Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

А. Н. Фролов

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ СО СЛУЧАЙНОЙ ЗАМЕНОЙ КОМПОНЕНТ

§1. Введение и результаты

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$ – случайный вектор с независимыми одинаково распределенными компонентами и $d \geqslant 2$. Пусть $\mathbf{B} = \bigcup\limits_{m=1}^{d} \mathbf{B}_m$, где

$$\mathbf{B}_m = \{\{j_1+1\ldots j_2, j_2+1\ldots j_3, \ldots, j_m+1\ldots j_{m+1}\} : \\ j_0, j_1, \ldots, j_{m+1} \in \mathbb{Z},\ \ 0 = j_1 < j_2 < \cdots < j_m < j_{m+1} = d\}\,.$$

Множество $\mathbf{B}$ является формой записи для множества разбиений $\{1, 2, \ldots, d\}$ на непересекающиеся подмножества, состоящие из идущих подряд чисел. Например, при $d = 3$ мы имеем

$$\mathbf{B} = \{\{123\},\ \{1,23\},\ \{12,3\},\ \{1,2,3\}\}, \quad \mathbf{B}_2 = \{\{1,23\},\ \{12,3\}\},$$

а $\{1,23\} \in \mathbf{B}_2$ — запись для разбиения $\{1,2,3\}$ на два подмножества $\{1\}$ и $\{2,3\}$.

Для всех $1 \leqslant m \leqslant d$ и $b \in \mathbf{B}_m$ положим $\xi_b = (\xi_{b,1}, \xi_{b,2}, \ldots, \xi_{b,d})$, где $\xi_{b,j} = \xi_l$ для всех $j_l + 1 \leqslant j \leqslant j_{l+1}$ и всех $1 \leqslant l \leqslant m$. Вектор ξ_b при $b \in \mathbf{B}_m$ получается последовательной записью с соответствующим числом повторений первых m компонент вектора ξ.

Пусть η – случайный элемент со значениями в множестве $\mathbf{B}$ независимый с вектором ξ. Вектор $\psi = \xi_\eta$ назовем вектором со случайной заменой компонент. Тот факт, что ψ порождается случайными вектором ξ и элементом η, мы будем обозначать $\psi = (\xi, \eta)$.

Отметим, что характеристическая функция ψ имеет следующий вид

$$\mathbf{E}e^{i(u,\psi)} = \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} p_b \prod_{l=1}^{m} f(v_{l,b}), \tag{1}$$

Ключевые слова: случайные векторы со случайной заменой компонент, многомерная центральная предельная теорема, псевдопуассоновсие процессы, процесс Орнштейна–Уленбека.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 23-21-00078.

где $(u,\psi) = \sum\limits_{k=1}^{d} u_k\psi_k$ для $u = (u_1, u_2, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d$, $p_b = \mathbf{P}(\eta = b)$ для всех $b \in \mathbf{B}$, $f(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_1}$, а $v_{l,b} = \sum\limits_{r=j_l+1}^{j_{l+1}} u_r$ для $1 \leqslant l \leqslant m$ и $b \in \mathbf{B}_m$.

Рассматриваемая модель появляется, в частности, при изучении поведения конечномерных распределений некоторых случайных процессов.

Если $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $N(t)$ – пуассоновский процесс, не зависящий от $\{\xi_n\}$, то случайный процесс $\psi(t) = \xi_{N(t)}$ называют пуассоновским пси-процессом. (Здесь пси – сокращение для словосочетания "процесс случайного индекса"). Распределение вектора $(\psi(t_1), \psi(t_2), \ldots, \psi(t_d))$ при $t_1 < t_2 < \cdots < t_d$ имеет характеристическую функцию вида (1), если для всех m и $b \in \mathbf{B}_m$ положить

$$p_b = \mathbf{P}(N(t_{j_1+1}) = \cdots = N(t_{j_2}) < N(t_{j_2+1}) = \cdots = N(t_{j_3}) < \cdots < N(t_{j_m+1}) = \cdots = N(t_{j_{m+1}})). \quad (2)$$

Пси-процессы являются частным случаем псевдопуассоновских процессов, определенных и обсуждавшихся в книге [1]. Исследованию асимптотического поведения конечномерных распределений пси-процессов посвящены работы [2] и [3]. В частности, там найдены условия сходимости к конечномерным распределениям процессов из некоторого класса, содержащего процесс Орнштейна–Уленбека. Некоторые обобщения последних результатов были представлены в [4].

В моделях страховой математики суммы $N(t)$ независимых одинаково распределенных случайных величин описывают суммарные выплаты по портфелям однотипных договоров страхования до момента времени t. В этой интерпретации пси-процесс совпадает с размером последней выплаты к моменту времени t. Так как страховые компании имеют много различных портфелей, сумма пси-процессов представляет собой суммарный размер последних выплат. Анализ поведения этого размера может представлять существенный интерес с точки зрения управления финансовыми рисками.

Разумеется, в моделях страховой и финансовой математики не ограничиваются рассмотрением пуассоновских потоков выплат. Кроме них используются процессы восстановления, а также пуассоновские процессы и процессы восстановления с заменой времени на случайное (см., например, [5]).

Рассматриваемая нами в этой статье модель отходит от формулировок в терминах теории случайных процессов, что увеличивает ее общность.

В настоящей работе мы найдем предельные распределения для сумм независимых случайных векторов со случайной заменой компонент в схеме серий.

Сформулируем теперь наш результат в этом направлении.

Теорема 1. *Пусть* $\{\vec{\xi}_{nk},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность серий независимых в каждой серии* d*-мерных случайных векторов с независимыми одинаково распределенными компонентами. Пусть последовательность серий их первых компонент* $\{\xi_{nk},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *удовлетворяет условию бесконечной малости* (*УБМ*)

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{P}(|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon) \to 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{3}$$

(*Здесь и всюду далее мы будем считать, что во всех предельных переходах* $n \to \infty$*, если прямо не оговорено противное.*)

Пусть $f(t)$ *– безгранично делимая характеристическая функция, такая что* $\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) \to f(t)$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$*, где* $f_{nk}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_{nk}}$ *для всех* n *и* k*.*

Пусть $\{\eta_{nk},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность серий независимых случайных элементов со значениями в* $\mathbf{B}$*, такая что* $M_n = \max_{b \in \mathbf{B}} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |p_{nk,b} - p_b| \to 0$*, где* $p_{nk,b} = \mathbf{P}(\eta_{nk} = b)$ *для всех* $b \in \mathbf{B}$ *и* $\{p_b\}_{b \in \mathbf{B}}$ *– множество неотрицательных чисел, таких что* $\sum_{b \in \mathbf{B}} p_b = 1$*.*

Предположим, что для любого n *серии* $\{\vec{\xi}_{nk}\}$ *и* $\{\eta_{nk}\}$ *независимы.*

Пусть $\{\psi_{nk} = (\vec{\xi}_{nk}, \eta_{nk}),\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность серий случайных векторов со случайной заменой компонент, построенная по схемам серий* $\{\vec{\xi}_{nk}\}$ *и* $\{\eta_{nk}\}$*. Положим* $\Psi_n = \sum_{k=1}^{n} \psi_{nk}$ *для всех* n*.*

Для любых $u = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$*,* $1 \leqslant m \leqslant d$ *и* $b \in \mathbf{B}_m$ *положим*

$$f_b(u) = \prod_{l=1}^{m} f(v_{l,b}) \quad \text{и} \quad f_{nk,b}(u) = \prod_{l=1}^{m} f_{nk}(v_{l,b}) \tag{4}$$

для всех k *и* n*, где* $v_{l,b} = \sum_{r=j_l+1}^{j_{l+1}} u_r$ *для* $1 \leqslant l \leqslant m$*.*

Тогда для любого $u \in \mathbb{R}^d$ выполняется соотношение

$$\mathbf{E}e^{(u,\Psi_n)} = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{b\in\mathbf{B}} p_{nk,b} f_{nk,b}(u) \right) \to \prod_{b\in\mathbf{B}} f_b^{p_b}(u).$$

Теорема 1 обобщает результат из [4], где рассматривались пси-процессы. Здесь мы имеем дело с более общей моделью. Кроме того, каждый ψ_{nk} может порождаться своим η_{nk}, что приводит к обобщению и в случае пси-процессов.

Если $f(t) = e^{-t^2/2}$, то предельное распределение будет гауссовским с ковариационной матрицей (r_{jk}), такой что $r_{jj} = 1$ для всех j и $r_{jk} = \sum\limits_{m=1}^{d} \sum\limits_{b\in\mathbf{B}_m:} p_b \delta_{jkm,b}$ для всех $j < k$, где $\delta_{jkm,b} = 1$, если $j_l + 1 \leqslant j < k \leqslant j_{l+1}$ для некоторого l, и $\delta_{jkm,b} = 0$ иначе. Если p_b задается формулой (2), то $r_{jk} = \mathbf{P}(N(t_j) = N(t_k))$. Для пси-процессов $r_{jk} = e^{-\lambda(t_k - t_j)}$, где λ – интенсивность пуассоновского процесса $N(t)$. Это соответствует d-мерному распределению процесса Орнштейна–Уленбека. Заменяя пуассоновский процесс на другие процессы с целыми неотрицательными приращениями, мы получим ряд более общих предельных (в смысле сходимости конечномерных распределений) гауссовских процессов.

§2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Пусть $\tau > 0$. Положим $a_{nk} = a_{nk}(\tau) = \mathbf{E}\xi_{nk}\mathbb{I}\{|\xi_{nk}| < \tau\}$ и $\tilde{f}_{nk}(t) = f_{nk}(t)e^{-ita_{nk}}$ для всех n и k. Определим $\tilde{f}_{nk,b}(u)$ по формуле (4) с заменой $f_{nk}(v_{l,b})$ на $\tilde{f}_{nk}(v_{l,b})$. Положим

$$g_{nk}(u) = \sum_{b\in\mathbf{B}} p_{nk,b} f_{nk,b}(u), \quad \tilde{g}_{nk}(u) = \sum_{b\in\mathbf{B}} p_{nk,b} \tilde{f}_{nk,b}(u)$$

для всех n и k. Отметим, что $\tilde{f}_{nk,b}(u) = f_{nk,b}(u)e^{-iu_* a_{nk}}$ и $\tilde{g}_{nk}(u) = g_{nk}(u)e^{-iu_* a_{nk}}$, где $u_* = u_1 + u_2 + \cdots + u_d$.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 1. *Пусть $T \in (0, \infty)$. Если последовательность серий $\{\xi_{nk}\}$ независимых в каждой серии случайных величин удовлетворяет УБМ, то последовательность серий $\{\xi_{nk} - a_{nk}\}$ удовлетворяет УБМ и выполняются соотношения*

$$\delta_n = \sup_{|t|\leqslant T} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\tilde{f}_{nk}(t) - 1| \to 0, \tag{5}$$

$$\tau_n = \sup_{|t|\leqslant T} \sum_{k=1}^{n} |\tilde{f}_{nk}(t) - 1| \leqslant c \quad \textit{для всех достаточно больших } n, \tag{6}$$

$$\varepsilon_n = \sup_{|t|\leqslant T} \max_{b\in\mathbf{B}} \left| \sum_{k=1}^{n} p_{nk,b}(\log \tilde{f}_{nk}(t) - (\tilde{f}_{nk}(t) - 1)) \right| \to 0. \tag{7}$$

Здесь $c = c(T, \tau)$ – некоторая положительная постоянная.

Доказательство леммы 1. Все утверждения леммы кроме соотношения (7) вытекают из известных фактов, используемых при доказательстве сходимости к заданному безгранично делимому распределению (см., например, леммы 2.1–2.10 в книге [6]). Что касается соотношения (7), то по леммам 2.2 и 2.3 из [6] для любого $b \in \mathbf{B}$ мы имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} p_{nk,b}(\log \tilde{f}_{nk}(t) - (\tilde{f}_{nk}(t) - 1)) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} p_{nk,b}\theta_{nk}(\tilde{f}_{nk}(t) - 1)^2 \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\tilde{f}_{nk}(t) - 1|^2,$$

где $|\theta_{nk}| \leqslant 1$ для всех n и k. Оценка последней суммы, с помощью которой доказывают соотношение (7) с 1 вместо $p_{nk,b}$, содержится в лемме 2.10 из [6]. □

Для всех $b \in \mathbf{B}_m$ и всех n и k выполняется соотношение

$$\tilde{f}_{nk,b}(u) - 1 = \prod_{l=1}^{m} (\tilde{f}_{nk}(v_{l,b}) - 1 + 1) - 1 = \sum_{l=1}^{m} (\tilde{f}_{nk}(v_{l,b}) - 1) + \varrho_{nk,b}(u),$$

где

$$\varrho_{nk,b}(u) = \sum_{1\leqslant l<j\leqslant m} (\tilde{f}_{nk}(v_{j.b}) - 1)(\tilde{f}_{nk}(v_{l,b}) - 1) + \cdots + \prod_{l=1}^{m} (\tilde{f}_{nk}(v_{l,b}) - 1).$$

Для всех n и k мы имеем $\tilde{g}_{nk}(u) - 1 = \tilde{s}_{nk}(u) + \tilde{r}_{nk}(u)$, где

$$\tilde{s}_{nk}(u) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} p_{nk,b}(\tilde{f}_{nk}(v_{l,b}) - 1), \quad \tilde{r}_{nk}(u) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} p_{nk,b}\varrho_{nk,b}(u).$$

Отметим, что $\sum\limits_{m=1}^{d} \sum\limits_{b\in\mathbf{B}_m} p_{nk,b} = 1$ для всех n и k.

Учитывая определение δ_n из соотношения (5), мы получим

$$|\tilde{s}_{nk}(u)| \leqslant \delta_n \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} m p_{nk,b} \leqslant d\delta_n,$$
$$|\varrho_{nk,b}(u)| \leqslant \delta_n^2 (C_m^2 + C_m^3 + \cdots + 1) \leqslant 2^d \delta_n^2 \quad \text{для всех} \quad b \in \mathbf{B}_m,$$
$$|\tilde{r}_{nk}(u)| \leqslant \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} p_{nk,b} |\varrho_{nk,b}(u)| \leqslant 2^d \delta_n^2.$$

Из соотношения (5) следует, что $|\tilde{s}_{nk}(u) + \tilde{r}_{nk}(u)| \leqslant 1/2$ для всех k при всех достаточно больших n.

Мы будем считать далее, что n достаточно велико, чтобы выполнялись последние неравества и неравенство (6).

Воспользуемся тем, что $\log(1+z) = z + \theta z^2$ в круге $|z| \leqslant 1/2$, где $|\theta| \leqslant 1$. Мы получим

$$\prod_{k=1}^{n} \tilde{g}_{nk}(u) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} (\tilde{s}_{nk}(u) + \tilde{r}_{nk}(u)) + \sum_{k=1}^{n} \theta_{nk} (\tilde{s}_{nk}(u) + \tilde{r}_{nk}(u))^2 \right\}.$$

Из соотношений (5) и (6) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} |\varrho_{nk,b}(u)| \leqslant \delta_n \tau_n (C_m^2 + C_m^3 + \cdots + 1) \leqslant c 2^d \delta_n \quad \text{для всех} \quad b \in \mathbf{B}_m,$$
$$\sum_{k=1}^{n} |\tilde{r}_{nk}(u)| \leqslant \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} p_{nk,b} \sum_{k=1}^{n} |\varrho_{nk,b}(u)| \leqslant c 2^d \delta_n = o(1),$$
$$\sum_{k=1}^{n} |\tilde{r}_{nk}(u)|^2 \leqslant 2^d \delta_n^2 \sum_{k=1}^{n} |\tilde{r}_{nk}(u)| = o(1),$$
$$\sum_{k=1}^{n} |\tilde{r}_{nk}(u) \tilde{s}_{nk}(u)| \leqslant d\delta_n \sum_{k=1}^{n} |\tilde{r}_{nk}(u)| = o(1),$$
$$\sum_{k=1}^{n} |\tilde{s}_{nk}(u)|^2 \leqslant d\delta_n \sum_{k=1}^{n} |\tilde{s}_{nk}(u)| \leqslant d\delta_n \tau_n \leqslant c d \delta_n = o(1).$$

Следовательно,

$$\prod_{k=1}^{n} \tilde{g}_{nk}(u) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \tilde{s}_{nk}(u) + o(1) \right\}. \tag{8}$$

Заметим, что

$$u_* \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v_{l,b} a_{nk} p_{nk,b}\,.$$

Принимая во внимание это равенство и соотношение (7), мы имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \tilde{s}_{nk}(u) + iu_* \sum_{k=1}^{n} a_{nk} - \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{nk,b} \log f_{nk}(v_{l,b})\right|$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \tilde{s}_{nk}(u) - \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{nk,b} \log \tilde{f}_{nk}(v_{l,b})\right|$$
$$= \left|\sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{nk,b}((\tilde{f}_{nk}(v_{l,b})-1)-\log \tilde{f}_{nk}(v_{l,b}))\right| \leqslant d2^d \varepsilon_n = o(1).$$

Учитывая, что $|\log(1+z)| \leqslant 2|z|$ в круге $|z| \leqslant 1/2$, мы получим

$$\left|\sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} p_b \log \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(v_{l,b}) - \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{nk,b} \log f_{nk}(v_{l,b})\right|$$
$$= \left|\sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (p_{nk,b} - p_b) \log f_{nk}(v_{l,b})\right|$$
$$\leqslant 2M_n \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |f_{nk}(v_{l,b}) - 1| \leqslant cd2^{d+1} M_n = o(1).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались соотношением (6).

По условию

$$\left|\sum_{b\in\mathbf{B}} p_b \log f_b(u) - \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} p_b \log \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(v_{l,b})\right|$$
$$= \left|\sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} p_b \log \prod_{l=1}^{m} f(v_{l,b}) - \sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} \sum_{l=1}^{m} p_b \log \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(v_{l,b})\right|$$
$$= \left|\sum_{m=1}^{d} \sum_{b\in\mathbf{B}_m} p_b \sum_{l=1}^{m} \left(\log f(v_{l,b}) - \log \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(v_{l,b}))\right)\right| = o(1).$$

Подставляя эти оценки в соотношение (8), мы получим

$$\prod_{k=1}^{n} \tilde{g}_{nk}(u) = \exp\left\{ iu_* \sum_{k=1}^{n} a_{nk} + \sum_{b\in\mathbf{B}} p_b \log f_b(u) + o(1) \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{k=1}^{n} g_{nk}(u) = \exp\left\{ \sum_{b\in\mathbf{B}} p_b \log f_b(u) + o(1) \right\} = \prod_{b\in\mathbf{B}} f_b^{p_b}(u)(1+o(1)).$$

Теорема доказана. □

Список литературы

1. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее применения, II*, Мир (1971).
2. О. В. Русаков, *Пуассоновские субординаторы, поле Винера–Орнштейна–Уленбека и связь броуновских мостов с переходными характеристиками процессов Орнштейна–Уленбека.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 225–237.
3. О. В. Русаков, *Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна–Уленбека.* — Вестник СПбГУ, сер. 1. Математика, механика, астрономия **4(62)**, No. 2 (2017), 247–257.
4. О. В. Русаков, А. Н. Фролов, *О сходимости пси-процессов к процессам типа Орнштейна–Уленбека с безгранично делимым распределением.* — Тезисы докладов 9-й Международной конференции по стохастическим методам, 2024, http://www.intconfstochmet.ru/Proceedings.html.
5. П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг, *Некоторые аспекты страховой математики.* — Теория вероятн. и ее примен. **38** (1993), 374–416.
6. А. Н. Фролов, *Безгранично делимые распределения и суммы независимых случайных величин*, СПб, Лань, 2023.

Frolov A. N. On convergence of distributions for sums of independent random vectors with randomly change of components

We derive new results on convergence of distributions for sums of independent random vectors with randomly changed components in scheme of series. In particular, a multidimensional central limit theorem is proved. If the random change of components is defined by a Poisson process then we arrive at results on convergence of finitely dimension distributions of psi-processes. In Gaussian case, the limit process is the Ornstein–Uhlenbeck process. We discuss a replacement of the Poisson process by processes with non-negative integer increments.

С-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 10 октября 2024 г.

E-mail: `Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru`