Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 536, 2024 г.

Д. Е. Апушкинская, С. Б. Тихомиров, Н. Н. Уральцева

СВОЙСТВА МЕЖФАЗОВОЙ ГРАНИЦЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

§1. Введение

Рассматривается задача со свободной границей, описываемая уравнением теплопроводности с разрывной правой частью

$$\partial_t u - \Delta u = f(u). \tag{1.1}$$

В данной статье мы будем рассматривать нелокальную правую часть (1.1) $f = f(u)$, порождаемую разрывным оператором гистерезиса[1].

В простейшей модели гистерезиса заданы два пороговых значения $\alpha < 0$ и $\beta > 0$. Если уравнение (1.1) описывает тепловой процесс, то при $u \geqslant \beta$ возможен только режим охлаждения, а при $u \leqslant \alpha$ возможен только режим нагревания. Отметим, что при $\alpha < u(x,t) < \beta$ процесс может находиться в любом из указанных режимов. Мы будем называть эти режимы "фазами": фазой I при $u \leqslant \alpha$ и фазой II при $u \geqslant \beta$.

Фаза II меняется на I, если решение u, убывая, достигает порогового значения α, и наоборот фаза I меняется на фазу II, если решение u, возрастая, достигает порогового значения β. Таким образом явление гистерезиса заключается в свойстве процессов (физических, биологических, социологических и т. д.), откликаться на приложенное к ним воздействие в зависимости от их текущего состояния. Фактически поведение описываемой системы на интервале времени существенно зависит от её предыстории.

Таким образом, область переменных (x,t), которую мы рассматриваем, разбивается на два заранее неизвестных множества, а граница

Ключевые слова: гистерезис, параболическое уравнение, межфазовая граница, трансверсальность, разрешимость.

Сергей Тихомиров благодарен за поддержку Coordenacao de Aperfeicoamento de Pessoal de Nivel Superior- Brasil (CAPES)- 23038.015548/2016-06, CNPq грант 404123/2023-6 и FAPERJ APQ1 E-26/210.702/2024 (295291).

[1]В переводе с греческого "гистерезис" означает отставание, запаздывание.

раздела фаз является свободной границей. Если бы межфазовая граница была известна, то задача стала бы стандартной – нужно найти решение уравнения теплопроводности с известной ограниченной правой частью и заданными начально-краевыми условиями. Поэтому основная трудность состоит в исследовании характера поведения свободной границы.

Оператор гистерезиса применяется в математических описаниях различных физических, химических и биологических процессов: терморегуляции, химических реакторов, ферромагнетизма, самоорганизации и других (см. монографии [1, 2, 3]). Уравнение (1.1) с разрывным оператором гистерезиса в правой части было впервые использовано в [4] при моделировании роста колонии бактерий (Salmonella typhimurium). В работах [4, 5] был проведен численный анализ построенной модели, однако строгого обоснования предложено не было. Далее, аналогичные модели возникали при описании ряда биологических, технологических и химических процессов (см., например, [6, 7] и приведенные в них исторические обзоры и библиографию). Из-за разрывной природы гистерезиса вопрос о корректности постановки задачи (1.1) нетривиален. Обычно рассматривается регуляризация оператора гистерезиса многозначным отображением. Это позволяет доказать существование решения [8, 9, 10]; однако вопрос единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных остаётся открытым [11].

В работе [12] для одномерного случая $x \in \Omega = (0,1)$ на достаточно малом промежутке времени $[0,T]$ доказана разрешимость в $W_q^{2,1}(Q_T)$, $q > 3$, задачи о гистерезисе

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u = \mathcal{H}(u) \quad &\text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T], \\ \partial_x u = 0 \quad &\text{на} \quad S_T = \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad &\text{в} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где известная функция $\varphi \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ удовлетворяет условию трансверсальности (см. ниже) и условиям согласования $\partial_x\varphi(0) = \partial_x\varphi(1) = 0$, а также полностью задано распределение по фазам: при $\varphi(x) \leqslant \alpha$ процесс находится в фазе I, при $\varphi(x) \geqslant \beta$ в фазе II, а при $\alpha < \varphi(x) < \beta$ начальные фазы можно задавать произвольно. Здесь $\mathcal{H}(u)$ – значение оператора гистерезиса на $u(x,t)$, которое в соответствии с описанием данным ранее, однозначно определяется следующим образом. При $t=0$ распределение фаз нам известно, поэтому положим $\mathcal{H}(u(x,0)) = 1$

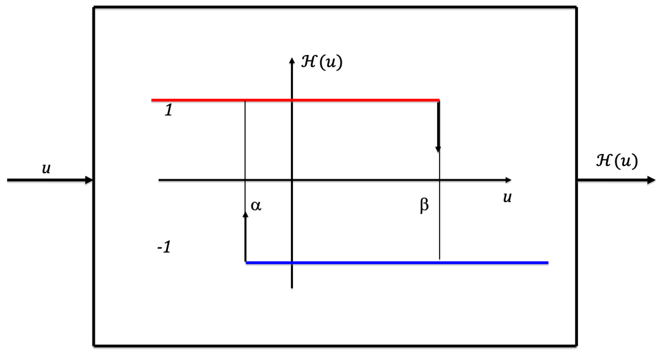

Рис. 1. Оператор гистерезиса $\mathcal{H}(u)$.

в фазе I и $\mathcal{H}(u(x,0)) = -1$ в фазе II соответственно. Далее положим[2]

$$\mathcal{H}(u(x,t)) = \begin{cases} 1, & u(x,t) \leqslant \alpha, \\ -1, & u(x,t) \geqslant \beta. \end{cases} \tag{1.3}$$

Обозначим теперь через E множество

$$E = \{(x,t) \in Q_T : u(x,t) \leqslant \alpha\} \cup \{(x,t) \in Q_T : u(x,t) \geqslant \beta\} \cup (\Omega \times \{0\})\,.$$

Далее, при $(x,t) \in \overline{Q}_T \setminus E$ положим

$$\mathcal{H}(u(x,t)) = \mathcal{H}(u(x,\tau(x))), \tag{1.4}$$

где $\tau(x) = \max\{s \leqslant t : (x,s) \in E\}$. Равенство (1.4) означает, что если $u(x,t) \in (\alpha,\beta)$, то оператор гистерезиса принимает те же значения, что и в “предыдущий момент” времени (см. рис. 1).

Согласно определению, если $\mathcal{H}(u(x,t)) = 1$, то $u(x,t)$ находится в фазе I, а если $\mathcal{H}(u(x,t)) = -1$, то $u(x,t)$ находится в фазе II. При этом предполагается непрерывность при данном x значения оператора гистерезиса $\mathcal{H}(u(x,t))$ со стороны бо́льших значений t.

Важными являются введенные авторами [12] условия трансверсальности начальной функции φ. Оно состоит в том, что $|\partial_x\varphi(x)| > 0$ в тех точках $(x,0)$, где меняется начальная фаза и $\varphi(x) \in \{\alpha,\beta\}$. В

[2] Наше определение оператора $\mathcal{H}$ формально отличается от данного в [12], но, как несложно увидеть, эквивалентно ему.

[12] было доказано, что если количество точек переключения фаз при $t = 0$ конечно и выполнено условие трансверсальности, то каждая ветвь межфазовой границы начинается в некоторой точке при $t = 0$ и на некотором малом промежутке времени является графиком гельдеровой функции. Более того, на этом промежутке ветви межфазовой границы не пересекаются. Единственность решения задачи (1.2) с транверсальными начальными данными была установлена в [13]. В работе [14], с помощью методов и подходов теории задач со свободными границами, были исследованы свойства локальной регулярности решений (1.2).

В настоящей работе значительно упрощается по сравнению с [12] доказательство существования решения и гельдеровости межфазовых границ, а также доказывается, что при $\varphi \in W^2_\infty(\Omega)$ каждая ветвь межфазовой границы описывается липшицевой функцией. Конструкция решения будет такая же, как и в [12], новыми являются односторонние оценки разностных отношений по t.

Если начальная функция φ не удовлетворяет условию трансверсальности, то вопрос о корректности постановки задачи (1.2) остается открытым. В работах [15, 16] рассматривалась аппроксимационная задача, основанная на дискретизации пространственной переменной. Было показано, что значения оператора гистерезиса для решения дискретизированной системы образуют сложный паттерн и не имеют предела, когда параметр дискретизации стремится к нулю. В настоящей работе мы показываем, что при нетрансверсальной начальной функции не существует решения, описываемого при помощи межфазовой границы.

Без ограничения общности будем считать, что в точках изменения начальных фаз функция φ принимает одно из пороговых значений α или β. Действительно, если начальная точка межфазовой границы находится далеко от точек, где $\varphi = \alpha$ или $\varphi = \beta$, то на достаточно малом промежутке времени функция u не сможет достигнуть порогового значения. Поэтому граница между фазами будет вертикальной прямой[3], так что соответствующая ветвь межфазовой границы будет задаваться гладкой (постоянной) функцией переменной t. В этом случае доказательство разрешимости задачи (1.2) хорошо известно (см., например, [17, гл. IV]).

[3]Считаем, что ось $0t$ направлена вверх, а ось $0x$ направо.

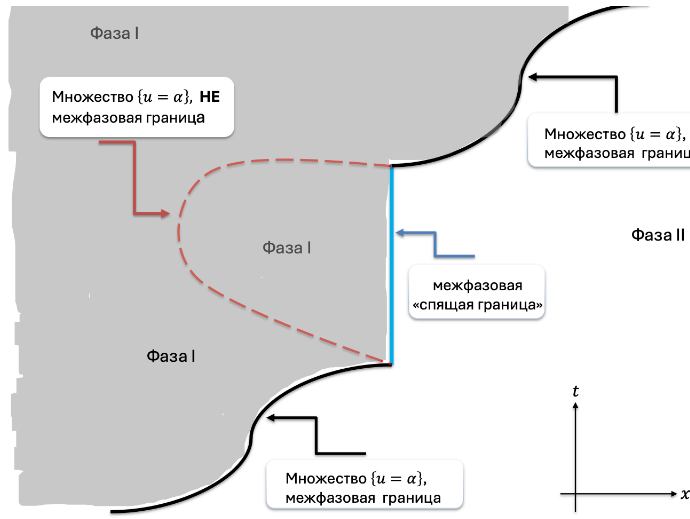

Рис. 2. Возможный вариант структуры межфазовой границы.

В начальный момент времени распределение фаз задано. В дальнейшем, при $t > 0$, расположение фаз, вообще говоря, меняется. Отметим также, что множества уровня $\{u(x,t) = \alpha\}$ и $\{u(x,t) = \beta\}$ не всегда являются частями межфазовой границы. Действительно, множество уровня $\{u = \alpha\}$ может содержаться внутри фазы I, а множество уровня $\{u = \beta\}$ – внутри фазы II. В этом случае межфазовая граница может содержать несколько компонент множеств уровня, соединенные вертикальными отрезками или лучами. Такие вертикальные куски межфазовой границы мы будем называть “спящей границей”. Пример возможной конструкции межфазовой границы приведен на Рис. 2.

Введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи:
$z = (x;t)$ – точка в $\mathbb{R}^2_{x,t}$;
$|z| = \sqrt{|x|^2 + |t|}$ – параболическое расстояние в $\mathbb{R}^2_{x,t}$;
$\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2};$
$\Omega = (0,1), \quad Q_T = \Omega \times [0,T], \quad S_T = \partial\Omega \times (0,T], \quad T \leqslant 1;$

$v_+ = \max\{v(x,t), 0\}, \quad v_- = \min\{v(x,t), 0\}.$

Мы используем стандартные обозначения для функциональных пространств $\mathcal{C}([0,T])$, $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ и $\mathcal{C}(\overline{Q}_T)$. Для ограниченной области $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2_{x,t}$ мы обозначаем через $L^q(\mathcal{E})$, $1 < q \leqslant \infty$, обозначим стандартное пространство Лебега с нормой $\|\cdot\|_{q,\mathcal{E}}$.

$W^{2,1}_q(Q_T)$ – параболическое пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{W^{2,1}_q(Q_T)} = \|\partial_t v\|_{q,Q_T} + \|\Delta v\|_{q,Q_T} + \|v\|_{q,Q_T},$$

а $W^{2-2/q}_q(\Omega)$ и $W^2_\infty(\Omega)$ – пространства следов для $W^{2,1}_q(Q_T)$.

Различные положительные постоянные обозначаются через c и N с индексами или без них. Запись $c(\dots)$ означает, что c зависит только от параметров, указанных в скобках.

Сформулируем ряд известных результатов о линейной задаче, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Рассмотрим линейную задачу

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = f(x,t) & \text{в} \quad Q_T, \\ \partial_x v = 0 & \text{на} \quad S_T, \\ v(x,0) = \varphi(x) & \text{в} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

где начальная функция φ нам известна, она точно такая же, как и в нелинейной задаче (1.2). Мы предполагаем, что функция $f \in L^\infty(Q_T)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{Q_T} |f(x,t)| \leqslant 1.$$

Отметим, что в дальнейшем f будет выбираться специальным образом.

Теория краевых задач для параболических уравнений (см. [17, гл. IV]) гарантирует, что при $1 < q < \infty$ единственное решение $v \in W^{2,1}_q(Q_T)$ задачи (1.5) удовлетворяет оценке

$$\|v\|^2_{W^{2,1}_q(Q_T)} \leqslant c(q) \left(\|f\|^2_{q,Q_T} + \|\varphi\|^2_{W^{2-2/q}_q(\Omega)} \right). \tag{1.6}$$

При $q > 3$ из оценки (1.6) и теоремы вложения (см., например, [17, гл. II, лемма 3.1]) для любых $z_1, z_2 \in \overline{Q}_T$ справедливы неравенства

$$|v(z_1)| + |\partial_x v(z_1)| \leqslant c_0, \tag{1.7}$$

$$|v(z_1) - v(z_2)| \leqslant c_1 |z_1 - z_2|, \tag{1.8}$$

$$|\partial_x v(z_1) - \partial_x v(z_2)| \leqslant c_2 |z_1 - z_2|^\gamma. \tag{1.9}$$

Здесь $\gamma = \gamma(q) \in (0,1)$, а c_i $(i = 0,1,2)$ – абсолютные константы, зависящие только от q и φ.

Особо подчеркнем, что c и c_i не зависят от T.

Работа организована следующим образом. В §2 очень подробно обсуждается случай единственного изменения начальной фазы. Далее, в §3 мы рассматриваем общий случай распределения начальный фаз. Наконец, в §4 доказывается липшицева регулярность каждой ветви межфазовой границы в случае, если $\varphi \in W^2_\infty(\Omega)$. Еще раз отметим, что в §§ 2-4 рассматриваются трансверсальные начальные данные. В §5 рассматриваются нетрансверсальные начальные данные и показывается, что в этом случае не существует решений с четко определенной межфазовой границей.

§2. Случай одной ветви межфазовой границы

В этом параграфе мы рассмотрим задачу (1.2) с единственной точкой смены начальных фаз.

Исследуем подробно один из возможных частных случаев. Пусть b – единственная точка из $\Omega = (0,1)$, в которой у начальной функции φ из задачи (1.2) при $x < b$ лежит фаза I, а при $x > b$ – фаза II. Дополнительно мы считаем, что

$$\varphi(b) = \alpha \tag{2.1}$$

и выполнено условие трансверсальности

$$\partial_x\varphi(b) > 0. \tag{2.2}$$

Положим $m = \min\{1, \partial_x\varphi(b)\}$.

Из условия $\varphi \in W^{2-2/q}_q(\Omega)$, $3 < q < \infty$, следует, что $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Поэтому можно найти $\sigma > 0$ такое, что $[b-\sigma, b+\sigma] \subset (0,1)$ и справедливо неравенство

$$\partial_x\varphi(x) \geqslant \frac{m}{2}, \quad \text{при } |x-b| \leqslant \sigma. \tag{2.3}$$

Из (2.3) очевидно следует

$$\varphi(b+\sigma) > \alpha + \frac{m}{2}\sigma, \quad \varphi(b-\sigma) < \alpha - \frac{m}{2}\sigma. \tag{2.4}$$

Поскольку b единственная точка смены фаз, то вне σ-окрестности точки b начальная фаза постоянна, т.е.

$$\begin{aligned} &\varphi(x) > \alpha, \quad \text{при } x \in [b+\sigma, 1], \\ &\varphi(x) < \beta, \quad \text{при } x \in [0, b-\sigma]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала линейную задачу (1.5), у которой в качестве начального условия выбрана функция φ из нелинейной задачи (1.2), удовлетворяющая условиям (2.1)–(2.5).

Согласно (1.6)–(1.9) подберем $T > 0$ настолько малым, чтобы для любого решения $v \in W_q^{2,1}(Q_T)$ задачи (1.5) при $t \in [0, T]$ были справедливы неравенства

$$v(x,t) > \alpha, \qquad \text{при } x \in (b+\sigma, 1]; \tag{2.6}$$

$$v(x,t) < \beta, \qquad \text{при } x \in [0, b-\sigma); \tag{2.7}$$

$$\partial_x v(x,t) \geqslant \frac{m}{4} > 0, \qquad \text{при } |x-b| \leqslant \sigma. \tag{2.8}$$

Из (2.8) очевидным образом следует

$$v(b-\sigma,t) \leqslant \alpha - \frac{m}{4}\sigma, \qquad v(b+\sigma,t) \geqslant \alpha + \frac{m}{4}\sigma. \tag{2.9}$$

Положительные постоянные σ и T, зависящие от φ, зафиксированы и далее меняться не будут.

Согласно (2.9) и (2.8) при каждом $t \in [0,T]$ непрерывная и монотонная по x функция $v(x,t)-\alpha$ меняет свой знак на промежутке $|x-b| \leqslant \sigma$. Поэтому для любого $t \in [0,T]$ найдется единственное значение $x = a(t)$ такое, что $|a(t)-b| < \sigma$, $v(a(t),t) = \alpha$ и $a(0) = b$. Другими словами, множество уровня $v(x,t) = \alpha$ при $|x-b| < \sigma$ и $t \in [0,T]$ представляет собой кривую, определяемую явным уравнением $x = a(t)$.

Покажем, что функция $a(t)$ непрерывна по Гельдеру. Действительно, возьмем произвольные $t_1, t_2 \in [0,T]$ такие, что $t_2 > t_1$. По определению функции $a(t)$ выполнено

$$v(a(t_1),t_1) = v(a(t_2),t_2) = \alpha.$$

Если $a(t_2) > a(t_1)$, то справедлива оценка

$$\begin{aligned}\frac{m}{4}\,(a(t_2)-a(t_1)) &\leqslant v(a(t_2),t_2) - v(a(t_1),t_2)\\ &= v(a(t_1),t_1) - v(a(t_1),t_2) \leqslant c_1|t_1-t_2|^{1/2},\end{aligned}$$

где в первом неравенстве использована оценка (2.8), а в последнем – оценка (1.8). Если же $a(t_1) > a(t_2)$, то оцениваем так

$$\begin{aligned}\frac{m}{4}\,(a(t_1)-a(t_2)) &\leqslant v(a(t_1),t_1) - v(a(t_2),t_1)\\ &= v(a(t_2),t_2) - v(a(t_2),t_1) \leqslant c_1|t_1-t_2|^{1/2}.\end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае верна оценка

$$|a(t_1) - a(t_2)| \leqslant \frac{4c_1}{m}|t_1 - t_2|^{1/2}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое в $\mathcal{C}([0,T])$ множество $\mathbb{K}$, состоящее из непрерывных монотонно неубывающих функций $\xi : [0,T] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$\xi(0) = b, \qquad \xi(T) - b \leqslant \sigma.$$

Определим теперь для любой $\xi \in \mathbb{K}$ функцию f^ξ следующим образом

$$f^\xi(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in (0, \xi(t)], \\ -1 & \text{при} \quad x \in (\xi(t), 1). \end{cases} \tag{2.11}$$

Далее, мы решаем задачу (1.5) с правой частью $f = f^\xi$ и находим функцию $a(t)$ по вышеописанной процедуре.

Установим теперь непрерывную зависимость a от ξ в пространстве $\mathcal{C}([0,T])$. Пусть имеются две функции ξ и $\tilde{\xi}$ из множества $\mathbb{K}$ такие, что

$$\|\xi - \tilde{\xi}\|_{\mathcal{C}([0,T])} \leqslant \varepsilon,$$

где ε - произвольная положительная константа. Поставим им в соответствие решения v и $\tilde{v}$ задач (1.5) с правыми частями $f = f^\xi$ и $\tilde{f} = f^{\tilde{\xi}}$, заданными (2.11), соответственно, а также функции a и $\tilde{a}$. Для разности $v - \tilde{v}$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|v - \widetilde{v}\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} &\leqslant c\|f - \widetilde{f}\|_{q,Q_T} \\ &\leqslant c \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\{|\xi(t)<x<\tilde{\xi}(t)|\}\cup\{|\tilde{\xi}(t)<x<\xi|(t)|\}} 2^q dxdt \right)^{1/q} \leqslant 2c\varepsilon^{1/q}. \end{aligned}$$

Учитывая вложение $W_q^{2,1}(Q_T) \hookrightarrow \mathcal{C}\left(\overline{Q}_T\right)$, получаем оценку

$$\max_{z \in Q_T} |v(z) - \tilde{v}(z)| \leqslant N(q)\varepsilon^{1/q}.$$

Поскольку $v(a(t),t) = \tilde{v}(\tilde{a}(t),t) = \alpha$, в случае $a(t) > \tilde{a}(t)$ имеем

$$\frac{m}{4}\left(a(t) - \tilde{a}(t)\right) \leqslant v(a(t),t) - v(\tilde{a}(t),t) = \tilde{v}(\tilde{a}(t),t) - v(\tilde{a}(t),t) \leqslant N\varepsilon^{1/q}.$$

Если же $\tilde{a}(t) > a(t)$, то придем к оценке

$$\frac{m}{4}\left(\tilde{a}(t) - a(t)\right) \leqslant v(\tilde{a}(t),t) - v(a(t),t) = v(\tilde{a}(t),t) - \tilde{v}(\tilde{a}(t),t) \leqslant N\varepsilon^{1/q}.$$

В результате получаем

$$\|a-\widetilde{a}\|_{\mathcal{C}([0,T])} \leqslant \frac{4N}{m}\varepsilon^{1/q}. \qquad (2.12)$$

Итак, мы доказали, что функция a непрерывна по Гельдеру и отображение $\xi \mapsto a$ непрерывно в $\mathcal{C}([0,T])$. Заметим, что функция a, вообще говоря, не является монотонной и по этой причине может не лежать в $\mathbb{K}$.

Введем функцию

$$a_0(t) = \sup_{\tau\in[0,t]} a(\tau), \qquad (2.13)$$

которая является верхней монотонной оболочкой для a.

Очевидно, что $a_0 \in \mathbb{K}$ и представляет собой чередующуюся последовательность замкнутых интервалов строгого возрастания функции a_0 и открытых интервалов постоянства (в силу монотонности существует не более чем счетное множество таких интервалов постоянства). На интервалах строгого возрастания $a_0(t) = a(t)$ и, следовательно, $v(a_0(t),t) = \alpha$.

Лемма 2.1. *Пусть $\xi, \tilde{\xi} \in \mathbb{K}$. Предположим, что a и $\tilde{a}$ определяются функциями ξ и $\widetilde{\xi}$ соответственно, а их монотонные оболочки a_0 и $\tilde{a}_0$ определяются соотношением* (2.13).

Тогда справедливы следующие утверждения

$$1)\quad |a_0(t_2)-a_0(t_1)| \leqslant \frac{4c_1}{m}|t_2-t_1|^{1/2}, \qquad [t_1,t_2]\subset[0,T], \qquad (2.14)$$

$$2)\quad \max_{t\in[0,T]}|a_0(t)-\widetilde{a}_0(t)| \leqslant \max_{t\in[0,T]}|a(t)-\widetilde{a}(t)|. \qquad (2.15)$$

Доказательство. Докажем утверждение 1). Если t_1 и t_2 попали на один интервал постоянства, то оценка (2.14) тривиальна. Иначе, положим

$$\underline{t_2} = \max\left\{\tau : \tau \leqslant t_2 \text{ и } a_0(\tau)=a(\tau)\right\},$$
$$\overline{t_1} = \min\left\{\tau : \tau \geqslant t_1 \text{ и } a_0(\tau)=a(\tau)\right\}.$$

Ясно, что $t_1 \leqslant \overline{t_1} \leqslant \underline{t_2} \leqslant t_2$. Тогда справедлива следующая оценка

$$0 \leqslant a_0(t_2)-a_0(t_1) = |a(\underline{t_2})-a(\overline{t_1})| \leqslant \frac{4c_1}{m}\left(\underline{t_2}-\overline{t_1}\right)^{1/2} \leqslant \frac{4c_1}{m}(t_2-t_1)^{1/2},$$

где первое неравенство следует из (2.10).

Докажем утверждение 2). Ясно, что $\tilde{a}_0(t) = \tilde{a}(\tau)$ при некотором $\tau \in [0,t]$. Поэтому

$$\tilde{a}_0(t) = \tilde{a}(\tau) - a(\tau) + a(\tau) \leqslant \tilde{a}(\tau) - a(\tau) + a_0(\tau) \leqslant \tilde{a}(\tau) - a(\tau) + a_0(t),$$

и, следовательно,

$$\tilde{a}_0(t) - a_0(t) \leqslant \tilde{a}(\tau) - a(\tau) \leqslant \max_{[0,t]}(\tilde{a} - a).$$

Меняя ролями a и $\tilde{a}$ и проводя аналогичное рассуждение, заключаем, что

$$|\tilde{a}_0(t) - a_0(t)| \leqslant \max_{[0,t]} |a - \tilde{a}| \leqslant \max_{[0,T]} |a - \tilde{a}|.$$

Отсюда следует искомое неравенство (2.15). □

Итак, каждой функции ξ из выпуклого замкнутого множества $\mathbb{K} \subset \mathcal{C}([0,T])$ соответствует функция $a_0 \in \mathbb{K}$, причем отображение $a_0 = \mathcal{R}(\xi)$ непрерывно в силу (2.15), (2.12) и компактно в силу (2.15), (2.14) и теоремы Арцела–Асколи. Поэтому, в соответствии с принципом Шаудера (см., например, [18, стр. 628]) существует неподвижная точка $s(t)$ отображения $\mathcal{R}$ и $s(t) \in \mathbb{K}$.

Заметим также, что если по $s(t)$ построить функцию $f^s(x,t)$ и решить линейную задачу (1.5) с такой правой частью, а затем у линии уровня решения $v(x,t) = \alpha$ взять верхнюю монотонную оболочку, то получим как раз $x = s(t)$. Ввиду (2.6)–(2.7) вне отрезка $[b-\sigma, b+\sigma]$ у функции $v(x,t)$ нет точек переключения фаз. Поэтому $f^s(x,t) = \mathcal{H}(v(x,t))$. Тем самым $u(x,t) = v(x,t)$ является решением нелинейной задачи (1.2), а монотонная кривая $x = s(t)$ – соответствующей межфазовой границей.

Строго говоря, кривая $x = s(t)$ представляет собой множество меры нуль и на ней можно задавать f^s произвольным образом, но именно при определении (2.11) $f^s(x,\cdot)$ как функция второй переменной оказывается непрерывной справа и является значением пространственно распределенного оператора гистерезиса.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$, $3 < q < \infty$, *пусть* $\partial_x\varphi(0) = \partial_x\varphi(1) = 0$ *и пусть задано распределение* φ *по фазам* I *и* II *такое, что смена фазы происходит только в одной точке* b. *Предположим также, что выполнены условия* (2.1)–(2.2).

Тогда существует $T > 0$, зависящее от q и φ, такое, что при $t \in [0, T]$ нелинейная задача (1.2) *имеет решение $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$ и соответствующая межфазовая граница описывается уравнением $x = s(t)$, где $s(t)$ – неубывающая непрерывная по Гельдеру функция с показателем $1/2$.*

Замечание 2.2. В работе [12] было показано, что свободная граница является Гельдеровой функцией с показателем $\gamma < 1 - 3/q$. Таким образом при $q < 6$ теорема 2.1 доказывает более высокую регулярность свободной границы.

Замечание 2.3. В теореме 2.1 мы взяли верхнюю монотонную оболочку функции a в связи с условием (2.2).

При выполнении (2.1) и условия $\partial_x \varphi(b) < 0$ рассматривается нижняя монотонная оболочка $a_0(t)$, определяемая формулой:

$$a_0(t) = \inf_{\tau \in [0,t]} a(\tau).$$

Остальные возможные случаи рассматриваются аналогично.

§3. Случай нескольких ветвей межфазовой границы

Рассмотрим общий случай задачи (1.2).

Пусть задано начальное значение $\varphi(x) = u(x, 0)$. Будем считать, что $\lim_{x \to 0,1} \varphi(x) \notin \{\alpha, \beta\}$ и фиксированы n точек $0 < b_1 < \dots < b_n < 1$, в которых (и только в них) происходит чередующаяся смена фаз в начальный момент времени. Будем считать, что для любого $i = 1, \dots, n$ начальная функция $\varphi(b_i)$ принимает одно из пороговых значений α или β, и выполнено условие трансверсальности[4]

$$|\partial_x \varphi(b_i)| > 0.$$

Это однозначно определяет распределение фаз при $t = 0$, ибо в начальный момент при $\varphi(x) \leqslant \alpha$ возможна лишь фаза I, а при $\varphi(x) \geqslant \beta$ возможна лишь фаза II.

Положим $m := \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|\partial_x \varphi(b_i)|\}$. Очевидно, что $m > 0$. Не умаляя общности, можно считать $m \leqslant 1$, иначе возьмем $m = 1$.

Рассмотрим все индексы i, для которых $\varphi(b_i) = \alpha$. Выберем σ так, чтобы одно из чисел $\varphi(b_i + \sigma) - \alpha$ и $\varphi(b_i - \sigma) - \alpha$ было больше $m\sigma/2$, а

[4] Кроме b_i, возможны и другие точки, в которых φ принимает пороговые значения, но в них условие трансверсальности может не выполняться, поскольку они не являются точками смены фаз.

другое меньше $-m\sigma/2$. То же самое с заменой α на β сделаем в случаях $\varphi(b_i) = \beta$. Подчеркнем, что поскольку $\varphi \in W_q^{2-2/q}$, $3 < q < \infty$, то мы можем выбрать одно и тоже значение σ для всех b_i и сделать σ столь малым, чтобы $b_1 > \sigma$, $b_n < 1 - \sigma$, а $b_{i+1} - b_i > 2\sigma$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Аналогично §2, перейдем теперь к линейной задаче (1.5) с начальной функцией φ из нелинейной задачи (1.2).

Затем, учитывая (1.6)–(1.9), выберем T достаточно малым, чтобы для решений $v(x,t)$ задачи (1.5) при всех $t \in [0,T]$ и при всех индексах i выполнялись условия:

1) одно из значений $v(b_i+\sigma,t) - \varphi(b_i)$ и $v(b_i-\sigma,t) - \varphi(b_i)$ больше чем $\dfrac{m}{4}\sigma$, а другое меньше чем $-\dfrac{m}{4}\sigma$;
2) вне σ-окрестностей точек b_i функции $v(x,t)$ удовлетворяют неравенству $v(x,t) > \alpha$, если $\varphi(x)$ находится в фазе II, или неравенству $v(x,t) < \beta$, если $\varphi(x)$ находится в фазе I;
3) $|\partial_x v(x,t)| > \dfrac{m}{4}$ при $|x-b_i| \leqslant \sigma$. Кроме того, в σ-окрестности каждой точки b_i функция $\partial_x v(x,t)$ имеет тот же знак, что и $\partial_x\varphi(b_i)$.

В дальнейшем мы считаем положительные постоянные σ и T зафиксированными (как и в предыдущем параграфе, их значения зависят только от φ).

Рассуждая так же как и в §2, нетрудно показать, что для всех индексов i линии уровня $v(x,t) = \varphi(b_i)$ при $|x-b_i| < \sigma$ и $t \in [0,T]$ представляют собой кривые $x = a_i(t)$, такие что $a_i(0) = b_i$ и функции $a_i(t)$ удовлетворяют условию Гельдера по переменной t с показателем $1/2$, точнее

$$|a_i(t_2) - a_i(t_1)| \leqslant \frac{4c_1}{m}|t_2 - t_1|^{1/2}, \qquad \forall t_1, t_2 \in [0,T].$$

Будем обозначать через Q_i^* прямоугольники

$$Q_i^* = \{(x,t) : |x-b_i| < \sigma,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Определим еще промежуточные прямоугольники Q_i^{**}, лежащие между Q_i^* и Q_{i+1}^*:

$$Q_i^{**} = [b_i+\sigma, b_{i+1}-\sigma] \times [0,T], \qquad i = 1,\dots,n-1.$$

Дополним их прямоугольниками

$$Q_0^{**} = [0, b_1-\sigma] \times [0,T] \quad \text{и} \quad Q_n^{**} = [b_n+\sigma, 1] \times [0,T].$$

С каждым Q_i^* связывается зависящее от $\varphi(b_i)$ и $\partial_x\varphi(b_i)$ выпуклое замкнутое в $\mathcal{C}([0,T])$ множество $\mathbb{K}_i$, состоящее из монотонных функций $\xi_i(t)$ таких, что $\xi_i(0) = b_i$ и $|\xi_i(t) - \varphi(b_i)| \leqslant \sigma$ при $t \in [0,T]$, т.е. кривые $x = \xi_i(t)$ содержатся в соответствующих $\overline{Q_i^*}$. Заметим, что характер монотонности функций ξ_i (т.е. невозрастание или неубывание) однозначно определяется значениями $\varphi(b_i)$ и $\partial_x\varphi(b_i)$. Возможные варианты монотонности ξ_i приведены ниже в таблице 1.

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично тому, как это делалось в §2 для случая одной начальной точки смены фаз.

Сначала рассматриваем линейную задачу вида (1.5) с правой частью $f^{\boldsymbol{\xi}}(x,t)$, определяемой набором $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))$, $\xi_i \in \mathbb{K}_i$, $\xi_i(0) = b_i$ и начальной функцией φ следующим образом. В каждом прямоугольнике Q_i^* функцию $f^{\boldsymbol{\xi}}(x,t)$ определяем согласно таблице 1. Далее, в прямоугольниках Q_i^{**} считаем $f^{\boldsymbol{\xi}}(x,t) \equiv 1$, если в основании Q_i^{**} (т.е. при $t = 0$) функция φ находится в фазе I, и полагаем $f^{\boldsymbol{\xi}}(x,t) \equiv -1$, если в основании Q_i^{**} функция $\varphi(x)$ находится в фазе II.

Решаем задачу (1.5) с такой функцией $f^{\boldsymbol{\xi}}(x,t)$. Из (1.8) следует, что кривые $v(x,t) = \varphi(b_i)$ или, что то же самое, кривые $x = a_i(t)$ гельдеровы по t с показателем $1/2$. Кроме того, отображения $\xi_i \mapsto a_i$ непрерывны в $\mathcal{C}\left([0,T]\right)$. В силу условия трансверсальности, в прямоугольниках Q_i^* справедливы неравенства

$$\partial_x v \geqslant \frac{m}{4} \quad \text{при реализации вариантов 1 и 3}$$

и

$$\partial_x v \leqslant -\frac{m}{4} \quad \text{при реализации вариантов 2 и 4.}$$

Как и ранее, функции $a_i(t)$ не обязаны быть монотонными и, следовательно, содержаться в соответствующих $\mathbb{K}_i$. Поэтому для каждого $i = 1,\ldots,n$, рассмотрим вместо функции $a_i(t)$ ее монотонную оболочку (верхнюю в случаях 1 или 3, и нижнюю в случаях 2 или 4) $a_{i,0}(t)$ лежащую в $\mathbb{K}_i$.

Аналогично рассуждению из §2, можно показать, что функции $a_{i,0}$, $i = 1,\ldots,n$, удовлетворяют условию Гельдера с показателем $1/2$ на промежутке $[0,T]$.

Введем теперь в рассмотрение банахово пространство $\mathcal{B}=(\mathcal{C}([0,T]))^n$ – декартово произведение n пространств (слоев) $\mathcal{C}\left([0,T]\right)$. Норма элемента $\mathbf{w} = (w_1,\ldots,w_n) \in \mathcal{B}$ определяется формулой

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{B}} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|w_i\|_{\mathcal{C}([0,T])}.$$

Таблица 1

Вариант	**Поведение φ в точке b_i**	**Характер монотонности $\xi_i(t)$ из $\mathbb{K}_i$**	**Функция f в Q_i^***
1.	$\varphi(b_i) = \alpha$ и $\partial_x \varphi(b_i) \geqslant m$	неубывающие	$f(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \leqslant \xi_i(t), \\ -1, & \text{при} \quad x > \xi_i(t) \end{cases}$
2.	$\varphi(b_i) = \alpha$ и $\partial_x \varphi(b_i) \leqslant -m$	невозрастающие	$f(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \geqslant \xi_i(t), \\ -1, & \text{при} \quad x < \xi_i(t) \end{cases}$
3.	$\varphi(b_i) = \beta$ и $\partial_x \varphi(b_i) \geqslant m$	невозрастающие	$f(x,t) = \begin{cases} -1, & \text{при} \quad x \geqslant \xi_i(t), \\ 1, & \text{при} \quad x < \xi_i(t). \end{cases}$
4.	$\varphi(b_i) = \beta$ и $\partial_x \varphi(b_i) \leqslant -m$	неубывающие	$f(x,t) = \begin{cases} -1, & \text{при} \quad x \leqslant \xi_i(t), \\ 1, & \text{при} \quad x > \xi_i(t). \end{cases}$

Из определения пространства $\mathcal{B}$ следует, что утверждение о выпуклости (замкнутости, компактности) множества $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ в пространстве $\mathcal{B}$ равносильно выпуклости (замкнутости, компактности) каждого из множеств E_i в пространстве $\mathcal{C}([0,T])$.

Поскольку каждой функции $\xi_i(t) \in \mathbb{K}_i$, $i = 1, \dots, n$, сопоставляется функция $a_{i,0}(t) \in \mathbb{K}_i$, определен оператор

$$\mathcal{R} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \qquad \mathcal{R}(\boldsymbol{\xi}(t)) = (a_{1,0}(t), \dots, a_{n,0}(t)).$$

На каждом слое оператор $\mathcal{R}$ непрерывен, компактен и переводит $\mathbb{K}_i$ в себя. Таким образом, множество $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 \times \cdots \times \mathbb{K}_n$ переходит в себя и к оператору $\mathcal{R}$ применим принцип Шаудера о неподвижной точке.

Неподвижная точка $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))$ оператора $\mathcal{R}$ – это набор n монотонных ветвей межфазовых границ нелинейной задачи (1.2). При этом, каждая ветвь $x = s_i(t)$ представляет собой чередующуюся последовательность интервалов строгой монотонности и интервалов постоянства. На интервалах строгой монотонности выполняется равенство $v(s_i(t), t) = \varphi(b_i)$. Соответствующее решение $v(x,t)$ совпадает с решением $u(x,t)$ нелинейной задачи (1.2).

Сформулируем теперь окончательный результат

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ при $q > 3$ и выполнено $\partial_x\varphi(0) = \partial_x\varphi(1) = 0$.*

Предположим, что даны несколько различных точек b_i, $i=1,\dots,n$, расположенных внутри Ω, где происходит смена фаз в начальный момент, и φ принимает в каждой из этих точек одно из пороговых значений α или β. Кроме того, в точках b_i выполнены условия трансверсальности, а также необходимое условие очередности начальных фаз.

Тогда существует $T > 0$, зависящее от q и φ, такое, что задача (1.2) при $t \in [0,T]$ имеет решение $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$, а межфазовые кривые определяются монотонными гельдеровыми функциями $x = s_i(t)$, $i = 1, \dots, n$.

§4. О липшицевости межфазовой границы

Выше было доказано существование решения задачи (1.2), в том числе установлена гельдеровость межфазовой границы. Мы покажем, что при дополнительном условии $\varphi \in W_\infty^2(\Omega)$, каждая ветвь межфазовой границы липшицева.

Начнем с доказательства простого, но весьма полезного утверждения о решениях линейной задачи (1.5).

Лемма 4.1. *Предположим, что* $v(x,t)$ *– решение задачи* (1.5), *и пусть* $\varphi \in W^2_\infty(\Omega)$. *Существует постоянная* $N_0 = N_0(\varphi) > 0$ *такая, что*

$$|v(x,t) - \varphi(x)| \leqslant N_0 t. \tag{4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$w(x,t) = t \pm \varepsilon \left(v(x,t) - \varphi(x)\right).$$

Легко видеть, что

$$\partial_t w - \Delta w = 1 \pm \varepsilon \left(f + \Delta\varphi\right) \geqslant 0 \tag{4.2}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Домножим правую и левую части (4.2) на w_- и проинтегрируем по $\Omega \times [0,t]$, $t \leqslant T$. Интегрируя по частям с учетом условий $w(x,0) = 0$ и $\partial_x w\Big|_{S_T} = 0$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega w_-^2(x,t)dx + \int\limits_\Omega \int\limits_0^t \partial_x w_-^2(x,t)dtdx \leqslant 0,$$

откуда $w_- \equiv 0$.

Итак, мы установили неравенство (4.1) с $N_0 = \varepsilon^{-1}$. Можно, например, положить $N_0 = \sup\limits_\Omega |\Delta\varphi(x)|$. □

Далее мы считаем, что выполнены условия теоремы 3.1 и рассматриваем разностные отношения по переменной t для решения задачи (1.2), которые определяются следующим образом

$$u_{(h)}(x,t) = \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h}, \quad h > 0.$$

Чтобы они были определены для некоторого диапазона значений h, например при $h \in (0,\epsilon]$, $\epsilon < T$, придется сократить высоту рассматриваемых прямоугольников.

В частности, из (1.6) вытекает, что при любом $h \in (0,\epsilon]$ справедливо неравенство

$$\|u_{(h)}\|_{q,Q_{T-\epsilon}} \leqslant N_1, \tag{4.3}$$

поскольку возможно продолжение $u(x,t)$ функцией $\varphi(x)$ на $t < 0$ и для продолженной функции сохраняется оценка L_q-нормы $\partial_t u$.

Важным следствием неравенства (4.1) является оценка

$$\max_{x\in\Omega} |u_{(h)}(x,0)| \leqslant N_0, \quad h \in (0,\epsilon]. \tag{4.4}$$

Попытка получить оценку $|\max\limits_{\Omega} u_{(h)}(x,t)|$ при $t > 0$ была бы неудачной, поскольку $u_{(h)}$ подчиняется соотношениям

$$\begin{aligned} \partial_t u_{(h)} - \Delta u_{(h)} &= f_{(h)} \quad &&\text{в} \quad Q_{T-\epsilon}, \\ \partial_x u_{(h)} &= 0 &&\text{на} \quad S_{T-\epsilon}, \\ |u_{(h)}(x,0)| &\leqslant N_0 &&\text{в} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где правая часть в уравнении (4.5) становится сингулярной в окрестности межфазовой границы при $h \to 0$.

Распределение фаз при $t = 0$ определено однозначно функцией $\varphi(x)$. В прямоугольниках[5] Q_i^{**}, $i = 0,\dots,n$, на всем промежутке $[0, T-\epsilon]$ фаза сохраняет то же значение, которое было при $t = 0$.

Лемма 4.2.

$$\max_{Q_i^{**}} |u_{(h)}(x,t)| \leqslant N_2, \quad i = 0,\dots,n, \tag{4.6}$$

где постоянная N_2 определяется q и функцией φ.

Доказательство. Положим

$$\rho = \frac{m\sigma}{8\max\limits_{Q_T} |\partial_x u|} < \frac{\sigma}{8}$$

и рассмотрим расширенные промежуточные прямоугольники

$$Q_{i,\rho}^{**} = [b_i + \sigma - \rho, b_{i+1} - \sigma + \rho] \times [0, T-\epsilon], \qquad i = 1,\dots,n-1,$$
$$Q_{0,\rho}^{**} = [0, b_1 - \sigma + \rho] \times [0, T-\epsilon], \qquad Q_{n,\rho}^{**} = [b_n + \sigma - \rho, 1] \times [0, T-\epsilon].$$

Из доказательства теоремы 3.1 следует, что при всех $i = 0,\dots,n$ расширенные прямоугольники $Q_{i,\rho}^{**}$ не пересекают межфазовые границы.

Представим $u_{(h)}$ в виде суммы $w_1 + w_2$, где w_1 – решение задачи

$$\partial_t w_1 - \Delta w_1 = 0 \quad \text{в} \quad Q_{i,\rho}^{**}, \qquad w_1\big|_{t=0} = u_{(h)}\big|_{t=0},$$

постоянное на боковых границах $Q_{i,\rho}^{**}$. По принципу максимума из (4.4) следует оценка

$$\max_{Q_i^{**}} |w_1(x,t)| \leqslant N_0, \quad i = 0,\dots,n. \tag{4.7}$$

[5] Мы сохраним прежние обозначения из §3, так что теперь Q_i^* - прямое произведение σ-окрестности точки b_i на $[0, T-\epsilon]$ и т. д.

Поскольку $u_{(h)}$ в $Q^{**}_{i,\rho}$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, имеем

$$\partial_t w_2 - \Delta w_2 = 0 \quad \text{в} \quad Q^{**}_{i,\rho}, \qquad w_2\big|_{t=0} = 0.$$

Поэтому функция w_2, продолженная нулем при $t < 0$ также удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности. По теореме об оценке производных решения гипоэллиптического уравнения (см., например, [19, Предложение 6.6]) получим

$$\max_{Q^{**}_i} |w_2(x,t)| \leqslant c(q,\rho)\|w_2\|_{q,Q^{**}_{i,\rho}}, \quad i = 0, \dots, n.$$

С учетом (4.3) и (4.7) это дает (4.6). □

Не умаляя общности, можно считать, что $N_2 \geqslant N_0$.

Рассмотрим теперь какой-либо из прямоугольников Q^*_i, в которых происходит смена фаз. Как было доказано в §3, межфазовые границы задаются монотонными функциями $x = s_i(t)$. Поэтому на каждой прямой параллельной оси $0t$, функция f меняет знак не более одного раза. Следовательно, правая часть в первом из уравнений (4.5) имеет определенный знак в каждом из прямоугольников Q^*_i, что позволяет получить ***односторонние*** оценки разностных отношений u по t.

Лемма 4.3. *Для решений* u *нелинейной задачи* (1.2) *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\min_{Q^*_i} u_{(h)} \geqslant -N_2, \quad \text{если } \varphi(b_i) = \alpha,\\ &\max_{Q^*_i} u_{(h)} \leqslant N_2, \qquad \text{если } \varphi(b_i) = \beta, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где h *– произвольный параметр из* $(0, \epsilon]$.

Доказательство. Заметим, что из (4.6) следует, что на параболической границе любого из цилиндров Q^*_i выполнено неравенство $\max |u_{(h)}| \leqslant N_2$. Далее, из таблицы 1 видно, что если $\varphi(b_i) = \alpha$, то $f_{(h)} \geqslant 0$ в Q^*_i, а если $\varphi(b_i) = \beta$, то $f_{(h)} \leqslant 0$ в Q^*_i.

Для получения первого из неравенств (4.8), аналогично доказательству леммы 4.1, умножим первое из уравнений (4.5) на $\big(u_{(h)} + N_2\big)_-$, проинтегрируем по множеству $(b_i - \sigma, b_i + \sigma) \times (0, t)$, $t \leqslant T - \epsilon$, и произведем интегрирование по частям.

Аналогично выводится второе из неравенств (4.8). □

Теперь мы будем использовать совместно лемму 4.3 и неравенства, вытекающие из условия трансверсальности. Пусть $\varphi(b_i) = \alpha$ и

$\partial_x \varphi(b_i) \geqslant m$. Рассмотрим прямоугольник Q_i^* и в нем неубывающую межфазовую границу $x = s_i(t)$, выберем произвольные $t^* < t^{**}$ из $(0, T-\epsilon]$, в которых функция $s_i(t)$ строго возрастает (напомним, что тогда $u(s_i(t^*), t^*) = u(s_i(t^{**}), t^{**}) = \alpha$). Оценим разность $s_i(t^{**}) - s_i(t^*)$. В силу леммы 4.3 имеем

$$u(s_i(t^{**}), t^*) - \alpha = u(s_i(t^{**}), t^*) - u(s_i(t^{**}), t^{**}) \leqslant N_2 \left(t^{**} - t^*\right).$$

С другой стороны, в силу условия трансверсальности

$$u(s_i(t^{**}), t^*) - \alpha = u(s_i(t^{**}), t^*) - u(s_i(t^*), t^*) \geqslant \frac{m}{4} \left(s_i(t^{**}) - s_i(t^*)\right),$$

откуда

$$0 \leqslant s_i(t^{**}) - s_i(t^*) \leqslant \frac{4N_2}{m} \left(t^{**} - t^*\right).$$

В последнем неравенстве значения t^* и t^{**} можно уже брать произвольными из $(0, T-\epsilon]$, поскольку на каждом из оставшихся кусков межфазовой кривой приращение функции $s_i(t)$ равно нулю.

Пусть теперь $\varphi(b_i) = \alpha$ и $\partial_x \varphi(b_i) \leqslant -m$. Тогда для произвольных $t^* < t^{**}$ из множества строгого убывания функции $s_i(t)$ с помощью леммы 4.3 и условия трансверсальности доказывается, что

$$0 \geqslant s_i(t^{**}) - s_i(t^*) \geqslant -\frac{4N_2}{m} \left(t^{**} - t^*\right).$$

Далее, легко видеть, что это неравенство верно при любых $t^* < t^{**}$ из $(0, T-\epsilon]$. Поэтому в обоих случаях справедлива оценка

$$|s_i(t^{**}) - s_i(t^*)| \leqslant \frac{4N_2}{m} \left(t^{**} - t^*\right). \tag{4.9}$$

Аналогично устанавливается неравенство (4.9) в прямоугольниках Q_i^* при условии $\varphi(b_i) = \beta$.

Поскольку константа Липшица в (4.9) не зависит от выбора ϵ, мы можем устремить ϵ к нулю. Это дает следующий результат.

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1 и кроме того $\varphi \in W^2_\infty(\Omega)$.*

Тогда для любого фиксированного q, $3 < q < \infty$, решение задачи (1.2)*, полученное в теореме* 3.1*, принадлежит $W_q^{2,1}(Q_T)$.*[6] *При этом, функции $s_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, задающие ветви межфазовой границы удовлетворяют условию Липшица с константой $\frac{4N_2}{m}$.*

[6] Напомним, что T, вообще говоря, зависит от q.

§5. Случай нетрансверсальных начальных данных

Ниже мы покажем, что в окрестности точки, в которой начальная функция φ не удовлетворяет условию трансверсальности, межфазовая граница не является графиком гельдеровой (и даже непрерывной) функции.

Определение 5.1. *Будем говорить, что начальная функция $\varphi \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$, $q > 3$, из задачи* (1.2) *топологически нетрансверсальна в точке $x_0 \in \Omega$, если для некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ выполнено одно из двух условий:*

- *процесс находится в фазе I при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и*

$$\varphi(x_0) = \beta, \quad \varphi(x) < \beta \quad \text{при} \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon); \tag{5.1}$$

См. рис. 3.

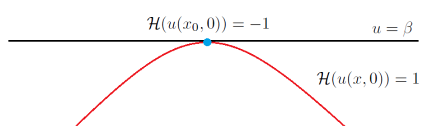

Рис. 3. Пример нетрансверсальных начальных данных.

- *процесс находится в фазе II при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и*

$$\varphi(x_0) = \alpha, \quad \varphi(x) > \alpha \quad \text{при} \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Замечание 5.1. Отметим, что если начальная функция φ топологически нетрансверсальна в точке x_0, то $\partial_x \varphi(x_0) = 0$, и следовательно φ не удовлетворяет условиям трансверсальности из §§ 2–3.

Предположим, что существует решение $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$ задачи (1.2) с топологически нетрансверсальной начальной функцией $\varphi \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$, $q > 3$. Не умаляя общности, предположим, что выполнено условие (5.1), тогда для некоторых $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и $T_1 < T$ выполнено

$$u(x,t) > \alpha, \quad x \in (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1), \quad t \in (0, T_1); \tag{5.2}$$

$$u(x_0 \pm \varepsilon_1, t) < \beta, \quad t \in (0, T_1). \tag{5.3}$$

Обозначим $\mathcal{I} = (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$. Из (5.2) следует, что для любого $x \in \mathcal{I}$ фаза решения на интервале $t \in (0, T_1)$ меняется не более одного раза. При этом смена фазы в точке $x \neq x_0$ происходит в момент

$$r(x) = \inf_{t \in [0, T_1)} \{u(x,t) \geqslant \beta\}. \tag{5.4}$$

В случае, если $u(x,t) < \beta$ при $t \in [0, T_1)$, положим $r(x) = T_1$.

Введем обозначения

$$H^+(\tau) = \{(x,t) \in \mathcal{I} \times (0,\tau) : \ \mathcal{H}(u(x,t)) = 1\}, \quad \tau \in (0, T_1],$$

$$H^-(\tau) = \{(x,t) \in \mathcal{I} \times (0,\tau) : \ \mathcal{H}(u(x,t)) = -1\}, \quad \tau \in (0, T_1],$$

$$H^+ = H^+(T_1), \quad H^- = H^-(T_1).$$

Отметим, что поскольку u непрерывна, то r полунепрерывна снизу и выполнены равенства

$$H^+(\tau) = \{(x,t) \in \mathcal{I} \times (0,\tau) : t < r(x)\},$$

$$H^-(\tau) = \{(x,t) \in \mathcal{I} \times (0,\tau) : t \geqslant r(x)\}.$$

Множество точек $(x, r(x))$, $x \in \mathcal{I}$ образует границу между фазами I и II. Покажем, что она не может иметь вид из §§ 2–3. Отметим, что на межфазовой границе типа линии уровня $u(x,t) = \beta$, см. рис. 2, функция r непрерывна, а "спящей границе" соответствует разрыв первого рода функции r.

Теорема 5.1. *Рассмотрим $u \in W_q^{2,1}(Q_{T_1})$ решение задачи (1.2) с топологически нетрансверсальной начальной функцией $\varphi \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$, удовлетворяющей условию (5.1).*

Предположим, что на некотором интервале (a,b) функция r, определенная в (5.4), удовлетворяет неравенству $r(x) < T_1$.

Тогда

(i) *если r непрерывна на (a,b), то она постоянна на (a,b);*
(ii) $\limsup\limits_{x \to x_1 -} r(x) = \limsup\limits_{x \to x_1 +} r(x)$ *для любого $x_1 \in (a,b)$.*

Более того, функция $\tilde{r}$ определенная равенством

$$\tilde{r}(x_1) = \limsup_{x \to x_1} r(x), \quad x_1 \in (a,b)$$

постоянна, и $u(x_1, \tilde{r}(x_1)) = \beta$.

Пункты (i) и (ii) показывают, что у задачи (1.2) не может быть части свободной границы, описываемой аналогично § 2. Действительно, в §2 часть границы, лежащая на линии уровня $u = \beta$, задается равенством $x = a(t)$ со строго монотонной непрерывной функцией a, а следовательно, может быть описана равенством $t = r(x)$ с непрерывной функцией r, что невозможно согласно пункту (i). Аналогично, "спящая граница" невозможна согласно пункту (ii). Мы предполагаем, что задача (1.2) с нетрансверсальной начальной функцией не имеет решения, но не можем исключить существования патологического решения, у которого множество точек переключения гистерезиса имеет положительную меру и нигде не плотно (в этом случае теорема 5.1 неприменима) или для некоторых t_0 выполнено $u(x,t_0) = \beta$ на открытом интервале $x \in (a,b)$ (что соответствует последнему утверждению теоремы 5.1).

В доказательстве теоремы 5.1 мы будем использовать следующие версии сильного принципа максимума [20, гл. 3] и леммы о нормальной производной (см., напр., [21, Theorem 3.1] или [22]).

Предложение 5.2. *Предположим, что в некотором прямоугольнике $K = (x_1,x_2)\times(t_1,t_2]$ функция $u(x,t) \in W_q^{2,1}(K)$, $q > 3$, удовлетворяет неравенствам*

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) \leqslant 0, \quad \text{для } (x,t) \in K$$

и при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$u(x,t) \leqslant M, \quad \text{для } (x,t) \in \overline{K}.$$

Тогда если для некоторого $(x',t') \in K$ выполнено $u(x',t') = M$, то

$$u(x,t) = M, \quad \text{для } (x,t) \in (x_1,x_2)\times(t_1,t').$$

Предложение 5.3. *Предположим, что в некотором прямоугольнике $K = (x_1,x_2)\times(t_1,t_2)$ функция $u \in W_q^{2,1}(K)$ при некотором $M \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

$$\partial_t u - \Delta u \leqslant 0, \quad u \leq M, \quad u \not\equiv M.$$

Тогда если для некоторого $t' \in (t_1,t_2]$ выполнено $u(x_1,t') = M$, то

$$\partial_x u(x_1,t') \neq 0.$$

Также мы будем использовать следующее очевидное утверждение.

Предложение 5.4. *Рассмотрим прямоугольник* $K=(x_1,x_2)\times(t_1,t_2)$, *функцию* $u\in W_q^{2,1}(K)$, *открытое множество* $A\subset K$ *и* $M\in\mathbb{R}$, *удовлетворяюшие условию*

$$u(x,t)=M,\ \partial_x u(x,t)=0,\quad (x,t)=\partial A\setminus\partial K.$$

Тогда функция

$$v(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & (x,t)\in A,\\ M, & (x,t)\in K\setminus A\end{cases}\tag{5.5}$$

удовлетворяет условиям

$$v\in W_q^{2,1}(K),\quad \partial_t v-\Delta v=(\partial_t u-\Delta u)\chi_A.$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение

Лемма 5.5. *Пусть* $\varphi\in W_q^{2-2/q}(\Omega)$ *удовлетворяет условию* (5.1). *Если* u *– решение задачи* (1.2), *удовлетворяет* (5.2), (5.3) *то выполнено неравенство*

$$u(x,t)\leqslant\beta,\quad x\in\mathcal{I},\ t\in(0,T_1).$$

Доказательство. Предположим противное, для некоторых $t_1>0$, $x_1\in I$ выполнено $u(x_1,t_1)>\beta$. Рассмотрим $x_2\in\overline{\mathcal{I}}$, $t_2\in[0,t_1]$ такие что

$$u(x_2,t_2)=\max_{x\in\overline{\mathcal{I}},\,t\in[0,t_1]}u(x,t)>\beta.\tag{5.6}$$

Из неравенств (5.1), (5.3) следует, что $t_2\neq 0$, $x_2\notin\partial\mathcal{I}$. Отметим, что если $u(x,t)>\beta$ то $\mathcal{H}(u(x,t))=-1$, а значит для достаточно малого $\delta>0$ выполнено

$$\partial_t u-\Delta u=-1,\quad x\in[x_2-\delta,x_2+\delta],\ t\in[t_2-\delta,t_2],$$

а следовательно по предложению 5.2 $\max_{x\in[x_2-\delta,x_2+\delta],t\in[t_2-\delta,t_2]}u(x,t)$ достигается при $x=x_2\pm\delta$ или $t=t_2-\delta$, что противоречит (5.6). □

Доказательство теоремы 5.1. В силу (5.4) для $x\in\mathcal{I}$, удовлетворяющих $r(x)<T_1$, выполнено

$$u(x,r(x))=\beta.\tag{5.7}$$

Из леммы 5.5 следует, что точка $(x,r(x))$ является локальным максимумом функции u и следовательно

$$\partial_x u(x,r(x))=0.\tag{5.8}$$

Пункт (i)**.** Из непрерывности $r(x)$ следует, что прямоугольник $K = (a,b) \times (0, T_1)$, функция u и множество $A = \operatorname{Int} H^- \cap K$ и $M = \beta$ удовлетворяют условиям предложения 5.4. Следовательно для функции v, заданной равенством (5.5), выполнены неравенства

$$v(x,t) \leqslant M, \quad \partial_t v - \Delta v \leqslant 0,$$

а значит, она удовлетворяет условиям предложения 5.2. Предположим, что для некоторых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполнено $r(x_1), r(x_2) \in (0, T_1)$, и $r(x_1) > r(x_2)$. Тогда $\{x_1\} \times (r(x_2), r(x_1)) \subset H^-$. Из непрерывности функции r на (a,b) следует, что множество

$$B = \operatorname{Int} H^- \cap ((a,b) \times (0, r(x_1)))$$

не пусто. Из предложения 5.2 следует, что

$$v(x,t) = M, \quad t < r(x_1), \quad x \in (a,b).$$

В частности, $u|_B = v|_B \equiv M$, а значит, $(\partial_t u - \Delta u)|_B = 0$, что противоречит (1.3). Пункт (i) доказан.

Пункт (ii)**.** Предположим противное. Не умаляя общности, для некоторого $x_1 \in (a,b)$ выполнено неравенство

$$t_1 = \limsup_{x \to x_1 -} r(x) > \limsup_{x \to x_1 +} r(x) = \tilde{t}_1. \tag{5.9}$$

Из непрерывности u и $\partial_x u$ и равенств (5.7), (5.8) следует, что

$$u(x_1, t_1) = \beta, \quad \partial_x u(x_1, t_1) = 0. \tag{5.10}$$

Из (5.9) следует, что существуют такие $x_2 \in (x_1, b)$ и $t_2 \in (\tilde{t}_1, t_1)$, что

$$r(x) < t_2, \quad x \in [x_1, x_2],$$

а значит, $(x_1, x_2) \times (t_2, t_1] \subset H^-$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Для некоторой точки $(x', t') \in (x_1, x_2) \times (t_2, t_1]$ выполнено равенство $u(x', t') = \beta$. Тогда из предложения 5.2 аналогично доказательству пункта (i) следует, что

$$u = \beta \quad \text{на } K = (x_1, x_2) \times (t_2, t'),$$

а значит, $(\partial_t u - \Delta u)|_K = 0$, что противоречит (1.3).

Случай 2. Выполнены неравенства

$$u(x,t) < \beta \quad \text{на } (x_1, x_2) \times (t_2, t_1].$$

Тогда из равенств (1.2), (1.3), (5.10) следует, что $u|_{(x_1,x_2)\times(t_2,t_1]}$ удовлетворяет условиям предложения 5.3. Следовательно $\partial_x u(t_1, x_1) < 0$, что противоречит (5.10).

Пункт (ii) доказан.

Докажем последнее утверждение теоремы. Обозначим

$$A = \mathrm{Int}(\{(x,t) : x \in (a,b), t \geqslant r(x)\}),$$
$$A_t = \{x \in (a,b) : (x,t) \in A\}.$$

Отметим, что для любого $t_0 \in (0,T)$ множество A_{t_0} открыто. Поэтому оно является объединением не более чем счетного количества интервалов:

$$A_{t_0} = \bigcup_i (x_i, y_i).$$

Покажем, что если $x_i \neq a$, то

$$u(x_i,t_0) = \beta, \quad \partial_x u(x_i,t_0) = 0. \tag{5.11}$$

Действительно, поскольку $(x_i,y_i) \times \{t_0\} \subset A$, то

$$r(x) < t_0, \quad x \in (x_i, y_i),$$

следовательно $\limsup\limits_{x\to x_i+} r(x) \leqslant t_0$. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. $\limsup\limits_{x\to x_i+} r(x) = t_0$. Из равенств (5.7), (5.8) ввиду непрерывности $\partial_x u$ следует (5.11).

Случай 2. $\limsup\limits_{x\to x_i+} r(x) = t_1 < t_0$. Из пункта (ii) следует, что

$$\limsup_{x\to x_i-} r(x) = t_1,$$

а значит существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$r(x) < t_0, \quad x \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon),$$

следовательно $x_i \in A_{t_0}$, противоречие.

Таким образом, (5.11) доказано.

Аналогично можно показать, что для $y_i \neq b$ выполнено

$$u(y_i,t_0) = \beta, \quad \partial_x u(y_i,t_0) = 0,$$

и таким образом

$$u(x,t_0) = \beta, \quad x \in \partial A_{t_0} \setminus \{a,b\}.$$

Пусть теперь x_0 – какая-нибудь точка из интервала (a,b). Заметим, что если $(x_0,t_1) \in H^-$, то $\{x_0\} \times (t_1,T_1) \subset H^-$. Поэтому для любого $x_0 \in (a,b)$ найдется $t_0 \geq 0$ такое, что $A \cap \{x = x_0\} = \{x_0\} \times (t_0,T_1)$.

Поскольку $\{x_0\}\times(t_0,T_1)\subset A$, то $\limsup\limits_{x\to x_0} r(x)\leqslant t_0$. Поскольку $(t_0,x_0)\notin A$, то $\limsup\limits_{x\to x_0} r(x)\geqslant t_0$. А значит, $\tilde r(x_0)=\limsup\limits_{x\to x_0} r(x)=t_0$ и следовательно

$$A=\{(x,t): x\in(a,b), t\geqslant \tilde r(x)\},$$

и из (5.7), (5.8) получаем ввиду непрерывности $\partial_x u$

$$u(x,\tilde r(x))=\beta,\quad \partial_x u(x,\tilde r(x))=0,\quad x\in(a,b).$$

Аналогично пункту (i) отсюда следует, что для некоторого $\tau\in(0,T_1)$ выполнено

$$\tilde r(x)=\tau,\quad x\in(a,b),\quad \text{и}\quad u(x,\tau)=\beta,\quad x\in(a,b),$$

и последнее утверждение доказано. □

Авторы признательны А. И. Назарову за чрезвычайно полезные обсуждения и замечания, которые способствовали существенному улучшению изложения.

Список литературы

1. М. А. Красносельский, А. В. Покровский, *Системы с гистерезисом*, Наука, М., 1983.
2. A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1994.
3. M. Brokate, J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Berlin, 1996.
4. F. C. Hoppensteadt, W. Jäger, *Pattern formation by bacteria*, in: Biological growth and spread, Lecture Notes in Biomath., **38**, 68–81 Springer, Berlin-New York, 1980.
5. F. C. Hoppensteadt, W. Jäger, C. Pöppe, *A hysteresis model for bacterial growth patterns*, in: Modelling of patterns in space and time (Heidelberg, 1983), Lecture Notes in Biomath., **55**, 123–134, Springer, Berlin, 1984.
6. D. E. Apushkinskaya, N. N. Uraltseva, *Free boundaries in problems with hysteresis.* — Philos. Trans. Roy. Soc. A, **373** (2015), 2050, 20140271, 10.
7. M. Curran, P. Gurevich, S. Tikhomirov, *Recent advance in reaction-diffusion equations with non-ideal relays*, in: Control of self-organizing nonlinear systems, Underst. Complex Syst., 211–234, Springer, Cham, 2016.
8. A. Visintin, *Evolution problems with hysteresis in the source term.* — SIAM J. Math. Anal. **17**, No. 5 (1986), 1113–1138.
9. H. W. Alt, *On the thermostat problem.* — Control Cybernet. **14**, No. 1–3 (1985), 171–193.
10. J. Kopfová, *Nonlinear semigroup methods in problems with hysteresis.* — Discrete Contin. Dyn. Syst. (2007), 580–589.
11. A. Visintin, *Ten issues about hysteresis.* — Acta Appl. Math. **132** (2014), 635–647.
12. P. Gurevich, R. Shamin, S. Tikhomirov, *Reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis.* — SIAM J. Math. Anal. **45**, No. 3 (2013), 1328–1355.

13. P. Gurevich, S. Tikhomirov, *Uniqueness of transverse solutions for reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis.* — Nonlinear Anal. **75**, No. 18 (2012), 6610–6619.
14. D. E. Apushkinskaya, N. N. Uraltseva, *On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem.* — Interfaces Free Bound. **17**, No. 1 (2015), 93–115.
15. P. Gurevich, S. Tikhomirov, *Rattling in spatially discrete diffusion equations with hysteresis.* — Multiscale Model. Simul. **15**, No. 3 (2017), 1176–1197.
16. P. Gurevich, S. Tikhomirov, *Spatially discrete reaction-diffusion equations with discontinuous hysteresis.* — Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire **35**, No. 4 (2018), 1041–1077.
17. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
18. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Изд. 3-е, перераб., Наука, М., 1984.
19. М.А. Шубин, *Лекции об уравнениях математической физики*, Изд. 2е, исправ., МЦНМО, М., 2003.
20. Н. В. Крылов, *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка*, Наука, 1985.
21. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *On the boundary point principle for divergence-type equations.* — Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **30**, No. 4 (2019), 677–699.
22. A. I. Nazarov, *A centennial of the Zaremba-Hopf-Oleinik lemma.* — SIAM J. Math. Anal. **44**, No. 1 (2012), 437–453.

Apushkinskaya D. E., Tikhomirov S. B., Uraltseva N. N. Properties of the phase boundary in the parabolic problem with hysteresis.

We study solutions of parabolic equations with a discontinuous hysteresis operator, described by a free interface boundary. It is established that for spatially transverse initial data from the space $W_q^{2-2/q}$ with $q > 3$, there exists a solution in the space $W_q^{2,1}$, where the interface boundary exhibits Holder continuity with an exponent of $1/2$. Furthermore for initial data from the space W_∞^2, it is proven that the interface boundary satisfies the Lipschitz condition. It is shown that for non-transversal initial data, solutions with an interface boundary do not exist.

Российский университет
дружбы народов, г. Москва
E-mail: apushkinskaya@gmail.com

Поступило 24 ноября 2024 г.

Pontificia Universidade Católica do Rio
de Janeiro - PUC-Rio, г. Рио де Жанейро
E-mail: sergey.tikhomirov@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный
университет, г. Санкт-Петербург
E-mail: uraltsev@pdmi.ras.ru