mid h \in C^\infty([0, t]; \tilde{\mathcal{H}}), \text{supp } h \subset (0, t]\}, \\ \tilde{u}^h(t) &= h(t) - \tilde{L}^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)\tilde{L}^{\frac{1}{2}}] h_{tt}(s) ds \quad \text{в } \tilde{\mathcal{H}}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

*Волновая изотония.* • Рассмотрим еще одну связанную с многообразием динамическую систему

$$v_{tt} - \Delta v = \psi \quad \text{в } (\Omega \setminus \Gamma) \times \mathbb{R}_+; \quad (13)$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega; \quad (14)$$

$$v = 0 \quad \text{на } \Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+}; \quad (15)$$

с *объемным управлением*  $\psi = \psi(x, t)$ ; символом  $v = v^\psi(x, t)$  обозначим ее решение. Для гладких  $\psi$ , обращающихся в нуль вблизи  $t = 0$ , решение  $v^\psi$  единственно и является классическим. Рассматривая  $\psi$  и  $v^\psi$  как  $\mathcal{H}$ -значные функции времени, имеем систему

$$v_{tt} + Lv = \psi \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad t > 0; \quad (16)$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathcal{H}; \quad (17)$$

и ее решение в хорошо известной форме

$$v^\psi(t) = L^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}] \psi(s) ds \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad t \geq 0. \quad (18)$$

Правая часть этого представления корректно определена для  $\psi \in L_2([0, t]; \mathcal{H})$ ; ее считаем обобщенным решением системы (13)–(17).

• Мы говорим что управление  $\psi$  действует из подпространства  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$  если  $\psi(t) \in \mathcal{A}$  выполнено для всех  $t \geq 0$ . Множество

$$\mathcal{V}_{\mathcal{A}}^t := \{v^\psi(t) \mid \psi \in L_2([0, t]; \mathcal{A})\}, \quad t > 0 \quad (19)$$

называем достижимым из  $\mathcal{A}$  в момент  $t$ .

Аналогом свойства (9) является *локальная управляемость*, которая также выводится из теоремы Хольмгрена–Йона–Татару.

**Предложение 3.** *Если  $G \subset \Omega$  – открытое множество и  $\mu(\partial G) = 0$ , то выполнено*

$$\overline{\mathcal{V}_{\mathcal{H}\langle G \rangle}^t} = \mathcal{H}\langle G^t \rangle, \quad t > 0 \quad (20)$$

- Напомним, что  $\mathfrak{L}$  есть решетка подпространств пространства  $\mathcal{H}$ . Отображение  $\mathcal{A} \mapsto \overline{\mathcal{V}_{\mathcal{A}}^t}$  очевидно изотонно относительно  $\mathcal{A}$  и монотонно по  $t$ . Следовательно, мы имеем *волновую изотонию*

$$I_w = \{i_w^t\}_{t \geq 0}, \quad i_w^t: \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathcal{V}_{\mathcal{A}}^t}, \quad (21)$$

определенную на *всей* решетке  $\mathfrak{L}$ .

Условия в Предложении 3 означают, что выполнено  $G \in \langle G \rangle \in \mathfrak{L}_{\Omega}^h$ . Сравнивая (21) с (2) и учитывая (20), мы приходим к заключению, что Предложение 3 влечет равенство

$$I_{\dagger} = I_w \upharpoonright \mathfrak{L}_{\Omega}^h. \quad (22)$$

Равенство (22) вместе с (10) приводит к следующей схеме восстановления простого многообразия:

$$\gamma^w, I_w \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{L}_{\Gamma}^h \Rightarrow \text{At } \overline{I_w \mathfrak{L}_{\Gamma}^h} \Rightarrow (\Omega_{\dagger}, d_{\dagger}) \stackrel{\text{isom}}{=} (\Omega, d). \quad (23)$$

- Пусть заданы пространство  $\widetilde{\mathcal{H}} = U\mathcal{H}$  и оператор  $\widetilde{L} = ULU^*$ . В таком случае мы можем определить изотонию  $\widetilde{I}_w = \Phi I_w \Phi^*$  в  $\widetilde{\mathcal{H}}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_w &= \{\widetilde{i}_w^t\}_{t \geq 0}, \quad \widetilde{i}_w^t: \mathcal{B} \mapsto \overline{\mathcal{V}_{\mathcal{B}}^t} (\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{H}}), \\ \widetilde{\mathcal{V}_{\mathcal{B}}^t} &\stackrel{(19)}{=} \{\widetilde{v}^{\psi}(t) \mid \psi \in L_2([0, t]; \mathcal{B})\}, \\ \widetilde{v}^{\psi}(t) &\stackrel{(18)}{=} \widetilde{L}^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)\widetilde{L}^{\frac{1}{2}}] \psi(s) ds. \end{aligned} \quad (24)$$

Наконец, если в нашем распоряжении имеется некоторое  $\widetilde{\mathcal{H}} = U\mathcal{H}$  вместе с гнездом  $\widetilde{\gamma}^w = U\gamma^w$  и изотонией  $\widetilde{I}_w = UI_wU^*$ , то восстановить простое многообразие можно по схеме (23):

$$\widetilde{\gamma}^w, \widetilde{I}_w \xrightarrow{\sqcup} \widetilde{\mathfrak{L}}_{\Gamma}^h \Rightarrow \text{At } \overline{\widetilde{I}_w \widetilde{\mathfrak{L}}_{\Gamma}^h} \Rightarrow (\widetilde{\Omega}_{\dagger}, \widetilde{d}_{\dagger}) \stackrel{\text{isom}}{=} (\Omega, d). \quad (25)$$

### §3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ

*Спектральное представление.* Спектральная задача Дирихле в  $\Omega$  состоит в нахождении ненулевых решений системы

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \lambda \phi & \text{в } \Omega \setminus \Gamma; \\ \phi = 0 & \text{на } \Gamma, \end{cases}$$

что равносильно решению уравнения  $L\phi = \lambda\phi$  в  $\mathcal{H}$ . Пусть  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$  – спектр задачи (оператора  $L$ ) и  $\phi_1, \phi_2, \dots$  суть соответствующие собственные функции, нормированные условием  $(\phi_k, \phi_l) = \delta_{kl}$ .

Пусть  $\Phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{I}_2 =: \widetilde{\mathcal{H}}$ ,

$$\Phi y = \widetilde{y} := \{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad c_k = (y, \phi_k),$$

есть преобразование Фурье, представляющее  $L$  в виде  $\widetilde{L} := \Phi L \Phi^* = \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ .

Подпространство  $\widetilde{\mathcal{K}} = \Phi \mathcal{K}$  является подпространством гармонических функций в спектральном представлении.

*Процедура восстановления.* Предположим, что заданы спектр  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  и подпространство  $\widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathbf{I}_2$ . Пусть  $(\Omega, d)$  – простое многообразие. Тогда оно (точнее, его изометрическая копия) может быть построено по следующей схеме:

*Шаг 1.* Полагая  $U = \Phi$ , определим граничное гнездо  $\widetilde{\gamma}^w$ , используя (12).

*Шаг 2.* Найдем изотонию  $\widetilde{I}_w$ , используя (24).

*Шаг 3.* Построим гильбертову волновую копию  $(\widetilde{\Omega}_\dagger, \widetilde{d}_\dagger)$  по схеме (25).

*Комментарии.* • Возможный способ задать спектральный образ  $\widetilde{\mathcal{K}}$  гармонического подпространства  $\mathcal{K}$  таков: выберем базис  $h_1, h_2, \dots$  в  $\mathcal{H}$ , составим матрицу  $\varkappa := \{(h_i, \phi_k)\}_{i,k \geq 1}$  и затем определим  $(\widetilde{\Omega}_\dagger, \widetilde{d}_\dagger)$  по  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  и  $\varkappa$ . Этот прием не предполагает знания границы  $\Gamma$  и, следовательно, допустим при решении задачи М. Каца. Приведем соображения, мотивирующие его использование.

Рассмотрим классическую обратную задачу об определении плотности неоднородной струны  $\rho = \rho(x) > 0$  по спектральным данным  $\{\lambda_k; \nu_k\}_{k \geq 1}$ . Эти данные состоят из спектра  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  задачи

$$\begin{cases} -\rho^{-1}\phi'' = \lambda\phi & \text{в } (0, 1); \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

и постоянных  $\nu_k = \phi_k'(0)$ , где  $\phi_k$  суть собственные функции, нормированные условием  $(\phi_i, \phi_k) = \delta_{ik}$  в  $\mathcal{H} = L_{2, \rho}(0, 1)$ . С задачей связаны

операторы

$$L_0 = -\rho^{-1}(\cdot)'' \upharpoonright \{y \in H^2[0, 1] \mid y(0) = y'(0) = y(1) = 0\},$$

$$L = -\rho^{-1}(\cdot)'' \upharpoonright \{y \in H^2[0, 1] \mid y(0) = y(1) = 0\},$$

$$L_0^* = -\rho^{-1}(\cdot)'' \upharpoonright \{y \in H^2[0, 1] \mid y(1) = 0\},$$

составляющие тройку  $L_0 \subset L \subset L_0^*$  (см. (5)). Релевантное “подпространство гармонических функций” есть  $\mathcal{K} = \text{Ker } L_0^* = \text{span } \{h\}$ ,  $h(x) := 1 - x$ ;  $\dim \mathcal{K} = 1$ . В то же время, имеем:

$$(h, \phi_k) = \int_0^1 (1-x) \phi_k(x) \rho(x) dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 (1-x) \phi_k''(x) dx = \frac{\phi_k'(0)}{\lambda_k}.$$

Поэтому  $\nu_k = \lambda_k(h, \phi_k)$ , так что вместо  $\{\nu_k\}_{k \geq 1}$  можно задать строку  $\{\varkappa_k\}_{k \geq 1}$ ,  $\varkappa_k := (h, \phi_k)$  и оперировать данными  $\{\lambda_k; \varkappa_k\}_{k \geq 1}$ .

В силу сказанного, представляется естественным в многомерном случае считать набор (числовой массив)  $\{\lambda_k; \{\varkappa_{ik}\}_{i \geq 1}\}_{k \geq 1}$  с  $\varkappa_{ik} = (h_i, \phi_k)$  версией спектральных данных, адекватной задаче М. Каца.

- Изоспектральные барабаны суть барабаны с одинаковым спектром  $\sigma(L) = \{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ . Как показывают предыдущие рассмотрения, они различаются положением гармонического подпространства  $\mathcal{K}$  относительно собственного базиса оператора  $L$ . Поэтому любая информация об этом положении может быть полезна для восстановления. К примеру, какая-то информация содержится в *угловом спектре* подпространства  $\mathcal{K}$  – последовательности  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ ,  $\alpha_k := \|P_{\mathcal{K}} \phi_k\|$ , где  $P_{\mathcal{K}}$  проектирует в  $\mathcal{K}$  на  $\mathcal{K}$ . Он не фиксирует  $\mathcal{K}$  однозначно, но сокращает запас  $\mathcal{K}$ , отвечающих данному спектру.

- Пусть мы располагаем спектральным представлением  $\tilde{L}_0 = \Phi L_0 \Phi^*$  минимального Лапласиана (см. (5)). Тогда вместе с ним мы имеем операторы  $\tilde{L}$  (как расширение по Фридрихсу оператора  $\tilde{L}_0$ ) и  $\tilde{L}_0^*$  (как его сопряженный). Далее мы находим  $\sigma(\tilde{L}) = \sigma(L)$  и  $\tilde{\mathcal{K}} = \text{Ker } \tilde{L}_0^*$ . В результате мы получаем данные  $\sigma(L), \tilde{\mathcal{K}}$ , которые уже определяют  $\Omega$ .

Чтобы использовать этот прием, достаточно иметь оператор  $L_0$  в *любом* представлении. В силу последнего, наша техника позволяет восстановить многообразие по характеристической оператор-функции оператора  $L_0$  (см., например, [11]) и по любым другим данным, которые определяют  $L_0$  с точностью до унитарной эквивалентности.

*Гипотеза.* • Пусть  $A_0 \subset A_0^*$  есть симметрический оператор в  $\mathcal{H}$ , такой, что выполнено  $\overline{\text{Dom } A_0} = \mathcal{H}$  и  $(A_0 y, y) \geq \nu \|y\|^2$  ( $\nu > 0$ ). Оператор  $A_0$  имеет экстремальные самосопряженные расширения  $A_M$  и  $A_\mu$  по Крейну и Фридрихсу соответственно (см., например, [7, 9]). В нашем подходе к задаче М. Каца важен следующий факт теории операторов.

**Предложение 4.** *Пара  $A_M, A_\mu$  однозначно определяет  $A_0$ .*

**Доказательство.** Напомним хорошо известные факты и соотношения:

$$\text{Dom } A_M = \text{Dom } A_0 \dot{+} \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} := \text{Ker } A_0^* = \text{Ker } A_M;$$

$$\text{Dom } A_\mu = \text{Dom } A_0 \dot{+} A_\mu^{-1} \mathcal{K}.$$

В силу  $\text{Ran } A_0 = \mathcal{H} \ominus \text{Ker } A_0^* = \mathcal{H} \ominus \text{Ker } A_M = \mathcal{H} \ominus \mathcal{K}$ , из соотношения  $A_0 \subset A_\mu$  следует

$$\text{Dom } A_0 = A_0^{-1} \text{Ran } A_0 = A_0^{-1}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{K}) = A_\mu^{-1}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{K})$$

( $A_0^{-1}$  это обратный на образе) и, далее,

$$A_0 = A_0 \upharpoonright \text{Dom } A_0 = A_\mu \upharpoonright \text{Dom } A_0 = A_\mu \upharpoonright A_\mu^{-1}(\mathcal{H} \ominus \text{Ker } A_M). \quad (26)$$

□

Из (26) имеем

**Следствие 1.** *Оператор  $A_0$  ( $u$ , тем самым,  $A_0^*$ ) определяется парой  $A_\mu, \mathcal{K}$ .*

Анализируя схему (25), легко видеть, что именно это последнее утверждение, примененное к тройке (5), обеспечивает восстановление.

• Теперь сформулируем гипотезу. Пусть  $A_0$  и  $A'_0$  суть плотно заданные замкнутые симметрические положительно определенные операторы в  $\mathcal{H}$ . Пусть  $A_M, A_\mu$  и  $A'_M, A'_\mu$  – их экстремальные самосопряженные расширения.

**Гипотеза 1.** *Пусть существуют унитарные операторы  $V$  и  $W$ , такие, что выполнено  $VA_\mu = A'_\mu V$  и  $WA_M = A'_M W$ . Тогда справедливы равенства  $V = W =: U$  и  $UA_0 = A'_0 U$ .*

Если гипотеза верна, то при выполнении ее условий все положительные расширения  $A_0$  и  $A'_0$  сплетаются одним унитарным оператором  $U$ . Кроме того, из соотношений  $A_\mu = A'_\mu$  и  $UA_M = A'_M U$  следует  $U = \mathbb{I}$ , поэтому  $A_M = A'_M$  и  $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ .

• Пусть у расширений  $A_\mu$  и  $A_M$  оператора  $A_0$  спектры  $\sigma(A_\mu)$  и  $\sigma(A_M)$  дискретны. Спектры определяют расширения с точностью до унитарной эквивалентности. Предположим, что Гипотеза 1 верна. Тогда, если  $\sigma(A_\mu) = \sigma(A'_\mu)$  и  $\sigma(A_M) = \sigma(A'_M)$ , то операторы  $A_0$  и  $A'_0$  унитарно эквивалентны, и мы получаем  $A'_0 = UA_0U^*$  и  $\mathcal{K}' = U\mathcal{K}$ .

Применительно к задаче М. Каца, это позволило бы восстановить простое многообразие по двум спектрам  $\sigma(L)$  и  $\sigma(L_M)$ , где  $L_M$  – крейновское расширение минимального лапласиана  $L_0$  (см. (5)). Подобная ситуация имеет место в одномерном случае, упомянутом выше в Комментариях. В нем мы имеем

$$L_M y = -\rho^{-1} y'' \upharpoonright \{y \in H^2[0, 1] \mid y(0) + ly'(0) = 0, y(1) = 0\},$$

и плотность  $\rho$  восстанавливается по двум спектрам, соответствующим различным граничным условиям при  $x = 0$ .

В многомерном случае возможность использовать в качестве дополнения к спектру  $\sigma(L)$  спектр  $\sigma(L_M)$  вместо матрицы  $\mathcal{K}$  кажется весьма привлекательной.

• Существуют неизометричные барабаны, у которых спектры и задачи Дирихле и задачи Неймана совпадают [8]. Однако, расширение  $L_N$  минимального лапласиана  $L_0$ , отвечающее условиям Неймана  $\partial_n y|_\Gamma = 0$ , не совпадает с его мягким расширением  $L_M$  и, в отличие от последнего, не имеет инвариантного операторного смысла. Мы продолжаем надеяться на Гипотезу 1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. И. Белишев, *К задаче М. Каца о восстановлении формы области по спектру задачи Дирихле*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **173** (1988), 30–41.
2. М. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), R1–R45.
3. М. I. Belishev, *A unitary invariant of a semi-bounded operator in reconstruction of manifolds*. — J. Operator Theory **69**, No. 2 (2013), 299–326.
4. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрических пространств*. — Функц. анализ и его прил. **53**, No. 2 (2019), 3–10.
5. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель метрического пространства с мерой и ее приложение*. — Матем. Сб. **211**, No. 4 (2020), 44–62.
6. Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Москва, Наука (1984).
7. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. Лань (2010).



8. P. Buser, J. Conway, K. D. Semmler, *Some planar isospectral domains*. — Int. Math. Res. Notices **9** (1994), 391–400.
9. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи*. — Труды института математики НАН Украины **104** (2017).
10. O. Giraud, K. Shas, *Hearing shapes of drums – mathematical and physical aspects of isospectrality*. — Reviews of Modern Physics **82** (2010), 2213–2255.
11. А. В. Штраус, *Функциональные модели и обобщенные спектральные функции симметрических операторов*. — Алгебра и Анализ **16**, No. 5 (1999), 1–76.

Belishev M. I., Vakulenko A. F. On the M. Kac problem with augmented data.

Let  $\Omega$  be a bounded plane domain. As is known, the spectrum  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$  of its Dirichlet Laplacian  $L = -\Delta \upharpoonright [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$  does not determine  $\Omega$  (up to isometry). By this, a reasonable version of the M. Kac problem is to augment the spectrum with relevant data that provide the determination.

To give the spectrum is to represent  $L$  in the form  $\tilde{L} = \Phi L \Phi^* = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \}$  in the space  $\mathbf{l}_2$ , where  $\Phi: L_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{l}_2$  is the Fourier transform. Let  $\mathcal{H} = \{h \in L_2(\Omega) \mid \Delta h = 0 \text{ into } \Omega\}$  be the harmonic function subspace,  $\tilde{\mathcal{H}} = \Phi \mathcal{H} \subset \mathbf{l}_2$ . We show that, in a generic case, the pair  $\tilde{L}, \tilde{\mathcal{H}}$  determines  $\Omega$  up to isometry, what holds not only for the plain domains (drums) but for the compact Riemannian manifolds of arbitrary dimension, metric, and topology. Thus, the subspace  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathbf{l}_2$  augments the spectrum, making the problem uniquely solvable.

С.-Петербургское Отделение  
Математического Института  
им. В. А. Стеклова, РАН  
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru  
vak@pdmi.ras.ru

Поступило 6 августа 2024 г.