Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

Ю. В. Якубович

РОСТ СЛУЧАЙНЫХ РАЗБИЕНИЙ ПУТЕМ ДОБАВЛЕНИЯ ЧАСТЕЙ: СЛУЧАЙ СТЕПЕННЫХ ВЕСОВ

§1. Введение

В этой статье мы изучаем случайные разбиения, распределенные в соответствии с обобщенной мерой Ювенса[1]. Напомним, что разбиение λ неотрицательного целого числа n – это его представление в виде суммы $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$ положительных целых чисел. Порядок слагаемых (часто называемых *частями*) не имеет значения. Принято упорядочивать их так, чтобы $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$, здесь предполагается, что $\lambda_j = 0$ для $j > \ell$. Количество положительных частей $\ell = \ell(\lambda)$ называется *длиной* разбиения λ, тот факт, что λ является разбиением n, обозначается $\lambda \vdash n$ или $|\lambda| = n$. Мы также используем обозначение $\mathcal{P}_n$ для множества всех разбиений n. Разбиение λ можно описать и другим способом, задав последовательность *счетчиков частей*

$$c_k(\lambda) = \#\{j : \lambda_j = k\}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Очевидно,

$$|\lambda| = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k(\lambda) \quad \text{и} \quad \ell(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda). \tag{1}$$

Обобщенное распределение Ювенса на $\mathcal{P}_n$ параметризуется последовательностью $(\theta_k)_{k\geqslant 1}$ неотрицательных вещественных чисел (обычно одной и той же для всех n) и определяется равенством

$$P^n(\lambda) := \frac{1}{h_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta_k^{c_k(\lambda)}}{k^{c_k(\lambda)} c_k(\lambda)!}, \qquad \lambda \in \mathcal{P}_n, \tag{2}$$

Ключевые слова: Случайное разбиение целого числа, распределение Ювенса, усиленный закон больших чисел, предельная форма.

Результаты получены в рамках реализации государственной программы федеральной территории “Сириус” “Научно-технологическое развитие федеральной территории “Сириус”.

[1]В русскоязычной литературе фамилию Ewens иногда записывают Эвенс (например, [19]). Мы следуем написанию, принятому в переводе книги [16].

где нормирующий множитель (статсумма) это

$$h_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta_k^{c_k(\lambda)}}{k^{c_k(\lambda)} c_k(\lambda)!}. \tag{3}$$

(В (2) мы предполагаем $h_n > 0$, что может оказаться неверным для некоторых значений n, поскольку мы допускаем $\theta_k = 0$ для каких-то k; если $h_n = 0$, то P^n не определено, см. замечание 2 далее.)

Для постоянной последовательности $\theta_k \equiv \theta > 0$ мы получаем распределение Ювенса как частный случай. Эти распределения появились в математической популяционной генетике [7] в 1972 году и с тех пор активно изучались. Многие результаты и ссылки можно найти в книге [1]. Случай $\theta = 1$ имеет явную и естественную комбинаторную интерпретацию: P^n – это проекция равномерного распределения на симметрической группе S_n при отображении, которое переводит перестановку $\pi \in S_n$ в набор длин циклов π, то есть в разбиение числа n. Возможно, по этой причине некоторые авторы определяют (обобщенное) распределение Ювенса как распределение на S_n, что делает его некоторой естественной деформацией равномерной меры. Для наших целей более естественно рассматривать его как распределение на разбиениях, и мы принимаем это соглашение в этой статье.

Обобщенное распределение Ювенса изучалось несколькими авторами под разными названиями. Одно из возможных приложений возникает, если взять $\theta_k = 1$ при $k \in A$ для некоторого множества $A \subset \mathbb{N}$, и $\theta_k = 0$ в противном случае. Это приводит к равномерной мере на перестановках из S_n с длинами циклов, лежащими в A (так называемые A-перестановки), и ее проекции на $\mathcal{P}_n$, см. [19] и ссылки в этой работе. Другие применения появляются в комбинаторике [1,2] и статистической физике [3, 6]. Естественно, асимптотическое поведение мер P^n сильно зависит от поведения последовательности (θ_k), см., однако, замечание 1 ниже. Когда обобщенное распределение Ювенса появляется в прикладных задачах, часто оказывается, что $\theta_k \sim ck^\alpha$ при $k \to \infty$, для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $c > 0$; иногда константа c заменяется медленно меняющейся функцией от k. Эти и некоторые другие типы поведения (θ_k) изучались в [6]. Некоторые аспекты степенного случая с $\alpha \leqslant 0$ исследовал Якымив [18], хотя предположения там несколько отличаются. Случай $\alpha = 0$ подробно рассматривается как частный случай логарифмических комбинаторных структур в книге [1]. Результаты для

$\alpha > 0$ можно найти в [5, 11, 12]. В этой статье мы также рассматриваем степенной случай с $\alpha > 0$, но накладываем менее ограничительное условие в терминах производящей функции

$$\theta(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \, x^{k-1}. \tag{4}$$

А именно, мы предполагаем, что

$$\theta(x) = \frac{\ell(\frac{1}{1-x})}{(1-x)^{\beta}} \quad \text{при} \quad x \uparrow 1, \qquad\qquad \beta > 1, \tag{5}$$

где функция ℓ медленно меняется на ∞, то есть $\ell(Cy)/\ell(y) \to 1$ при $y \to \infty$ для любой постоянной $C > 0$. Из условия $\theta_k \sim ck^{\alpha}$ вытекает (5) с $\beta = \alpha{+}1$ и $\ell(z) \to c\Gamma(\alpha{+}1)$ при $z \to \infty$. По сути условие (5) фиксирует асимптотическое поведение частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} \theta_k \sim n^{\beta}\ell(n)/\Gamma(\beta{+}1)$ при $n \to \infty$, см. следствие 1.7.3 в [4].

Хотя предположение (5) требуется для многих приведенных ниже результатов, некоторые из них имеют более общую природу и справедливы только при предположении, что $\theta(x)$ является аналитической функцией в некоторой окрестности нуля.

Замечание 1. Замена θ_k на $r^k\theta_k$ для любого $r > 0$ не меняет меру P^n. Это называется *перекашиванием* (tilting) в [2]. Действительно, в силу (1) после перекашивания произведение в (2) умножается на r^n для всех $\lambda \in \mathcal{P}_n$, и при нормировании этот множитель сокращается. Таким образом, (5) можно заменить формально более общим предположением, что $\theta(x)$ регулярно меняется с индексом $\beta > 1$ в окрестности своего радиуса сходимости $r > 0$. Однако это не меняет класс допустимых распределений.

Важную роль в нашем исследовании играют распределения степенного ряда. Напомним, что степенному ряду $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n x^n$ с неотрицательными коэффициентами и положительным радиусом сходимости r (возможно, бесконечным) можно сопоставить семейство распределений $PS_x^{\phi(\,\cdot\,)}$ на $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$, параметризованное $x \in (0, r)$, положив

$$PS_x^{\phi(\,\cdot\,)}(\{n\}) := \frac{\phi_n x^n}{\phi(x)}, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \quad x \in (0, r). \tag{6}$$

Эти распределения называют *распределениями степенного ряда*, многие часто встречающиеся распределения, например, биномиальное, отрицательное биномиальное или Пуассона, допускают представление (6). Заметим, что все семейство $PS_x^{\phi(\,\cdot\,)}$ можно рассматривать как перекашивание одного распределения $PS_1^{\phi(\,\cdot\,)}$ в смысле замечания 1.

Меры P^n обладают следующим удобным свойством. Благодаря структуре произведения (2) можно выбрать случайную величину $N(x)$ со значениями в $\mathbb{N}_0$ и распределением, зависящим от положительного параметра x, так что количества частей $c_k(\lambda)$ становятся независимыми при смешанном распределении $P_x(\lambda) := P^{N(x)}(\lambda)$. Распределение $N(x)$ имеет распределение степенного ряда $PS_x^{H(\,\cdot\,)}$, связанное со степенным рядом $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$. По формуле полной вероятности для любого разбиения $\lambda \in \mathcal{P} := \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ произвольного целого числа можно найти

$$\begin{aligned} P_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n x^n}{H(x)} P^n(\lambda) &= \frac{x^{|\lambda|}}{H(x)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_k^{c_k(\lambda)}}{k^{c_k(\lambda)} c_k(\lambda)!} \\ &= \frac{1}{H(x)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(x^k \theta_k)^{c_k(\lambda)}}{k^{c_k(\lambda)} c_k(\lambda)!}, \end{aligned} \tag{7}$$

потому что $P^n(\lambda) \neq 0$ только для $n = |\lambda|$. Последнее равенство следует из (1). Из (7) ясно, что счетчики c_k независимы относительно распределения P_x, c_k имеет распределение Пуассона с параметром $x^k \theta_k / k$ и $H(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp(x^k \theta_k / k)$; подробности см. в разделе 2. В частности, при предположении (5) $H(x)$ имеет радиус сходимости 1 и, следовательно, P_x корректно определено при $x \in (0,1)$. Можно посмотреть на эту конструкцию и в противоположном направлении: меры P^n являются условными распределениями последовательности независимых случайных величин c_k при условии, что взвешенная сумма $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k$ равняется n, см. (1). Мы кратко упомянем, что аналогичный подход может быть применен к более широкому классу вероятностных распределений на разбиениях целых чисел, для которых счетчики c_k не обязательно имеют распределения Пуассона (такие распределения иногда называют мультипликативными мерами), см. [14, 15].

Появление в этой конструкции "свободного" параметра x делает естественной следующую схему исследования различных асимптотических свойств мер P^n при $n \to \infty$. Сначала мы изучаем те же свойства для мер P_x, используя независимость c_k. Затем мы выбираем параметр $x = x(n)$ так, чтобы $P_{x(n)}$ вели себя подобно P^n в определенном смысле, и переводим результат для $P_{x(n)}$ в соответствующий результат для P^n. Эта схема используется в большинстве работ по обобщенным мерам Ювенса, явно или неявно; в последнем случае она обычно скрыта под манипуляциями с производящими функциями, а выбор $x = x(n)$ соответствует выбору седловой точки при определенных вычислениях.

В любом случае в этих конструкциях x рассматривается как параметр. Наш подход иной: мы думаем о x как о времени, которое растет от 0 до 1, и о счетчиках c_k с пуассоновскими распределениями, индуцированными P_x, как о значениях независимых пуассоновских процессов $\rho_k(x)$ с накопленной интенсивностью $\theta_k x^k/k$. Это позволяет нам определить процесс $\Lambda(x) \in \mathcal{P}$, $x \in [0, 1)$, со значениями на разбиениях целых чисел, такой что $c_k(\Lambda(x)) = \rho_k(x)$. Этот процесс стартует в $\Lambda(0) = \varnothing$ и возрастает: в каждой точке x, в которой один из процессов Пуассона $\rho_k(x)$ делает скачок, причем такой процесс только один почти наверное (п.н.), часть k добавляется к разбиению $\Lambda(x-0)$. Случайное разбиение $\Lambda(x)$ имеет распределение P_x для любого $x \in [0, 1)$. Поскольку $P_x\big(\lambda \mid |\lambda| = n\big) = P^n(\lambda)$ для всех $x \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathcal{P}$ и любого $n \geqslant 0$, при условии, что $|\Lambda(x)| = n$ для некоторого x, условное распределение $\Lambda(x)$ есть P^n.

Траекторию процесса $\Lambda(x)_{x\in[0,1)}$ можно п.н. определить по двум объектам: последовательности моментов времени $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < 1$, в которые процесс совершает скачок, и последовательности $K_1, K_2, \ldots$ частей, которые добавляются одна за другой к разбиению. Таким образом, разбиение $\Lambda(x)$ имеет части $K_1, \ldots, K_\ell$, где $\ell = \max\{j : \xi_j \leqslant x\}$. В этом контексте естественно говорить о случайной композиции $n = K_1 + \cdots + K_\ell$. Из следствия 2 ниже следует, что перевернутая случайная композиция $n = K_\ell + \cdots + K_1$ является регенеративной (regenerative) в смысле [8]. Это означает, что ее хвостовые суммы $K_{\ell-j} + K_{\ell-j-1} + \cdots + K_1$ $(j = 0, \ldots, \ell)$ являются траекториями убывающей цепи Маркова на $\mathbb{N}_0$ со стационарными вероятностями перехода, начальным состоянием n и поглощающим состоянием 0. Однако, используя результаты Керова [10], можно проверить, что распределения P^n не являются согласованными [8] и, таким образом, не образуют структуру композиций, основной предмет исследования статьи [8], кроме случая $\theta_k \equiv \theta$, то есть распределения Ювенса, который исключается из нашего рассмотрения требованием $\beta > 1$ в (5).

Подход, при котором x играет роль времени, а не параметра, и определение процесса $(\Lambda(x))_{x\in[0,1)}$, то есть семейства случайных разбиений, заданных на одном вероятностном пространстве, и для которого распределения P_x являются одномерными распределениями, имеет свои преимущества. В частности, он позволяет говорить о сильных предельных теоремах для $\Lambda(x)$ при $x \uparrow 1$. В этой статье мы рассматриваем только усиленные законы больших чисел для некоторых характеристик случайного разбиения, таких как их размер $|\Lambda(x)|$ (предложение 4) или соответствующая им диаграмма Юнга $Y_{\Lambda(x)}$ (теорема 2). Мы также исследуем процесс скачков цепи Маркова с непрерывным временем $(\Lambda(x))_{x\in[0,1)}$, то есть последовательность разбиений, которые посещает $(\Lambda(x))_{x\in[0,1)}$. Этот процесс скачков оказывается цепью Маркова со стационарными вероятностями перехода, для которой мы также доказываем некоторые усиленные законы больших чисел (теорема 1, следствие 3). Эти результаты о существовании п.н. неслучайных пределов для некоторых функционалов от $\Lambda(x)$ позволяют нам установить существование предельной формы для обобщенных мер Ювенса P^n (теорема 3). Этот результат не новый. Для класса регулярно меняющихся последовательностей (θ_k) он доказан в [5] (вместе с более сильными результатами о флуктуациях), тогда как при менее ограничительном предположении, близком к (5), это следует из общего исследования существования предельных форм для мультипликативных мер на разбиениях в [14].

Оставшаяся часть этой статьи организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим процесс $(\Lambda(x))_{x\in[0,1)}$ со значениями в множестве $\mathcal{P}$ разбиений целых чисел и изучаем некоторые его свойства. Затем в разделе 3 мы исследуем его процесс скачков и другие связанные с ним процессы скачков, которые оказываются цепями Маркова со стационарными вероятностями перехода. Раздел 4 посвящен предельным теоремам для моментов скачков и для размеров новых частей, добавляемых к разбиению, по мере того как размер разбиения возрастает к бесконечности. В разделе 5 мы доказываем усиленные законы больших чисел для некоторых характеристик случайного разбиения $\Lambda(x)$ при $x \uparrow 1$ и для соответствующих цепей скачков. Наконец, в разделе 6 мы доказываем, что диаграмма Юнга случайного разбиения $\Lambda(x)$ после соответствующего масштабирования приближается к предельной форме п.н. при $x \uparrow 1$, и используем этот результат для вывода того, что предельная форма существует также для распределений P^n при $n \to \infty$.

§2. Построение случайных разбиений на основе пуассоновских процессов

Рассмотрим последовательность $(\theta_k)_{k \geqslant 1}$ неотрицательных действительных чисел, такую что ряд (4) сходится при $|x| < 1$ и удовлетворяет предположению (5). Пусть $\rho_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, $x \in [0, 1)$, – последовательность независимых пуассоновских процессов с интенсивностью $\theta_k x^{k-1} dx$ в точке x, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Для заданного времени $x \in [0, 1)$ значения $\rho_k(x)$ имеют распределение Пуассона со средним $\theta_k x^k / k$ и являются независимыми. Сумма этих процессов

$$\rho(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(x)$$

также будет пуассоновским процессом с интенсивностью $\theta(x) dx$ в x, где $\theta(x)$ определено равенством (4), см. [16]. Поэтому $\rho(x)$ имеет распределение Пуассона со средним

$$\Theta(x) := \int_0^x \theta(y)\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_k x^k}{k}. \tag{8}$$

Так как $\lim_{x \uparrow 1} \Theta(x) = \infty$ в силу условия $\beta > 1$ в (5), процесс $\rho(x)$ п.н. стремится к ∞ в финальный момент $x = 1$. Мы пишем ρ и ρ_k без аргументов для соответствующих точечных процессов Пуассона, которые понимаются как случайный конечный или счетный набор точек, в которых процесс совершает скачок.

Пусть $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots$ – это точки точечного процесса $\rho = \cup_{k=1}^{\infty} \rho_k$, то есть

$$\xi_j = \inf\{x \in [0, 1) : \rho(x) \geqslant j\}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Положим $K_j = k$, если точка ξ_j лежит в точечном процессе ρ_k, такое k единственно п.н. Заметим, что условная вероятность $\{K_j = k\}$ при заданном ξ_j пропорциональна плотности $\rho_k(x)$ при $x = \xi_j$, и, таким образом, условное распределение K_j при заданном ξ_j есть распределение степенного ряда $PS^{\phi(\cdot)}_{\xi_j}$, связанное со степенным рядом $\phi(x) = x\,\theta(x)$:

$$\mathbb{P}(K_j = k|\xi_j) = \frac{\theta_k \xi_j^{k-1}}{\theta(\xi_j)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

При $x \in [0, 1)$ определим $\Lambda(x)$ как случайное разбиение с частями $K_1, \ldots, K_{\rho(x)}$. По построению имеем $\xi_{\rho(x)} \leqslant x < \xi_{\rho(x)+1}$ (здесь $\xi_0 = 0$). При увеличении x до новой точки $\xi_{\rho(x)+1}$, которая принадлежит ρ_k для некоторого k, новая часть $k = K_{\rho(x)+1}$ добавляется к $\Lambda(x)$.

Из свойства независимости точечного процесса Пуассона, процесс $\Lambda(x)_{x\in[0,1)}$ со значениями в множестве $\mathcal{P}$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Его траектории возрастают, то есть для $x_1 \leqslant x_2$ разбиение $\Lambda(x_2)$ включает те же части, что и $\Lambda(x_1)$, и, возможно, некоторые другие части. Распределение $\Lambda(x)$ для заданного $x \in (0, 1)$ равно P_x, определенное формулой (7), в которой

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \exp \frac{\theta_k x^k}{k} = \mathrm{e}^{\Theta(x)}, \tag{11}$$

и $\Theta(x)$ задается формулой (8). Следовательно, если предположение (5) выполнено, то число частей $\ell(\Lambda(x)) = \rho(x)$ имеет распределение Пуассона со средним $\Theta(x)$ и возрастает к ∞ п.н. при $x \uparrow 1$.

Наряду с возрастающим процессом $\Lambda(x)$, мы рассмотрим убывающий процесс, который является его обращением во времени. Чтобы избежать трудностей с начальным распределением, мы определим семейство процессов $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y)_{y\in[0,1-\zeta]}$, параметризованное $\zeta \in (0, 1)$ как

$$\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y) = \Lambda(1 - \zeta - y), \qquad y \in [0, 1 - \zeta]. \tag{12}$$

Стартовав со случайного разбиения $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(0) = \Lambda(1 - \zeta)$, этот процесс уменьшается, отбрасывая части одну за другой, пока не достигнет пустого разбиения $\varnothing$, которое является его единственным поглощающим состоянием. Его пространство состояний $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(x)_{x\in[0,\zeta]}$ есть все $\mathcal{P}$ и, значит, счетно, но для любого $\lambda \in \mathcal{P}$ при заданном $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(0) = \lambda$ имеет место $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(x) \in \mathcal{P}(\subset \lambda)$ для всех $x \in [0, \zeta]$ (условно) п.н., где $\mathcal{P}(\subset \lambda) = \{\mu \in \mathcal{P} : c_k(\mu) \leqslant c_k(\lambda)\ \forall k\}$ является конечным множеством. Это делает исследование этих обращенных во времени цепей особенно простым. Мы используем эти цепи в основном в качестве технического инструмента, однако соответствующая цепочка прыжков имеет очень естественное описание, см. лемму 3 ниже.

Для начала установим явно, что это непрерывная по времени цепь Маркова, хотя это также следует из общих результатов [13]. Для разбиения λ с $c_k(\lambda) > 0$ обозначим $\lambda \setminus k$ разбиение λ с удаленной одной частью k, так что $c_k(\lambda \setminus k) = c_k(\lambda) - 1$ и $c_j(\lambda \setminus k) = c_j(\lambda)$ для $j \neq k$.

Лемма 1. *Для любого $\zeta \in (0,1)$, $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y)_{y\in[1,1-\zeta]}$ является цепью Маркова с непрерывным временем, с пространством состояний $\mathcal{P}$, начальным распределением $P_{1-\zeta}$ и (нестационарной) интенсивностью скачка от $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y) = \lambda$ до $\lambda \setminus k$, которая равна $kc_k(\lambda)/(1-\zeta-y)$ в момент времени y. Следовательно, общая интенсивность скачка в состоянии λ в момент времени y равна $|\lambda|/(1-\zeta-y)$.*

Доказательство. Начальное распределение случайного разбиения $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(0)$ есть $P_{1-\zeta}$ в силу определения (12). Пусть $\lambda \vdash n$ – разбиение n, такое что $c_k(\lambda) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\Lambda(x-\delta) = \lambda \setminus k, \Lambda(x) = \lambda)\\
&\qquad = \mathbb{P}(\Lambda(x) = \lambda | \Lambda(x-\delta) = \lambda \setminus k)\mathbb{P}(\Lambda(x-\delta) = \lambda \setminus k)\\
&\qquad \sim \theta_k x^{k-1}\delta \cdot \mathrm{e}^{-\Theta(x)} x^{n-k}\frac{kc_k(\lambda)}{\theta_k}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\theta_j^{c_j(\lambda)}}{j^{c_j(\lambda)}c_j(\lambda)!}, \quad \delta \downarrow 0,
\end{aligned}$$

где $\frac{kc_k(\lambda)}{\theta_k}$ компенсирует множитель с $c_k(\lambda)$ вместо $c_k(\lambda \setminus k) = c_k(\lambda) - 1$ в произведении при $j = k$. Разделив на $\mathbb{P}(\Lambda(x) = \lambda)$, которое задается (7), и взяв $x = 1 - \zeta - y$, видим, что при условии $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y) = \lambda$ процесс переходит к любому разбиению $\mu = \lambda \setminus k$ с интенсивностью $kc_k(\lambda)/(1-\zeta-y)$. В силу (1), общая интенсивность перехода составляет $|\lambda|/(1-\zeta-y)$. $\square$

Интенсивности цепи Маркова с непрерывным временем $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y)$ в состоянии λ (кроме состояния $\lambda = \varnothing$) не являются стационарными и возрастают к ∞ при $y \uparrow 1-\zeta$, что отражает тот факт, что все части отбрасываются к моменту $y = 1-\zeta$ и $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(1-\zeta) = \varnothing$ п.н.

При $n = 0, 1, \ldots$ положим

$$\chi_n^+ = \inf\bigl(\{x \in [0,1) : \Lambda(x) \in \mathcal{P}_n\} \cup \{1\}\bigr), \tag{13}$$

$$\chi_n^- = \sup\bigl(\{0\} \cup \{x \in [0,1) : \Lambda(x) \in \mathcal{P}_n\}\bigr). \tag{14}$$

Тогда события $\chi_n^+ < 1$ или $\chi_n^- > 0$ означают, что цепь Маркова с непрерывным временем $\Lambda(x)_{x\in[0,1)}$ посещает некоторое разбиение из $\mathcal{P}_n$, входит в это разбиение в момент времени $x = \chi_n^+$ и покидает его в момент времени χ_n^-. В противном случае $\chi_n^+ = 1$ и $\chi_n^- = 0$. Заметим, что $\chi_0^+ = 0$, а множества $\{\chi_n^+ : n \geqslant 1, \chi_n^+ < 1\} = \{\chi_n^- : n \geqslant 0, \chi_n^- > 0\}$ являются в точности точками точечного процесса Пуассона ρ, то есть $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$.

Используя убывающие цепи $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y)$, легко найти совместное распределение (χ_n^+, χ_n^-), и, следовательно, вероятности посещения $\mathbb{P}(\chi_n^+ < 1) = \mathbb{P}(\chi_n^- > 0)$ уровней $\mathcal{P}_n$ цепью Маркова $|\Lambda(x)|_{x\in[0,1)}$.

Предложение 1. *Вероятность того, что цепь Маркова $(\Lambda(x))_{x\in[0,1)}$ посещает какое-то разбиение числа $n \geqslant 0$ – это*

$$g_n := \mathbb{P}(\exists x \in [0,1) : \Lambda(x) \in \mathcal{P}_n) = h_n u_n, \tag{15}$$

где h_n определено равенствами (3) *или, альтернативно,* (11), *а*

$$u_n = \int_0^1 x^n \theta(x)\, \mathrm{e}^{-\Theta(x)}\, dx. \tag{16}$$

При $n = 0$, $\chi_0^+ = 0$ п.н., а χ_n^- имеет плотность (19). *При $n \geqslant 1$, (χ_n^+, χ_n^-) имеет атом размера $1 - g_n$ в $(1,0)$, а исключая этот атом, совместное распределение (χ_n^+, χ_n^-) абсолютно непрерывно с совместной условной плотностью*

$$\frac{d^2}{dx_1 dx_2}\mathbb{P}\big(\chi_n^+ \leqslant x_1, \chi_n^- \leqslant x_2 \,|\, \chi_n^+ \neq 1\big) = \frac{n x_1^{n-1}\theta(x_2)\, \mathrm{e}^{-\Theta(x_2)}}{u_n}, \quad 0 < x_1 < x_2 < 1. \tag{17}$$

Кроме того, частные распределения имеют условные плотности

$$\frac{d}{dx}\mathbb{P}\big(\chi_n^+ \leqslant x | \chi_n^+ \neq 1\big) = \frac{n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\Theta(x)}}{u_n}, \qquad x \in (0,1),\ n \geqslant 1, \tag{18}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbb{P}\big(\chi_n^- \leqslant x | \chi_n^- \neq 0\big) = \frac{x^n \theta(x)\, \mathrm{e}^{-\Theta(x)}}{u_n}, \qquad x \in (0,1),\ n \geqslant 0. \tag{19}$$

Доказательство. Поскольку $\Lambda(0) = \varnothing$, видим, что $\chi_0^+ = 0$ п.н. и $\chi_0^- = \xi_1$, то есть это первая точка пуассоновского точечного процесса ρ, которая имеет плотность $\theta(x)\,\mathrm{e}^{-\Theta(x)}$, что совпадает с (19) при $n = 0$. В остальной части доказательства мы предполагаем, что $n \geqslant 1$. Для любого разбиения $\lambda \vdash n$, $0 < x < 1-\zeta$ и $\delta \in (0, x)$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\Lambda(x) = \lambda,\, \chi_n^+ \in (x-\delta, x]\big) = \mathbb{P}\big(\Lambda(x) = \lambda,\, \Lambda(x-\delta) \neq \lambda\big) \\
&\quad = \mathbb{P}\big(\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(1-\zeta-x) = \lambda,\, \widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(1-\zeta-x+\delta) \neq \lambda\big) \\
&\quad \sim \mathbb{P}\big(\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(1-\zeta-x) = \lambda\big) \frac{n\delta}{1-\zeta-(1-\zeta-x)} = P_x(\lambda)\frac{n\delta}{x}, \quad \delta \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Асимптотическая эквивалентность в последней строке следует из леммы 1. Используя представление

$$P_x(\lambda) = \mathbb{P}(|\Lambda(x)| = n) P^n(\lambda) = \mathrm{e}^{-\Theta(x)} h_n x^n P^n(\lambda), \qquad \lambda \in \mathcal{P}_n,$$

которое получается комбинированием (7) и (11), и суммируя по $\lambda \in \mathcal{P}_n$, получаем

$$\mathbb{P}\big(\Lambda(x) \in \mathcal{P}_n,\, \chi_n^+ \in (x-\delta, x]\big) \sim \mathrm{e}^{-\Theta(x)} h_n x^{n-1} n\delta, \quad \delta \downarrow 0,$$

поскольку $P^n(\mathcal{P}_n) = 1$. Так как если $\chi_n^+ < 1$, то $\Lambda(\chi_n^+) \in \mathcal{P}_n$ и $\Lambda(x)$ остается в $\mathcal{P}_n$ некоторое п.н. положительное случайное время и после χ_n^+, то $\mathbb{P}\big(\Lambda(x) \in \mathcal{P}_n, \chi_n^+ \in (x-\delta, x]\big) \sim \mathbb{P}\big(\chi_n^+ \in (x-\delta, x]\big)$ при $\delta \downarrow 0$. Таким образом, плотность χ_n^+ в x равна $nh_n x^{n-1}\mathrm{e}^{-\Theta(x)}$, и интегрирование по $x \in [0,1)$ дает (15) с $u_n = n\int\limits_0^1 x^{n-1}\mathrm{e}^{-\Theta(x)}dx$. Выражение (16) для u_n получается интегрированием по частям с использованием $\Theta'(x) = \theta(x)$ и остается верным также в случае $n = 0$. Поскольку $\chi_n^+ \in [0,1]$ по построению, условная плотность задается как (18).

Для любых $0 < x_1 < x_2 < 1$ вероятность того, что $\Lambda(x)$ не имеет скачков в (x_1, x_2) и имеет скачок в $[x_2, x_2+\delta]$ эквивалентна величине $\mathrm{e}^{\Theta(x_1)-\Theta(x_2)}\theta(x_2)\delta$ при $\delta \downarrow 0$, поскольку $\Lambda(x)$ имеет скачки в тех же точках, что и процесс Пуассона $\rho(x)$, $\Theta(x)$ – это накопленная интенсивность $\rho(x)$, а $\theta(x) = \Theta'(x)$ – его плотность. Это наблюдение вместе с (18) дает (17). Наконец, (19) получается из (17) интегрированием по $x_1 \in [0, x_2]$. $\square$

Замечание 2. Возможно, что $\mathbb{P}(\exists x \in [0,1) : \Lambda(x) \in \mathcal{P}_n) = 0$ для некоторого n. Поскольку $u_n > 0$ для всех n, это означает, что $h_n = 0$ в этом случае. Следовательно, P^n не определено для таких n, см. (2). Это вполне может происходить, поскольку мы не запрещаем $\theta_k = 0$ для некоторых k. Например, если $\theta_k = 0$ для всех нечетных k, то $\Theta(x)$, а значит, и $\mathrm{e}^{\Theta(x)}$ являются аналитическими функциями x^2 и, следовательно, $h_n = 0$ для всех нечетных n. Тогда меры P^n не определены для нечетных n. Однако такие арифметические препятствия не влияют на наши результаты, поэтому мы не вводим дополнительных условий на множество $\{k : \theta_k > 0\}$ как это часто делается.

§3. Цепи скачков

Марковские цепи с непрерывным временем

$$\Lambda(x)_{x\in[0,1)} \quad \text{и} \quad \widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y)_{y\in[0,1-\zeta]}$$

имеют нестационарные интенсивности перехода. Однако оказывается, что вероятности перехода соответствующих цепей скачков $(\Lambda_j)_{j=0,1,\dots}$ и $(\widehat{\Lambda}_j^{(\zeta)})_{j=0,1,\dots,\rho(1-\zeta)}$ стационарны. Это устанавливается в следующих двух леммах.

Лемма 2. *Для любого $r \geqslant 1$ и произвольных $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(K_1 = k_1, \dots, K_r = k_r) = u_{n_r} \prod_{j=1}^{r} \frac{\theta_{k_j}}{n_j}, \tag{20}$$

где u_n определено равенством (16) *и*

$$n_j = k_1 + \dots + k_j \tag{21}$$

– это частичные суммы k_j.

Доказательство. При $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_r < 1$ и $0 < \delta < \min\{x_j - x_{j-1}, j = 1, \dots, r\}$ вероятность того, что каждый из интервалов $[x_j, x_j + \delta]$ содержит одну точку ρ, точка в $[x_j, x_j + \delta]$ принадлежит ρ_{k_j}, и нет других точек ρ, меньших чем x_r, эквивалентна, при $\delta \downarrow 0$,

$$\prod_{j=1}^{r} \bigl(e^{-(\Theta(x_j)-\Theta(x_{j-1}))}\theta_{k_j} x_j^{k_j-1}\delta\bigr) = \delta^r e^{-\Theta(x_r)} \prod_{j=1}^{r} \theta_{k_j} x_j^{k_j-1}.$$

Устремляя $\delta \downarrow 0$ и интегрируя по $0 < x_1 < \dots < x_r < 1$, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(K_1 = k_1, \dots, K_r = k_r) \\
&= \Bigl(\prod_{j=1}^{r} \theta_{k_j}\Bigr) \int_0^1 e^{-\Theta(x_r)} x_r^{k_r-1} dx_r \int_0^{x_r} x_{r-1}^{k_{r-1}-1} dx_{r-1} \cdots \int_0^{x_2} x_1^{k_1-1} dx_1 \\
&= \Bigl(\prod_{j=1}^{r} \theta_{k_j}\Bigr) \frac{1}{k_1(k_1+k_2)\cdots(k_1+\dots+k_{r-1})} \int_0^1 e^{-\Theta(x)} x^{k_1+\dots+k_r-1} dx,
\end{aligned}$$

откуда (20) выводится заменой обозначений. □

Следствие 1. *Последовательность* $N_j = K_1 + \cdots + K_j$, $r = 0, 1, \ldots,$ *– это марковская цепь на* $\mathbb{N}_0$, *начинающаяся в* $N_0 = 0$ *и имеющая стационарные вероятности переходов*

$$q_{n,n+k} := \mathbb{P}(N_{j+1} = n + k \mid N_j = n) = \frac{u_{n+k}\,\theta_k}{(n+k)\,u_n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

если только $\mathbb{P}(N_j = n) > 0$, *где* u_n *определено равенством* (16).

Доказательство. Для $j = 0$ имеем $N_0 = 0$ п.н., и (22) при $n = 0$ и $u_0 = 1$ есть просто равенство (20), в котором мы берем $r = 1$ и $k_1 = n_1 = k$. Для бóльших значений j выражение (22) получается сокращением членов в соотношении (20) для $r = j + 1$ и $r = j$, так как результат зависит только от значения N_j, а не от его композиции $(K_1, \ldots, K_j)$. □

Траектория $(N_0, N_1, \ldots, N_j)$ полностью определяет случайное разбиение Λ_j числа N_j: Λ_j имеет j частей $K_i = N_i - N_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, j$. Следующее разбиение Λ_{j+1} определяется разбиением Λ_j и следующим значением N_{j+1}: оно получается добавлением новой части $K_{j+1} = N_{j+1} - N_j$ к Λ_j. Распределение новой части задается (22) и зависит только от $N_j = |\Lambda_j|$ из-за марковского свойства последовательности (N_j).

Для $\zeta \in (0,1)$ цепь Маркова с непрерывным временем $(\Lambda(x))_{x \in [0, 1-\zeta]}$ делает ровно $\rho(1-\zeta)$ скачков, и, значит, ее обращение во времени $(\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(x))_{x \in [0,1-\zeta]}$ также имеет $\rho(1-\zeta)$ скачков, а цепь скачков в обратном времени $(\widehat{\Lambda}_j^{(\zeta)})_{j = 0, \ldots, \rho(1-\zeta)}$ можно записать как $\widehat{\Lambda}_j^{(\zeta)} = \Lambda_{\rho(1-\zeta)-j}$, $j = 0, 1, \ldots, \rho(1-\zeta)$. Оказывается, она имеет простое описание и зависит от последовательности (θ_k) только через свое начальное распределение.

Лемма 3. *Для любого* $\zeta \in (0,1)$ *убывающая цепь скачков* $\bigl(\widehat{\Lambda}_j^{(\zeta)}\bigr)_{j=0,1,\ldots,\rho(1-\zeta)}$ *является цепью Маркова с начальным распределением* $P_{1-\zeta}$ *и стационарными вероятностями перехода*

$$\widehat{p}_{\lambda,\mu} = \begin{cases} \frac{k c_k(\lambda)}{|\lambda|}, & \mu \text{ получено из } \lambda \text{ удалением одной части } k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{23}$$

Другими словами, на каждом шаге цепи $(\widehat{\Lambda}_j^{(\zeta)})$ *из текущего разбиения выбирается одна часть с вероятностями, пропорциональными размеру* (*size-biased*), *и выбранная часть удаляется.*

Доказательство. Утверждение леммы немедленно следует из леммы 1, поскольку, хотя интенсивности переходов $\widehat{\Lambda}^{(\zeta)}(y)$ нестационарны и зависят от y, отношение интенсивности перехода от λ к $\mu = \lambda \setminus k$ и общей интенсивности выхода из λ равно $kc_k(\lambda)/|\lambda|$ для любого $y \in [0, 1-\zeta)$. □

Можно также ввести и описать явно обращенную во времени марковскую цепь

$$\widehat{N}_j^{(\zeta)} := \bigl|\widehat{\Lambda}_j^{(\zeta)}\bigr|, \qquad j = 0, \dots, \rho(1-\zeta), \tag{24}$$

при любом $\zeta \in (0,1)$. Это убывающая марковская цепь со значениями в $\mathbb{N}_0$.

Следствие 2. *Для любого $\zeta \in (0,1)$ и всякого $n = 1, 2, \dots$, такого что $h_n > 0$, при условии $\bigl|\widehat{\Lambda}_0^{(\zeta)}\bigr| = n$ определенный равенством* (24) *случайный процесс $(\widehat{N}_j^{(\zeta)})$ является цепью Маркова с начальным значением $\widehat{N}_0^{(\zeta)} = |\widehat{\Lambda}_0^{(\zeta)}| = n$ и стационарными вероятностями переходов*

$$\widehat{q}_{m,k} := \mathbb{P}(\widehat{N}_{j+1}^{(\zeta)} = k \mid \widehat{N}_j^{(\zeta)} = m) = \frac{\theta_{m-k} h_k}{m h_m}, \qquad n \geqslant m > k \geqslant 0, \tag{25}$$

не зависящими от ζ. Здесь неявно предполагается, что $h_m > 0$; в противном случае состояние m недостижимо: $\mathbb{P}(\exists j : \widehat{N}_j^{(\zeta)} = m) = 0$.

Доказательство. Этот результат является комбинацией следствия 1 и предложения 1. Благодаря результатам Ханта [9], цепь Маркова (N_j) можно рассматривать в обратном времени, и соответствующий процесс $\widehat{N}_j := N_{-j}$, $j \in \{\dots, -2, -1, 0\}$, также является цепью Маркова со стационарными вероятностями перехода $\widehat{q}_{m,k}$, удовлетворяющими

$$g_k\, q_{k,m} = g_m\, \widehat{q}_{m,k}. \tag{26}$$

Эти два равных значения – это вероятности того, что $|\Lambda(x)|$ переходит между k и m за один шаг во время своей эволюции, в прямом и обратном времени. Из равенства (26) и из выражений (22) для $q_{k,m}$ и (15) для g_n получается (25). Рассматривая $(\widehat{N}_j^{(\zeta)})_{j=0,\dots,\rho(1-\zeta)}$, мы просто начинаем тот же процесс в случайном состоянии, равном $|\Lambda(1-\zeta)|$. Дальнейшее обусловливание событием, что процесс стартует из n, дает утверждение.

Для альтернативного доказательства можно считать, что процесс $\Lambda(x)$ останавливается в момент времени $x = 1-\zeta$ и переформулировать предложение 1 и следствие 1 для этого остановленного процесса. Тогда u_n следует заменить на

$$u_n^{(\zeta)} = n \int_0^{1-\zeta} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\Theta(x)} dx,$$

а h_n останется тем же. Рассуждение, также базирующееся на (26), показывает, что зависимость от ζ исчезает и имеет место (25). $\square$

§4. Асимптотика распределения скачков

Следствие 1 дает описание распределения скачка K_{j+1} цепи Маркова $(N_j)_{j\geqslant 0}$ в состоянии $N_j = n$. Используя определение u_n (16), мы можем переписать его в более явной форме: при всех $k \geqslant 1$ и $n \in \mathbb{N}_0$

$$q_{n,n+k} = \mathbb{P}(N_{j+1} = n + k \,|\, N_j = n) = \frac{1}{u_n} \int_0^1 \theta_k x^{n+k-1} \mathrm{e}^{-\Theta(x)} dx. \qquad (27)$$

Формулу (27) можно трактовать как выражение для смешанного распределения степенного ряда $PS^{\phi}_{X_n}$, связанного со степенным рядом $\phi(x) = x\,\theta(x)$, который задается (4), то есть с $\phi_0 = 0$ и $\phi_k = \theta_k$ для $k \geqslant 1$, где распределение смешивающего случайного параметра X_n является условным распределением χ_n^- при условии $\chi_n^- \neq 0$ и имеет плотность (19). Поскольку если цепь $\Lambda(x)$ когда-либо посещает $\mathcal{P}_n$, то она покидает $\mathcal{P}_n$ в момент времени χ_n^-, это также можно увидеть из (10).

Легко видеть, что $X_n \xrightarrow{d} 1$ при $n \to \infty$ из-за множителя x^n в плотности (19) ($\xrightarrow{d}$ означает здесь и далее сходимость по распределению). При предположении регулярности (5) можно оценить, насколько быстро она приближается к 1, и даже доказать нормальную предельную теорему для X_n.

Чтобы ее сформулировать, обозначим x_n решение уравнения

$$n = x_n\,\theta(x_n). \qquad (28)$$

Так как $\theta(\,\cdot\,)$ –возрастающая функция по построению и $\lim_{x\uparrow 1}\theta(x) = \infty$, уравнение (28) имеет единственное решение. Из условия регулярной вариации (5) для $\theta(\,\cdot\,)$ следует по теореме 1.5.12 [4], что

$$1 - x_n = \ell_1(n)\, n^{-1/\beta}, \qquad n \to \infty, \qquad (29)$$

где $\ell_1(n)$ медленно меняется на бесконечности. В простейшем случае, когда $\ell(y) \to c \in (0, \infty)$ при $y \to \infty$, легко найти $1 - x_n \sim (c/n)^{1/\beta}$; для медленно меняющейся функции $\ell(\,\cdot\,)$ общего вида способы асимптотического обращения $\theta(\,\cdot\,)$ можно найти в §1.5.7 и приложении 5 в книге [4].

Предложение 2. *Предположим, что $\theta(\,\cdot\,)$ удовлетворяет* (5), $\Theta(\,\cdot\,)$ *определяется равенством* (8) *и случайная величина X_n имеет распределение вероятностей с плотностью* (19). *Тогда*

$$b_n(X_n - x_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}, \qquad n \to \infty, \tag{30}$$

где $\mathcal{N}$ имеет стандартное нормальное распределение, а

$$b_n = \sqrt{\tfrac{\beta}{\ell_1(n)}}\, n^{\frac{1+\beta}{2\beta}}. \tag{31}$$

Кроме того,

$$u_n \sim \sqrt{2\pi}\, n\, b_n^{-1}\, x_n^n\, \mathrm{e}^{-\Theta(x_n)}, \qquad n \to \infty. \tag{32}$$

Доказательство. В этом доказательстве мы используем без дальнейшего упоминания тот факт, что для любой медленно меняющейся на бесконечности функции $\ell(z)$ имеет место

$$\lim_{z\to\infty} z^{\alpha}\ell(z) = \infty, \qquad \lim_{z\to\infty} z^{-\alpha}\ell(z) = 0$$

для любого $\alpha > 0$, см. [4, предложение 1.3.6].

Пусть $f_n(x) = x^n\theta(x)\,\mathrm{e}^{-\Theta(x)}$ – числитель в (19). Рассмотрим разложение Тейлора для $\log f_n(x)$ в точке x_n с остаточным членом в форме Лагранжа: поскольку $\Theta'(x) = \theta(x)$,

$$\begin{aligned}\log f_n(x) = \log f_n(x_n) + \Big(\frac{n}{x_n} + \frac{\theta'(x_n)}{\theta(x_n)} - \theta(x_n)\Big)(x - x_n)\\ + \Big(-\frac{n}{a^2} + \frac{\theta''(a)}{\theta(a)} - \frac{\theta'(a)^2}{\theta(a)^2} - \theta'(a)\Big)\frac{(x-x_n)^2}{2}\end{aligned} \tag{33}$$

при некотором a между x_n и x. Выберем $\tau \in (0, \frac{\beta-1}{2\beta})$ и предположим, что $x = x_n + t/b_n$ для некоторого t, такого что $|t| < n^{\tau}$. Предположим также, что n достаточно велико, так что $x_n \geqslant 1/2$ и $x \in [0,1]$; это возможно, поскольку $x_n \to 1$ и $n^{\tau}/b_n = o(1-x_n)$ при $n \to \infty$. Заметим, что асимптотическое соотношение (5) влечет

$$\theta'(x) \sim \frac{\beta\,\theta(x)}{1-x}, \qquad x \uparrow 1, \tag{34}$$

см. пример 1.11.13 в [4] или доказательство леммы 3 в [14]. Следовательно, предполагая дополнительно, что n достаточно велико для выполнения неравенств $\theta'(x_n)(1-x_n) \leqslant 2\beta\,\theta(x_n)$ и $1-x_n \geqslant \ell_1(n)\,n^{-1/\beta}/2$, для таких x получаем, используя (28), что

$$\Bigl|\Bigl(\frac{n}{x_n}+\frac{\theta'(x_n)}{\theta(x_n)}-\theta(x_n)\Bigr)(x-x_n)\Bigr| \leqslant \frac{2\beta}{1-x_n}\,\frac{n^\tau}{b_n} \leqslant \frac{4\beta\,n^{\tau+1/\beta}}{\ell_1(n)\,b_n} \to 0$$

при $n\to\infty$ в силу выбора τ.

Если $x = x_n + t/b_n$ и $|t| \leqslant n^\tau$, то при $n\to\infty$ имеет место $1-x \sim 1-x_n$. Действительно,

$$\Bigl|\frac{1-x}{1-x_n}-1\Bigr| = \frac{|t|}{(1-x_n)\,b_n} \leqslant \frac{2n^{\tau+1/\beta}}{\ell_1(n)\,b_n} \to 0, \qquad n\to\infty. \tag{35}$$

Поскольку a в последнем слагаемом в (33) находится между x_n и x, мы также получаем $1-a \sim 1-x_n$ при $n\to\infty$. Из четырех слагаемых, которые умножаются на $(x-x_n)^2$ в (33), быстрее всего растет при $a\uparrow 1$ слагаемое $\theta'(a)$. Действительно, используя (34), мы получаем

$$\begin{gathered}
\theta'(a) \sim \theta'(x_n) \sim \frac{\beta\,\theta(x_n)}{1-x_n} = \frac{\beta n}{x_n(1-x_n)} \sim \frac{\beta\,n^{1+1/\beta}}{\ell_1(n)},\\
\frac{\theta''(a)}{\theta(a)} \sim \frac{\theta''(x_n)}{\theta(x_n)} \sim \frac{\beta\,(\beta+1)}{(1-x_n)^2} \sim \frac{\beta\,(\beta+1)\,n^{2/\beta}}{\ell_1(n)^2},\\
\frac{\theta'(a)^2}{\theta(a)^2} \sim \frac{\theta'(x_n)^2}{\theta(x_n)^2} \sim \frac{\beta^2}{(1-x_n)^2} \sim \frac{\beta^2 n^{2/\beta}}{\ell_1(n)^2}
\end{gathered}$$

при $n\to\infty$. Поэтому третье слагаемое в (33) эквивалентно $-t^2/2$, равномерно по $|t|\leqslant n^\tau$.

В результате мы имеем

$$f_n(x_n+t/b_n) \sim f_n(x_n)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}, \qquad n\to\infty, \tag{36}$$

равномерно по $|t|\leqslant n^\tau$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 f_n(x)\,dx\\
&= \int_0^{x_n-n^\tau/b_n} f_n(x)\,dx + \int_{x_n-n^\tau/b_n}^{x_n+n^\tau/b_n} f_n(x)\,dx + \int_{x_n+n^\tau/b_n}^{1} f_n(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{37}$$

Главный вклад дает второй интеграл, и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости мы получаем

$$\frac{b_n}{f_n(x_n)} \int\limits_{x_n-n^\tau/b_n}^{x_n+n^\tau/b_n} f_n(x)\,dx = \frac{1}{f_n(x_n)} \int\limits_{-n^\tau}^{n^\tau} f_n(x_n+t/b_n)\,dt \\ \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}, \qquad n\to\infty. \tag{38}$$

Чтобы ограничить другие два интеграла, рассмотрим производную

$$f_n'(x) = \frac{f_n(x)}{x}\Big(n + \frac{x\,\theta'(x)}{\theta(x)} - x\,\theta(x)\Big). \tag{39}$$

При $x \leqslant x_n$ выполняется $n \geqslant x\,\theta(x)$, поскольку $x\,\theta(x)$ возрастает, а равенство достигается при $x = x_n$ согласно определению (28). Поэтому $f_n'(x) \geqslant 0$, $f_n(x)$ возрастает на $[0, x_n]$ и при $n\to\infty$

$$\frac{1}{f_n(x_n)} \int\limits_0^{x_n-n^\tau/b_n} f_n(x)\,dx \leqslant \frac{f_n(x_n-n^\tau/b_n)}{f_n(x_n)} \sim \mathrm{e}^{-n^{2\tau}/2} = o(b_n),$$

где эквивалентность следует из (36). При $x \geqslant x_n$ мы не можем утверждать, что производная отрицательна. Однако, поскольку $x_n \uparrow 1$, для $x \geqslant x_n$ мы можем использовать асимптотику (5) для $\theta(x)$ и (34) для $\theta'(x)$, чтобы заключить, что $f_n'(x) < 0$ для $x > \tilde{x}_n > x_n$, где $f_n'(\tilde{x}_n) = 0$. Из (36) мы видим, что $\tilde{x}_n - x_n = o(1/b_n)$ при $n\to\infty$, поэтому $f_n(x)$ убывает на $[x_n + n^\tau/b_n, 1)$. Таким образом, аналогично первому интегралу, при $n\to\infty$

$$\frac{1}{f_n(x_n)} \int\limits_{x_n+n^\tau/b_n}^{1} f_n(x)\,dx \leqslant \frac{f_n(x_n+n^\tau/b_n)}{f_n(x_n)} \sim \mathrm{e}^{-n^{2\tau}/2} = o(b_n).$$

Совмещая эти две оценки с (38) и (37), получаем формулу (32).

Чтобы показать, что сходимость по распределению (30) также имеет место, заметим, что при любом вещественном y и достаточно больших n можно записать

$$\mathbb{P}(b_n(X_n - x_n) \leqslant y) = \frac{1}{u_n} \int\limits_0^{x_n+y/b_n} f_n(x)\,dx$$

и разложим интеграл в сумму, аналогично (37), где третий интеграл отсутствует, а верхний предел второго интеграла заменен на x_n+y/b_n. Детали очевидны и опускаются. □

Предложение 2 показывает, что X_n концентрируется около x_n для больших n, в то время как x_n сходится к 1. Поэтому естественно предположить, что распределение смешанного степенного ряда $PS^{\phi(\,\cdot\,)}_{X_n}$ имеет асимптотически то же распределение, что и $PS^{\phi(\,\cdot\,)}_{x_n}$, а последнее после надлежащего масштабирования имеет предел вследствие предположения о регулярности (5). Поскольку мы используем последнее утверждение несколько раз, сформулируем его здесь.

Лемма 4 ([14], лемма 3; [17], теорема 1)**.** *Пусть случайная величина X имеет распределение степенного ряда $PS^{\theta(\,\cdot\,)}_x$, связанное с регулярно меняющимся степенным рядом $\theta(x)$, который удовлетворяет* (5) *с $\beta>0$. Тогда, при $x\uparrow 1$, $X/\mathbb{E}X$ сходится по распределению к гамма-распределению с параметром формы β и параметром масштаба $1/\beta$, то есть с плотностью $\beta^\beta u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\beta u}/\Gamma(\beta)$ в точке $u\geqslant 0$.*

Это дает следующий результат.

Предложение 3. *Пусть $\theta(\,\cdot\,)$ удовлетворяет* (5)*. Для любого $j>0$ и $s\geqslant 0$ шаг K_{j+1} цепи (N_j) в состоянии $N_j=n$ после масштабирования сходится при $n\to\infty$ к гамма-распределению с параметрами формы β и масштаба* 1*:*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\bigl(\ell_1(n)\,n^{-1/\beta}K_{j+1}\leqslant s\mid N_j=n\bigr)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s v^{\beta-1}\mathrm{e}^{-v}dv, \tag{40}$$

где $\ell_1(n)$ определено соотношением (29)*.*

Доказательство. Как упоминалось в начале этого раздела, условное распределение K_{j+1} при $N_j=n$ является смешанным распределением степенного ряда $PS^{\phi(\,\cdot\,)}_{X_n}$, где $\phi(x)=x\,\theta(x)$ и смешивающее распределение параметра X_n совпадает с условным распределением χ_n^- при условии $\chi_n^->0$, то есть X_n имеет плотность (19). По лемме 4 распределение $PS^{\phi(\,\cdot\,)}_x$ с неслучайным параметром x удовлетворяет

$$\lim_{x\uparrow 1}PS^{\phi(\,\cdot\,)}_x([0,\tfrac{t\beta}{1-x}])=\int\limits_0^t\frac{\beta^\beta u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\beta u}}{\Gamma(\beta)}du=:G_\beta(t), \tag{41}$$

поскольку для K с распределением $PS_x^{\phi(\cdot)}$ имеет место

$$\mathbb{E}K = \frac{x(x\,\theta(x))'}{x\,\theta(x)} = \frac{x\,\theta'(x)}{\theta(x)} + 1 \sim \frac{\beta}{1-x}, \qquad x \uparrow 1,$$

в силу соотношения (34). Из предложения 2 можно заключить, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся n_1 и $T > 0$, такие что для интервала $I_n := [x_n - T/b_n, x_n + T/b_n]$ будет выполнено $\mathbb{P}(X_n \in I_n) \geqslant 1 - \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_1$. Используя уравнение (41), факт, что $x_n \to 1$ при $n \to \infty$, и непрерывность $G_\beta(t)$ и применяя вычисление, аналогичное (35), нетрудно показать, что найдется n_2, такое что $\bigl|PS_x^{\phi(\cdot)}\bigl([0, \frac{t\beta}{1-x_n}]\bigr) - G_\beta(t)\bigr| < \varepsilon$ при любом $x \in I_n$ для всех $n \geqslant n_2$. Для $n \geqslant n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\bigl(\bigl|PS_{X_n}^{\phi(\cdot)}([0, \tfrac{t\beta}{1-x_n}]) - G_\beta(t)\bigr| < \varepsilon\bigr) \\
&\quad\geqslant \mathbb{P}\bigl(\bigl|PS_{X_n}^{\phi(\cdot)}([0, \tfrac{t\beta}{1-x_n}]) - G_\beta(t)\bigr| < \varepsilon \bigm| X_n \in I_n\bigr)\,\mathbb{P}(X_n \in I_n) \geqslant 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда получается (40) после переобозначения $s = t\beta$, в силу соотношения (29) и непрерывности правой части (40) по s. $\square$

§5. Усиленные законы больших чисел

Поведение пуассоновских процессов хорошо изучено и в большом масштабе детерминировано в определенном смысле. В частности, поскольку $\ell(\Lambda(x)) = \rho(x)$, а $\Theta(x) = \mathbb{E}\rho(x)$, задаваемое равенством (8), растет к ∞ при $x \uparrow 1$ (что следует из предположения (5)), прямое применение результатов раздела 4.5 [16] дает

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{\ell(\Lambda(x))}{\Theta(x)} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{\rho(x)}{\Theta(x)} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{42}$$

Целочисленный процесс, сопоставляющий размер разбиения $|\Lambda(x)|$ времени x, не является пуассоновским процессом, однако установить для него усиленный закон больших чисел, аналогичный (42), также несложно.

Предложение 4. *Пусть выполнено предположение* (5). *Тогда*

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{|\Lambda(x)|}{\theta(x)} = 1 \quad \textit{п.н.} \tag{43}$$

Доказательство. Из представления (1) получаем, что при любом $x \in [0,1)$

$$\mathbb{E}\,|\Lambda(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{E}\,\rho_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k\, x^k = x\,\theta(x), \tag{44}$$

$$\operatorname{Var}|\Lambda(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \operatorname{Var}\rho_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\theta_k\, x^k = x(x\,\theta(x))'. \tag{45}$$

Поэтому, по неравенству Чебышева при любых $\varepsilon > 0$ и $x \in (0,1)$

$$\mathbb{P}\big(\big||\Lambda(x)| - x\,\theta(x)\big| \geqslant \varepsilon x\,\theta(x)\big) \leqslant \frac{(x\,\theta(x))'}{\varepsilon^2 x\,\theta(x)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 x\,\theta(x)}\Big(\frac{x\,\theta'(x)}{\theta(x)} + 1\Big). \tag{46}$$

При $x = x_n$ правую часть (46) можно асимптотически приблизить выражением $\beta n^{1/\beta - 1}/(\varepsilon^2 \ell_1(n))$ при $n \to \infty$, согласно (28), (29) и (34). Следовательно, для любого целого числа $\kappa > \beta/(\beta-1)$ среди событий $\big\{\big||\Lambda(x_{n^\kappa})| - x_{n^\kappa}\theta(x_{n^\kappa})\big| \geqslant \varepsilon x_{n^\kappa}\theta(x_{n^\kappa})\big\}$ произойдет только конечное число событий, в силу леммы Бореля–Кантелли и оценок Поттера (теорема 1.5.6 [4]) для медленно меняющихся функций. С другой стороны, $|\Lambda(x_{n^\kappa})| \leqslant |\Lambda(x)| \leqslant |\Lambda(x_{(n+1)^\kappa})|$ при $x \in [x_{n^\kappa}, x_{(n+1)^\kappa}]$ по построению. Так как

$$\frac{x_{(n+1)^\kappa}\,\theta(x_{(n+1)^\kappa})}{x_{n^\kappa}\,\theta(x_{n^\kappa})} = \frac{(n+1)^\kappa}{n^\kappa} \to 1 \qquad \text{при } n \to \infty,$$

утверждение (43) следует из того, что $\varepsilon > 0$ произвольно. □

Комбинируя предложение 4 и равенство (42), получаем наш первый основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение о регулярности* (5). *Тогда найдется медленно меняющаяся на бесконечности функция ℓ_2, такая что размер N_j случайного разбиения после j шагов удовлетворяет*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{N_j}{\ell_2(j)\, j^{\frac{\beta}{\beta-1}}} = 1 \qquad \text{п.н.} \tag{47}$$

Замечание 3. В простейшем случае $\lim_{z\to\infty} \ell(z) = c > 0$ в качестве ℓ_2 можно взять постоянную функцию $\ell_2(j) = (\beta-1)^{\frac{\beta}{\beta-1}} c^{-\frac{1}{\beta-1}}$. Для произвольной медленно меняющейся функции ℓ рецепт как найти ℓ_2 можно найти в доказательстве ниже.

Доказательство. По определению пуассоновский процесс $\rho(x)$ подсчитывает скачки цепи Маркова с непрерывным временем $\Lambda(x)$. Поэтому

$$|\Lambda(x)| = N_{\rho(x)}, \qquad x \in [0,1).$$

Напомним, что для $j = 1, 2, \dots$ случайное время $\xi_j \in (0,1)$ j-го скачка $\rho(x)$ было определено равенством (9). Поэтому $\xi_j \to 1$ при $j \to \infty$ п.н., и $\rho(\xi_j) = j$, так что из равенства (42) получаем

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\Theta(\xi_j)}{j} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{48}$$

Из условия (5) согласно предложению 1.5.8 [4] следует, что

$$\Theta(x) \sim \frac{\ell(\frac{1}{1-x})}{(\beta-1)(1-x)^{\beta-1}}, \qquad x \uparrow 1, \tag{49}$$

так что (48) дает

$$\frac{\ell(\frac{1}{1-\xi_j})}{(\beta-1)(1-\xi_j)^{\beta-1}} \sim j \quad \text{п.н.}, \qquad j \to \infty.$$

Асимптотически обращая это отношение, получаем, что

$$1 - \xi_j \sim \ell_3(j)\, j^{-1/(\beta-1)} \quad \text{п.н.}, \qquad j \to \infty, \tag{50}$$

при некоторой медленно меняющейся на бесконечности функции ℓ_3. (Если $\ell(z) \to c > 0$ при $z \to \infty$, то можно взять $\ell_3(j) = \big(c/(\beta-1)\big)^{1/(\beta-1)}$.) Значит,

$$\begin{aligned} N_j = N_{\rho(\xi_j)} &= |\Lambda(\xi_j)| \sim \theta(\xi_j) \\ &= \frac{\ell(\frac{1}{1-\xi_i})}{(1-\xi_j)^\beta} \sim \frac{\ell\big(j^{1/(\beta-1)}/\ell_3(j)\big)}{\ell_3(j)^\beta}\, j^{\beta/(\beta-1)} \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

при $j \to \infty$. Дробь в правой части является медленно меняющейся функцией от j на бесконечности, откуда и следует утверждение теоремы. □

Следствие 3. *В условиях теоремы* 1, *при* $j \to \infty$ *распределение новой части* K_j, *добавленной на* j*-м шаге, становится асимптотически независимым от предыдущих шагов: при любом* s

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\big(\ell_4(j)\, j^{-1/(\beta-1)} K_j \leqslant s \,|\, N_{j-1}\big) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s v^{\beta-1} \mathrm{e}^{-v} dv \quad \textit{п.н.}, \tag{51}$$

где $\ell_4(j) = \ell_1\big(\ell_2(j)\, j^{\beta/(\beta-1)}\big)\, \ell_2(j)^{-1/\beta}$ *медленно меняется на бесконечности.*

Замечание 4. Если $\ell(z) \to c > 0$ при $z \to \infty$, то можно взять $\ell_4(j) = \big(\frac{c}{\beta-1}\big)^{1/(\beta-1)}$.

Доказательство. Это утверждение – простая комбинация предложения 3 и теоремы 1. □

§6. Предельная форма

Естественный способ представлять разбиение λ графически – это его диаграмма Юнга $\mathcal{Y}_\lambda$. Она определяется как замыкание подмножества $\{(s,t) : s \geqslant 0, 0 \leqslant t < Y_\lambda(s)\}$ положительного квадранта на плоскости, где верхняя граница – это функция

$$Y_\lambda(s) := \sum_{k \geqslant s} c_k(\lambda), \qquad s \geqslant 0. \tag{52}$$

(Здесь используется соглашение $c_0(\lambda) = 0$.)

Для многих естественных вероятностных мер на $\mathcal{P}_n$ известно, что для больших случайных разбиений формируется предельная форма, то есть для больших n с вероятностью, близкой к 1, диаграмма Юнга случайного разбиения Λ после масштабирования оказывается близкой к неслучайной фигуре, известной как *предельная форма*.

В нашем случае имеется случайный процесс $\Lambda(x)$ со значениями на разбиениях, и мы можем доказать усиленный вариант результата о предельной форме.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие регулярности* (5)*. Тогда при любом фиксированном* $s \geqslant 0$

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{Y_{\Lambda(x)}(s(\beta-1)/(1-x))}{\Theta(x)} = y(s) \qquad \text{п.н.}, \tag{53}$$

где $\Theta(x)$ *задается равенством* (8)*, а предельная форма – это*

$$y(s) := \frac{\Gamma(\beta-1, (\beta-1)s)}{\Gamma(\beta-1)} = \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int\limits_{(\beta-1)s}^{\infty} z^{\beta-2} \mathrm{e}^{-z} dz. \tag{54}$$

Замечание 5. Масштабирующие множители $(\beta - 1)/(1 - x)$ и $\Theta(x)$ выбраны так, что $y(0) = 1$ и предельная форма имеет единичную площадь: $\int_0^\infty y(s)\,ds = 1$. Отказываясь от первого условия, можно перемасштабировать предельную форму и получить

$$\frac{1}{\beta-1}\,y\Big(\frac{s}{\beta-1}\Big) = \Gamma(\beta-1, s)/\Gamma(\beta)$$

в качестве альтернативного выражения для нее, которое может показаться более привлекательным и было выбрано в [5].

Доказательство. Количества $c_k(\Lambda(x))$ частей k в случайном разбиении $\Lambda(x)$ являются независимыми пуассоновскими случайными величинами со средними $\theta_k x^k/k$. Следовательно, из (52) мы видим, что $Y_{\Lambda(x)}(t)$ также имеет распределение Пуассона со средним

$$y_x(t) := \sum_{k\geqslant t} \frac{\theta_k x^k}{k} \tag{55}$$

(при $t = 0$ используется соглашение $\theta_0 = 0$). Положим в (55) $t = s(1-\beta)/(1-x)$, где $s \geqslant 0$ фиксировано, и найдем асимптотику $y_x(s(\beta-1)/(1-x))$ при $x \uparrow 1$. Для этого рассмотрим случайную величину X с распределением степенного ряда $PS_x^{\Theta(\,\cdot\,)}$, связанную с задаваемым равенством (8) степенным рядом $\Theta(x)$. Тогда

$$y_x(t) = PS_x^{\Theta(\,\cdot\,)}([t,\infty))\,\Theta(x). \tag{56}$$

Математическое ожидание X – это $x\,\theta(x)/\Theta(x) \sim (\beta-1)/(1-x)$ при $x \uparrow 1$, согласно (34). Значит, при любом фиксированном $s \geqslant 0$, по лемме 4, при $x \uparrow 1$

$$\begin{aligned} PS_x^{\Theta(\,\cdot\,)}\big([s(\beta-1)/(1-x),\infty)\big) &\to \int_s^\infty (\beta-1)^{\beta-1} u^{\beta-2} \mathrm{e}^{(\beta-1)u}\,du \\ &= \int_{s(\beta-1)}^\infty v^{\beta-2}\mathrm{e}^{-v}\,dv. \end{aligned} \tag{57}$$

Поэтому $y_x(s(\beta-1)/(1-x)) \to \infty$ при $x \uparrow 1$, и по обычному усиленному закону больших чисел для пуассоновских процессов получаем

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{Y_{\Lambda(x)}(s(\beta-1)/(1-x))}{y_x(s(\beta-1)/(1-x))} = 1 \qquad \text{п.н.}$$

Совмещая это равенство с (56) и (57), получаем утверждение теоремы. □

Выполняющиеся п.н. предельные результаты этого и предыдущего разделов позволяют установить существование предельной формы относительно мер P^n. Напомним определения (13), (14) случайных величин χ_n^+ и χ_n^- как времен входа и выхода для уровня $\mathcal{P}_n$ цепи Маркова с непрерывным временем $\Lambda(x)$. Следующее утверждение показывает, что эти времена приближаются к 1 с одной и той же детерминированной скоростью вдоль любой (случайной) последовательности n_k, такой что уровни $\mathcal{P}_{n_k}$ были посещены $\Lambda(x)$.

Лемма 5. *Для каждой из двух последовательностей времен входа χ_n^+ и времен выхода χ_n^- выполняется*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{n^{1/\beta}}{\ell_1(n)}(1-\chi_n^+) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{n^{1/\beta}}{\ell_1(n)}(1-\chi_n^-) = 1 \qquad \textit{п.н.}, \tag{58}$$

где $\lim^*$ *берется по любой (случайной) последовательности $n \to \infty$, такой что $\Lambda(x) \in \mathcal{P}_n$ при некотором $x \in [0,1)$, а $\ell_1(n)$ определено соотношением* (29).

Доказательство. Обозначим $\mathcal{N} := \{N_0, N_1, \dots\} = \{n : |\Lambda(x)| = n$ для некоторого $x \in [0,1)\}$ случайный набор уровней, которые посещает $\Lambda(x)$. Предел $\lim^*$ берется по $n \in \mathcal{N}$. Уже из построения процесса $(\Lambda(x))$ должно быть ясно, что $\lim^*_{n\to\infty} \chi_n^+ = \lim^*_{n\to\infty} \chi_n^- = 1$ п.н. Увидеть это формально можно, объединив (15) и (18), чтобы найти $\mathbb{P}(\chi_n^+ \leqslant y) = nh_n \int_0^y x^{n-1} \mathrm{e}^{-\Theta(x)}\,dx$ для любых $y \in [0,1)$ и $n \geqslant 1$. Таким образом, используя (11), мы получаем при любом $y \in [0,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\chi_n^+ \leqslant y) = \int_0^y \big(\mathrm{e}^{\Theta(x)}\big)' \mathrm{e}^{-\Theta(x)}\,dx = \int_0^y \theta(x)\,dx = \Theta(y) < \infty.$$

Значит, по лемме Бореля–Кантелли, только конечное число событий $\{\chi_n^+ \leqslant y\}$ произойдет п.н., поэтому $\lim_{n\to\infty} \chi_n^+ = 1$, так как $\chi_n^+ \leqslant 1$ по построению. При $n \in \mathcal{N}$ имеет место $1 > \chi_n^- \geqslant \chi_n^+$, так что и $\lim^*_{n\to\infty} \chi_n^- = 1$.

Также по построению выполняется $|\Lambda(\chi_n^+)| = |\Lambda(\chi_n^- - 0)| = n$ при любом $n \in \mathcal{N}$. Значит,

$$\lim^*_{n\to\infty} \frac{|\Lambda(\chi_n^+)|}{\theta(\chi_n^+)} = \lim^*_{n\to\infty} \frac{n}{\theta(\chi_n^+)} = \lim^*_{n\to\infty} \frac{n}{\chi_n^+\theta(\chi_n^+)} = 1 \qquad \text{п.н.},$$
$$\lim^*_{n\to\infty} \frac{|\Lambda(\chi_n^- - 0)|}{\theta(\chi_n^-)} = \lim^*_{n\to\infty} \frac{n}{\theta(\chi_n^-)} = \lim^*_{n\to\infty} \frac{n}{\chi_n^-\theta(\chi_n^-)} = 1 \qquad \text{п.н.},$$

согласно предложению 4. Напомним обозначение x_n для решения уравнения (28). Поскольку асимптотическое обращение правильно меняющейся функции единственно с точностью до асимптотической эквивалентности (см. теорему 1.5.12 [4]), соотношение (58) следует из (29). $\square$

Мы не определяли случайные разбиения с распределениями P^n на одном вероятностном пространстве, поэтому говорить об их сходимости п.н. в рамках текущего подхода невозможно. Однако мы можем доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (5). *При любом* $\varepsilon > 0$ *имеет место*

$$\lim^\diamond_{n\to\infty} P^n\Big\{\lambda \in \mathcal{P}_n : \sup_{s\geqslant 0}\Big|\tfrac{(\beta-1)n^{1/\beta-1}}{\ell_1(n)} Y_\lambda\big(\tfrac{(\beta-1)n^{1/\beta}}{\ell_1(n)}s\big) - y(s)\Big| < \varepsilon\Big\} = 1, \quad (59)$$

где $y(s)$ *определено* (53), $\ell_1(n)$ *– это медленно меняющаяся функция из* (29) *и* $\lim^\diamond$ *берется по любой последовательности* $n \to \infty$, *такой что* $h_n > 0$ *и, значит, мера* P^n *определена.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим целое число $m > 8/\varepsilon$. Для $i = 1, \dots, m$ определим s_i как решение $y(s_i) = i/m$; поскольку $y(s)$ непрерывно уменьшается от 1 до 0 при изменении s от 0 до ∞, эти решения существуют, единственны и удовлетворяют $0 = s_m < s_{m-1} < \dots < s_1$. Определим также $s_0 = \infty$ и обозначим для краткости

$$\widetilde{Y}_x(s) := \frac{Y_{\Lambda(x)}(s(\beta-1)/(1-x))}{\Theta(x)}.$$

Из теоремы 2, примененной с $\varepsilon/8$ вместо ε, следует, что для любого $i = 1, \dots, m$ найдется случайное время η_i, такое что $\big|\widetilde{Y}_x(s_i) - y(s_i)\big| < \frac{\varepsilon}{8}$ для всех $x \in (\eta_i, 1)$, и что $\mathbb{P}(\eta_i < 1) = 1$. Пусть $\eta = \max_{i=1,\dots,m} \eta_i$, тогда и $\mathbb{P}(\eta < 1) = 1$. Более того, поскольку $y(s_i) - y(s_{i-1}) = 1/m < \varepsilon/8$ для $i = 1, \dots, m$ (где $y(s_0) = 0$), и как $\widetilde{Y}_x(s)$, так и $y(s)$ не возрастают как функции от s, то $\bigl|\widetilde{Y}_x(s) - y(s)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4}$ для любого $s \in [s_i, s_{i-1}]$. Следовательно, начиная со случайного времени η, то есть при $x \geqslant \eta$, масштабированная диаграмма Юнга $\widetilde{Y}_x(s)$ лежит в $\varepsilon/4$-окрестности $y(s)$.

Напомним обозначение $\mathcal{N}$ для случайного множества, которое посещает $|\Lambda(x)|$ из доказательства леммы 5. Для $n \in \mathcal{N}$ имеем $\Lambda(\chi_n^+) \in \mathcal{P}_n$ и, таким образом, $\Lambda(\chi_n^+)$ имеет (условное при $\mathcal{N} \ni n$) распределение P^n по построению. Когда $n \in \mathcal{N}$ достаточно велико, для того чтобы выполнялось $\chi_n^+ > \eta$, масштабированная диаграмма Юнга $\widetilde{Y}_{\chi_n^+}(s)$ лежит в $\varepsilon/4$-окрестности $y(s)$. Однако есть разница в масштабированиях, применяемых в (59) и в (53): они п.н. совпадают асимптотически, но не совпадают точно. Чтобы преодолеть это препятствие, можно использовать лемму 5, из которой следует, что найдется случайный номер M_1, такой что при всех $n > M_1$ и $n \in \mathcal{N}$ выполнены неравенства

$$\frac{s_{i+1}}{1-\chi_n^+} \leqslant \frac{s_i n^{1/\beta}}{\ell_1(n)} \leqslant \frac{s_{i-1}}{1-\chi_n^+}, \qquad i = 1, \dots, m-1.$$

Тогда, поскольку $Y_\lambda(s)$ не возрастает по s, при дополнительном предположении $\chi_n^+ > \eta$ получаем

$$y(s_i) - \tfrac{3\varepsilon}{8} < y(s_{i-1}) - \tfrac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{Y_{\Lambda(\chi_n^+)}\bigl(\frac{s_{i-1}(\beta-1)}{1-\chi_n^+}\bigr)}{\Theta(\chi_n^+)} \leqslant \frac{Y_{\Lambda(\chi_n^+)}\bigl(s_i\frac{(\beta-1)n^{1/\beta}}{\ell_1(n)}\bigr)}{\Theta(\chi_n^+)}$$
$$\leqslant \frac{Y_{\Lambda(\chi_n^+)}\bigl(\frac{s_{i+1}(\beta-1)}{1-\chi_n^+}\bigr)}{\Theta(\chi_n^+)} \leqslant y(s_{i+1}) + \tfrac{\varepsilon}{4} < y(s_i) + \tfrac{3\varepsilon}{8} \qquad (60)$$

при всех $i = 1, \dots, m-1$. При $i = m$, то есть в точке $s = s_m = 0$, окончательные оценки в (60) также выполнены, поскольку разница в масштабировании аргумента $s = 0$ не имеет значения. Повторяя рассуждения, которые использовались для $\widetilde{Y}_x(s)$, видим, что

$$\biggl|\frac{Y_{\Lambda(\chi_n^+)}\bigl(s\frac{(\beta-1)n^{1/\beta}}{\ell_1(n)}\bigr)}{\Theta(\chi_n^+)} - y(s)\biggr| < \frac{3\varepsilon}{4} \qquad (61)$$

при всех $s \geqslant 0$, если выполняется $n \in \mathcal{N}$, $n \geqslant M_1$ и $\chi_n^+ \geqslant \eta$. Осталось изменить знаменатель с $\Theta(\chi_n^+)$ на $n^{1-1/\beta}\ell_1(n)/(\beta-1)$ в (61). Согласно (58), (29) и (49), эти выражения асимптотически эквивалентны п.н., поэтому это можно сделать, предположив, что $n \geqslant M_2$ для некоторой случайной величины M_2, и немного увеличив правую часть в (61), скажем, заменив $\frac{3\varepsilon}{4}$ на ε.

Подводя итог, мы нашли случайное время $\eta \in (0,1)$, случайную величину $M = \max\{M_1, M_2\} < \infty$ и п.н. бесконечное случайное множество $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}_0$, такие что

$$\sup_{s\geqslant 0}\Big|\tfrac{(\beta-1)n^{1/\beta-1}}{\ell_1(n)}Y_{\Lambda(\chi_n^+)}\big(s\tfrac{(\beta-1)n^{1/\beta}}{\ell_1(n)}\big)-y(s)\Big| < \varepsilon \tag{62}$$

выполнено для всех $n \in \mathcal{N}$, таких что $n \geqslant M$ и $\chi_n^+ \geqslant \eta$. Пусть A_n – это событие (62). Предыдущие рассуждения показывают, что

$$\mathbb{P}(\overline{A_n},\ M \leqslant n,\ \chi_n^+ \geqslant \eta,\ \mathcal{N} \ni n) = 0. \tag{63}$$

Условное распределение $\Lambda_{\chi_n^+}$ при $\mathcal{N} \ni n$ равно P^n, поэтому чтобы завершить доказательство, нужно проверить, что

$$\lim\nolimits^{\diamond}_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}\,|\,\mathcal{N} \ni n) = 0$$

(напомним, что $\lim^{\diamond}$ берется вдоль любой подпоследовательности, такой что $h_n > 0$, и, следовательно, условная вероятность определена). Из (63) следует, что $\mathbb{P}(\overline{A_n}, M \leqslant n, \chi_n^+ \geqslant \eta\,|\,\mathcal{N} \ni n) = 0$ для любого n, такого что $h_n > 0$. Следовательно, для таких n имеем

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}\,|\,\mathcal{N} \ni n) + \mathbb{P}(M \leqslant n,\ \chi_n^+ \geqslant \eta\,|\,\mathcal{N} \ni n) \leqslant 1.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \chi_n^+ = 1$ и случайное множество $\mathcal{N}$ бесконечно п.н., заключаем, что $\lim^{\diamond}_{n\to\infty} \mathbb{P}(M \leqslant n,\ \chi_n^+ \geqslant \eta\,|\,\mathcal{N} \ni n) = 1$, и отсюда следует желаемый результат. □

Список литературы

1. R. A. Arratia, A. D. Barbour, S. Tavaré, *Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach.* — EMS Monographs in Mathematics, Eur. Math. Soc., Zürich, 2003, 374 pp.
2. A. D. Barbour, B. L. Granovsky, *Random combinatorial structures: the convergent case.* — J. Combin. Theory A **109** (2005), 203–220.
3. V. Betz, D. Ueltschi, Y. Velenik, *Random permutations with cycle weights.* — Ann. Appl. Probab. **21**, No. 1 (2011), 312–331.
4. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation.* — Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 27, 1987.
5. A. Cipriani, D. Zeindler, *The limit shape of random permutations with polynomially growing cycle weights.* — ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Statist. **12**, No. 2 (2015), 971–999.
6. N. M. Ercolani, D. Ueltschi, *Cycle structure of random permutations with cycle weights.* — Random Structures Algorithms **44**, No. 1 (2014), 109–133.
7. W. J. Ewens, *The sampling theory of selectively neutral alleles.* — Theor. Populations Biol. **3** (1972), 87–112.

8. A. Gnedin, J. Pitman, *Regenerative composition structures.* — Ann. Probab. **33**, No. 2 (2005), 445–479.
9. G. A. Hunt, *Markov chains and Martin boundaries.* — Illinois J. Math. **4** (1960), 313–340.
10. S. Kerov, *Coherent random allocations and the Ewens–Pitman formula.*— PDMI Preprint, Steklov Math. Institute, St. Petersburg (1995), 15 pp.
11. J. Storm, D. Zeindler, *The order of large random permutations with cycle weights.* — Electron. J. Probab. **20** (2015), 126, 34 pp.
12. J. Storm, D. Zeindler, *Total variation distance and the Erdős–Turán law for random permutations with polynomially growing cycle weights.* — Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist. **52**, No. 4 (2016), 1614–1640.
13. J. Walsh, *The Martin boundary and completion of Markov chains.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **14** (1970), 169–188.
14. Y. Yakubovich, *Ergodicity of multiplicative statistics.* — J. Comb. Theory, Ser. A **119** (2012), 1250–1279.
15. А. М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации.* — Функц. анализ и его прил. **30**, No. 2 (1996), 19–39.
16. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* М., МЦНМО (2007).
17. А. Н. Тимашёв, *Предельные теоремы для распределений типа степенного ряда с конечным радиусом сходимости.* — Теория вероятн. и ее примен. **63**, No. 1 (2018), 57–69.
18. А. Л. Якымив, *О порядке случайной подстановки с весами циклов.* — Теория вероятн. и ее примен. **63**, No. 2 (2018), 260–283.
19. А. Л. Якымив, *Предельное поведение порядковых статистик на длинах циклов случайных A-подстановок.* — Теория вероятн. и ее примен. **69**, No. 1 (2024), 148–160.

Yakubovich Yu. V. Random partitions growth by appending parts: power weights case.

We investigate a generalization of Ewens measures on integer partitions where parts of size k have weights $\theta_k \geqslant 0$. The Ewens measure is a partial case of the constant sequence $\theta_k \equiv \theta > 0$. In this paper we consider the case when partial sums $\theta_1 + \dots + \theta_k$ have regular growth of index greater that 1 as $k \to \infty$. We introduce a continuous time random partition growth process such that given it visits some partition of n, the random partition of n it visits has the generalized Ewens distribution. In contrast to the often considered growth procedure, in which parts are increased by 1 or a new part 1 is added, in the growth process defined in the paper parts are added one by one and remain in the partition forever. The partition growth process is derived explicitly from a sequence of independent Poisson processes. This allows to establish strong laws of large numbers for some characteristics of the process and to determine its asymptotic behavior.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
199034, Санкт-Петербург;
НТУ "Сириус", 354340, Краснодарский край
E-mail: yuyakub@gmail.com

Поступило 10 октября 2024 г.