Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

В. Н. Солев

АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ И ТОЧНОСТЬ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ

§1. Введение

Мы начнем с одномерной задачи, вычисления минимаксного квадратичного риска R в задаче оценивания неизвестного среднего θ, когда наблюдается случайная величина $y = \theta + x$, где x – гауссовская случайная величина со средним 0 и дисперсией σ^2, при априорном предположении, что $|\theta| \leqslant \tau$,

$$R = \inf_{\widehat{\theta}} \sup_{|\theta|\leqslant\tau} \mathbf{E}\,(\widehat{\theta} - \theta)^2 \tag{1}$$

Здесь $\widehat{\theta}$ – измеримая функция от y. Подробное изложение истории исследований этой задачи и некоторых ее бесконечномерных аналогов можно найти в [10]. Если мы ограничимся при вычислении нижней грани в (1) только линейными функциями $\widehat{\theta}$, то соответствующая нижняя грань R_L легко вычисляется,

$$R_L = \frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}. \tag{2}$$

И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский установили в [3], что при некотором $c > 0$

$$c\,R_L < R < R_L. \tag{3}$$

Описание разнообразных бесконечномерных обобщений описанной выше проблемы и способов их решения можно найти в книге [13].

Настоящая работа является продолжением работ [4,7] и [8]. Опишем статистическую задачу, которая там рассматривалась. Точнее, две похожие друг на друга задачи. Сначала предположим (см. [8]), что на растущем отрезке $[-T, T]$ наблюдается гауссовский процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t)\,dt + dx(t), \quad t \in [-T, T], \quad T > 0. \tag{4}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом центральносимметричном компактном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемых функций s, таких что

$$\|s\|^2_{\mathscr{L}} = \sup_x \int\limits_x^{x+1} |s\,(t)|^2\ dt < \infty, \tag{5}$$

$x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями (см. подробнее $[1,2]$) с нулевым средним и спектральной плотностью f,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}\,du < \infty. \tag{6}$$

Фактически f – спектральная плотность обобщенного процесса (см. подробнее [1]), которым является производная процесса $x(t)$.

Выпуклое центральносимметричное подмножество $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$, в котором лежат подлежащие оцениванию функции s, выбирается из класса Степанова $\mathscr{L}(\Lambda)$ (см. подробнее [9]) псевдопериодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\,e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty, \tag{7}$$

где Λ – заданное счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{u,v\in\Lambda,\,u\neq v} |u-v| > 0. \tag{8}$$

Компактное подмножество $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda;\beta;L)$ выделяется при $\beta > 0$ из функционального класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2(|u|+1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{9}$$

Здесь β, L – заданные положительные константы.

В такой постановке рассматриваемая задача напоминает задачу оценивания периодической функции известной гладкости, наблюдаемой на фоне “белого шума”,

$$dy(t) = s(t)\,dt + dw(t), \quad t\in[-T,T],$$
$$w(t) \text{ – винеровский процесс}, \quad T>0.$$

Однако даже в этой задаче замена винеровского процесса на гауссовский процесс со стационарными приращениями общего вида приводит к нетривиальным эффектам, если не предполагать, что спектральная плотность f отделена от нуля и бесконечности. Схожая задача исследована также М. С. Ермаковым в [14].

Нам потребуются случайные величины вида

$$(x, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dx(t),$$

определенные для индикаторных функций $\varphi(t) = \mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ конечных интервалов соотношением

$$(x, \varphi) := x(b) - x(a).$$

Они также корректно определены, например, для линейного множества $\mathscr{D}$ функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi \in L^2, \quad |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2}, \quad \text{где } \widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\, dt. \tag{10}$$

Обозначим

$$\mathscr{D}_T := \{\varphi :\ \varphi \in \mathscr{D},\, \operatorname{supp}\varphi \subset [-T, T]\}. \tag{11}$$

При фиксированном $T > 0$ статистику доступны наблюдения вида

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\, s(t)\, dt + \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\, dx(t), \quad \varphi \in \mathscr{D}_T. \tag{12}$$

Обозначим через $\widehat{s}_T$ оценку неизвестной функции $s \in \mathscr{L}_*$, построенную по таким наблюдениям. Риск от использования оценки $\widehat{s}_T \in \mathscr{L}_*$, построенной по наблюдениям (4), будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) = \sup_{s \in \mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f}\ \|\widehat{s}_T - s\|^2_{\mathscr{L}}\,. \tag{13}$$

Обозначим через $\mathscr{R}_T$ минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right). \tag{14}$$

Когда нам это потребуется, мы можем переходить в определении (14) без серьезной потери точности в оценке скорости убывания минимаксного риска от банаховой нормы $\|s\|^2_{\mathscr{L}}$ к любой из двух следующих гильбертовых норм: $\|s\|_T$ или $\|s\|_*$, где

$$\|s\|_T^2 = \frac{1}{2T}\int\limits_{T}^{T} |s(t)|^2\,dt, \quad \|s\|_*^2 = \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2, \tag{15}$$

поскольку, как установлено в [9], при условии $\tau(\Lambda) > 0$ и достаточно большом T все три упомянутые нормы в надлежащем смысле топологически эквивалентны в замкнутом линейном подпространстве $\mathscr{L}(\Lambda)$ пространства $\mathscr{L}$, порожденном функциями из $\mathscr{L}(\Lambda)$. Приведем точное утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть* $\tau(\Lambda) > 0$. *Тогда найдутся такие положительные константы* $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $C_2 = C_2(\tau)$ *и* $T_0 = T_0(\tau)$, *зависящие только от* τ, *что*

$$c_1\,\|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|s\|_* \leqslant C_1\,\|s\|_{\mathscr{L}}\,, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda), \tag{16}$$

и при $T > T_0$

$$c_2\,\|s\|_T \leqslant \|s\|_* \leqslant C_2\,\|s\|_T\,, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda). \tag{17}$$

Задача состоит в исследовании асимптотического поведения при $T \to \infty$ величины минимаксного риска.

Другая модель, исследованная в [4, 7], предполагает, что неизвестная функции s оценивается по наблюдениям над процессом

$$y(t) = s(t) + x(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{18}$$

Здесь $x(t)$ – гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью (далее всюду с.п.) f_*, допускающей при некотором $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, представление

$$f_*(u) = \frac{f(u)}{(1+u^2)^n}, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\,du < \infty, \tag{19}$$

а неизвестная функция s лежит при некотором $\beta > 0$ и $\gamma = \beta + n$ в подпространстве $\mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$. По-прежнему при фиксированном $T > 0$ статистику доступны наблюдения вида

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\,s(t)\,dt + \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\,x(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathscr{D}_T(n), \tag{20}$$

где

$$\mathscr{D}_T := \{\varphi:\ \varphi \in \mathscr{D}(n),\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T]\}. \tag{21}$$

В обеих задачах исследуется асимптотическое поведение при $T \to \infty$ минимаксного риска при надлежащих условиях на спектральное множество Λ и спектральную плотность f, относительно которой предполагается, в частности, что она удовлетворяет условию Макенхаупта

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(t)\,dt \,\frac{1}{|I|} \int\limits_I \frac{1}{f(t)}\,dt < \infty. \tag{22}$$

Здесь I – конечный интервал, $|I|$ – длина I. Отметим, что при названных условиях (см. подробнее [12])

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)\,(1+u^2)}\,du < \infty. \tag{23}$$

В обеих же задачах налагается условие на поведение спектральной плотности f в малой окрестности Λ_ε спектрального множества Λ,

$$\Lambda_\varepsilon = \bigcup_{u\in\Lambda} [u-\varepsilon, u+\varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \tau/2.$$

Для нас модельным является случай, когда функция f при $0 < |\alpha| < 1$ совпадает на Λ_ε с функцией $g_0(x)$,

$$g_0(x) = \sum_{u\in\Lambda} \mathbf{1}_{[u-\varepsilon, u+\varepsilon]}(x)\,|x-u|^\alpha, \tag{24}$$

или близка к ней. Однако условия на точность такой аппроксимации в работах [4, 7] и [8] различаются. В отличие от условий работы [8], условия локального поведения функции f в окрестности спектрального множества в [4] и [7], вообще говоря, не гарантируют, что функцию f можно продолжить с Λ_ε на всю вещественную прямую, так чтобы она удовлетворяла условию Макенхаупта. В настоящей работе мы в некотором смысле исправляем этот недостаток.

Перечислим условия, в которых доказывается основной результат работы.

C(1) Неизвестная функция s лежит при некотором целом положительном n и некотором $\beta > 0$ в подпространстве $\mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$, где $\gamma = \beta + n$.

C(2) Величина $\tau(\Lambda) > 0$ и при некоторых положительных a и A для достаточно больших m, $m > m_0$,

$$a\,m^{2\gamma+1} \leqslant \sum_{u\in\Lambda,\,|u|\leqslant m} (1+|u|)^{2\gamma} \leqslant A\,m^{2\gamma+1}.$$

C(3) $x(t)$ – гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью f_*, допускающей при некотором натуральном n представление

$$f_*(u) = \frac{f(u)}{(1+u^2)^n}, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty,$$

а неотрицательная функция f удовлетворяет условию Макенхаупта (22).

C(4) При некотором $\alpha \in (-1,1)$ и достаточно малом положительном $\varepsilon_0 < \tau/2$

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0,\, u\in\Lambda} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \alpha \ln \varepsilon|\, dx < \infty.$$

Основной результат работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть в задаче оценивания неизвестной функции* s *из* $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$ *по наблюдениям* (18) *выполнены условия* **C(1)** *и* **C(2)** *на параметрическое множество* $\mathscr{L}_*$ *и условия* **C(3)** *и* **C(4)** *на процесс* $x(t)$*. Тогда для для некоторых* $0 < c \leqslant C < \infty$ *и достаточно больших* $T > T_0$ *имеет место оценка*

$$c\,T^{-\frac{(2\beta+2n)(1+\alpha)}{2\beta+2n+1}} \leqslant \mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*;\|\cdot\|_{\mathscr{L}}) \leqslant C\,T^{-\frac{(2\beta+2n)(1+\alpha)}{2\beta+2n+1}}.$$

Следует отметить, что константы $c \leqslant C$ зависят, во-первых, от параметров, определяющих функциональный класс $\mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$. Таковыми являются величины $\tau(\Lambda), \gamma, m_0, a, A, L$. Во-вторых, они зависят от параметров, определяющих класс неотрицательных функций, из которого черпаются функции f. Таковыми являются величины $\lambda(f), \varepsilon_0, \alpha$.

Опишем общий подход к построению верхних и нижних границ для величины минимаксного риска $\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*;\|\cdot\|_{\mathscr{L}})$. В силу неравенств (16) достаточно доказать теорему для величины минимаксного риска $\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*;\|\cdot\|_*)$. Обозначим $\boldsymbol{a}$ – функцию на Λ, значение которой в точке u совпадает с коэффициентом $a(u)$ функции $s(t)$ в разложении

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}.$$

То есть мы будем следить не за функцией s, а за вектором $\boldsymbol{a}$ ее коэффициентов в соответствующем разложении.

Верхняя граница получается предъявлением конкретной оценки $\widehat{\boldsymbol{a}}_T$ и использованием очевидного неравенства

$$\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*;\|\;\cdot\;\|_*) \leqslant \sup_{\boldsymbol{a}\in\Gamma} \sum_{u\in\Lambda} \mathbf{E}\,|\widehat{\boldsymbol{a}}_T(u) - \boldsymbol{a}(u)|^2.$$

Оценка супремума от последней суммы для подходящей оценки $\widehat{\boldsymbol{a}}_T$ получены в §4. Здесь и далее Γ — класс таких функций $\boldsymbol{a}(u)$, заданных на Λ, что функции

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} \boldsymbol{a}(u)\, e^{iut} \quad \text{лежат в } \mathscr{L}_*.$$

Пусть $\varepsilon = 1/T$, а неотрицательное m определено соотношением

$$m^{1+2\gamma}\,\varepsilon^{1+\alpha} = 1.$$

Для оценки снизу минимаксного риска при подходящем выборе $\Pi \subset \Gamma$, то есть, таком что функции s лежат в $\mathscr{L}_*$, когда $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\Pi}$, рассматривается задача оценивания $\boldsymbol{a}$ при априорном предположении, что $\boldsymbol{a} \in \Pi$, задавая Π не на языке функций $s(t)$, а в терминах функций $\boldsymbol{a}(u)$. Опишем соответствующую конструкцию.

Выбирается неотрицательная функция $\boldsymbol{\kappa}(u)$, заданная на Λ, обращающаяся в нуль вне отрезка $(-m, m)$ и такая, что

$$\sum_{|u|<m} \boldsymbol{\kappa}^2(u)(1+|u|)^{2\gamma} \leqslant L.$$

В качестве параметрического множества (для функций $\boldsymbol{a}(u)$) выбирается прямоугольник Π тех функций $\boldsymbol{a}$, для которых

$$|\boldsymbol{a}(u)| \leqslant \boldsymbol{\kappa}(u), \quad u \in \Lambda.$$

Это обеспечит нам неравенство

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2(1+|u|)^{2\gamma} \leqslant L.$$

Например, выбрав подходящим образом неотрицательную функцию $\boldsymbol{h}(u)$, мы можем взять

$$\boldsymbol{\kappa}^2(u) = \frac{\boldsymbol{h}^2(u)}{\sum\limits_{|v|<m} \boldsymbol{h}^2(v)(1+|v|)^{2\gamma}}\, L$$

Благодаря правильному выбору множества Π, задача сведется к одномерному случаю исследования минимаксного риска в задаче оценивания при фиксированном $u \in \Lambda$ коэффициента $a(u)$ по несмещенной оценке

$$\widehat{a}_T(u) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{g_u^T(t)}\, y(t)\, dt$$

при априорном предположении $|a(u)| \leqslant \boldsymbol{\kappa}(u)$. Здесь мы использовали функцию $g_u^T(t)$, определенную в §2. Нужно, конечно, учесть, что

$$\mathbf{E}\,|\widehat{a}_T(u) - a(u)|^2 = \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{g_u^T(t)}\, x(t)\, dt \right|^2 = \frac{1}{4T^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(s)|^2 f_*(s)\, ds.$$

§2. Сопряженная система

Мы будем использовать обозначение L_T^2 для L^2-пространства на отрезке $[-T,T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением

$$(s_1, s_2)_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s_1(t)\, \overline{s_2(t)}\, dt$$

и нормой $\|s\|_T$. Когда не оговорено противное, мы будем предполагать, что функции из L_T^2 обращаются в нуль вне отрезка $[-T,T]$. При $u \in \Lambda$ положим

$$\varphi_u(t) = e^{iut}, \quad \varphi_u(T;t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\, \varphi_u(t), \quad \mathscr{L}_T(\Lambda) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(\,\cdot\,)\, \mathscr{L}(\Lambda).$$

Из леммы 1.1 следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть $\tau(\Lambda) > 0$. Тогда найдется такая положительная константа $T_0 = T_0(\tau)$, зависящие только от τ, что при $T > T_0$ система функций $\{\varphi_u(T;\,\cdot\,),\ u \in \Lambda\}$ является равномерно риссовским базисом в $\mathscr{L}_T(\Lambda)$ в метрике пространства L_T^2.*

Утверждение леммы означает, что существует такой ограниченный и ограниченно обратимый самосопряженный (в метрике, индуцированной на $\mathscr{L}_T(\Lambda)$ пространством L_T^2) оператор A_T из $\mathscr{L}_T(\Lambda)$ на $\mathscr{L}_T(\Lambda)$, переводящий систему $\{\varphi_u(T;\,\cdot\,),\ u \in \Lambda\}$ в ортонормированный базис.

При этом равномерные нормы операторов A_T и A_T^{-1} ограничены равномерно по $T > T_0$. Отметим, что из леммы 2.1 следует, что (в условиях леммы) в $\mathscr{L}_T(\Lambda)$ существует сопряженная система $\{\psi_u^T,\ u \in \Lambda\}$,

$$(\varphi_u(T;\,\cdot\,), \psi_u^T)_T = \delta_{u,v}, \quad u, v \in \Lambda. \tag{25}$$

Здесь $\delta_{u,v}$ – символ Кронекера. Очевидно, что $\psi_u^T = A_T^2 \varphi_u(T;\,\cdot\,)$ и система $\{\psi_u^T,\ u \in \Lambda\}$ также является равномерно риссовским базисом в $\mathscr{L}_T(\Lambda)$.

Мы хотели бы построить такую просто зависящую от T систему функций $\{g_u^T,\, u \in \Lambda\}$ из L_T^2, чтобы

$$(\varphi_v(T;\,\cdot\,), g_u^T)_T = \delta_{u,v}, \quad u, v \in \Lambda. \tag{26}$$

При фиксированном r, $T - r > r > T_0(\tau)$, и $u \in \Lambda$ обозначим

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\, \varphi_u(T-r; s)\, ds. \tag{27}$$

Для $r > T_0$ обозначим $\{\psi_u^r,\ u \in \Lambda\}$ систему из $\mathscr{L}_r(\Lambda)$, сопряженную (в метрике пространства L_r^2) к системе $\{\varphi_r(u;\,\cdot\,),\ u \in \Lambda\}$,

$$(\varphi_r(u;\,\cdot\,), \psi_v^r)_r = \delta_{u,\,v}, \quad u, v \in \Lambda. \tag{28}$$

Иными словами

$$\widehat{\psi}_u^r(v) = \int_{-r}^{r} \psi_u^r(x)\, e^{-ivx}\, dx = 2r\, \delta_{u,v}, \quad u, v \in \Lambda. \tag{29}$$

Определим новую систему $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$ функций из L_T^2 соотношением

$$g_u^T(t) = \frac{T\sqrt{2\pi}}{2r(T-r)}\, g(t) = \frac{T\sqrt{2\pi}}{2r(T-r)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\, \varphi_u(T-r; s)\, ds. \tag{30}$$

Как установлено в [7], при этом будет выполнено соотношение (26). Приведем следующую лемму (см. [6]), позволяющую контролировать дисперсии случайных величин вида

$$\int_{-T}^{T} \overline{g_u^T(t)}\, x(t)\, dt,$$

когда гауссовский процесс $x(t)$ имеет спектральную плотность f.

Лемма 2.2. *Пусть* $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\lambda(f) \leqslant \lambda < \infty$. *Тогда найдутся такие константы* $0 < c(\tau, r, \lambda) \leqslant C(\tau, r, \lambda) < \infty$ *и* $T_0(r, \tau) > 0$, *зависящие только от* λ, r *и* τ, *что при* $T > T_0(r, \tau)$ *для преобразования Фурье* $\widehat{g_u^T}$ *функции* g_u^T *при* $\varepsilon = 1/T$ *справедливы оценки*

$$c(\tau, r, \lambda)\, T\, f_\varepsilon(u) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g_u^T}(x)|^2\, f(x)\, dx \leqslant C(\tau, r, \lambda)\, T\, f_\varepsilon(u). \tag{31}$$

§3. Условия на спектральную плотность.

Итак, мы исследуем модель, в которой неизвестная функция s оценивается по наблюдениям над процессом

$$y(t) = s(t) + x(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{32}$$

Здесь $x(t)$ – гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью f_*, допускающей при некотором $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, представление

$$f_*(u) = \frac{f(u)}{(1+u^2)^n}, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty, \tag{33}$$

а неизвестная функция s лежит при некотором $\beta > 0$, $L > 0$ и $\gamma = \beta + n$ в подпространстве $\mathscr{L}(\Lambda; \gamma; L)$,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2\, (|u|+1)^{2\gamma} \leqslant L. \tag{34}$$

Мы будем предполагать, что неотрицательная функция f, удовлетворяет условию Макенхаупта (22). Мы наложим дополнительные условия на поведение спектральной плотности f в малой окрестности Λ_ε спектрального множества Λ,

$$\Lambda_\varepsilon = \bigcup_{u\in\Lambda} [u-\varepsilon, u+\varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \tau/2.$$

Так же как и в [8], для нас модельным будет случай, когда
при $0 < |\alpha| < 1$ функция f совпадает на Λ_ε с функцией $h_0(x)$,

$$h_0(x) = \sum_{u\in\Lambda} \mathbf{1}_{[u-\varepsilon, u+\varepsilon]}(x)\, |x-u|^\alpha, \quad \varepsilon < \tau/2, \tag{35}$$

или хорошо аппроксимируется на Λ_ε функцией h_0. При этом априорную информацию о точности этой аппроксимации мы будем описывать не в терминах средних значений $f_\varepsilon(u)$ функции f в точках $u \in \Lambda$, а в терминах средних значений $w_\varepsilon(u)$ функции $w = \ln f$. Здесь при $u \in \Lambda$

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(x)\,dx, \quad w_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \ln f(x)\,dx.$$

Мы будем предполагать,что при достаточно малом положительном $\varepsilon_0 < \tau/2$

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0,\, u\in\Lambda} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \ln h_0(x)|\,dx < \infty, \tag{36}$$

используя также и эквивалентное условие

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0,\, u\in\Lambda} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \alpha \ln \varepsilon|\,dx < \infty. \tag{37}$$

Мы будем опираться на следующий результат, установленный в [8].

Лемма 3.1. *Пусть спектральная плотность f удовлетворяет условию Макенхаупта и условию* (36). *Тогда при некоторых константах $0 < d < D$ и $0 < \varepsilon_0 < \tau/2$ имеют место неравенства*

$$d\,\varepsilon^\alpha \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant D\,\varepsilon^\alpha, \quad \text{при} \quad u \in \Lambda,\ \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{38}$$

Следующее утверждение следует из леммы 2.2.

Лемма 3.2. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\lambda(f) \leqslant \lambda < \infty$. Тогда, если выполнены условия* (36) *или* (37), *то найдутся такие константы $0 < c(\tau, r, \lambda) \leqslant C(\tau, r, \lambda) < \infty$ и $T_0(r, \tau) > 0$, зависящие только от λ, r и τ, что при $T > T_0(r, \tau)$ для преобразования Фурье $\widehat{g_u^T}$ функции g_u^T при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки*

$$c(\tau, r, \lambda)\, T\, f_\varepsilon(u) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{g_u^T}(x)\right|^2 f(x)\,dx \leqslant C(\tau, r, \lambda)\, T\, f_\varepsilon(u). \tag{39}$$

§4. Оценка сверху минимаксного риска.

Мы используем прием из работ [5, 7, 8], который заключается в следующем. Пусть оператор $\mathcal{D} = (\mathbf{1} + \frac{d}{dt})$, где $\mathbf{1}$ – тождественный оператор. На первом шаге в качестве данных, доступных статистику при оценивании функции

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut},$$

возьмем случайный процесс $Z(t) = \mathcal{D}^{n-1}y(t)$, наблюдаемый на отрезке $[-T,T]$. Следует, конечно, напомнить,что функции $s \in \mathscr{L}(\Lambda;\gamma;L)$ n раз дифференцируемы, а процесс $x(t)$ является $(n-1)$ раз дифференцируемым в среднеквадратичном. Очевидно, что

$$dY(t) := Z(t)\,dt + dZ(t) = \mathcal{D}^n s(t)\,dt + dX(t),$$

где

$$dX(t) = \mathcal{D}^{n-1}x(t)\,dt + d\,\mathcal{D}^{n-1}x(t).$$

Последнее равенство (как и два предыдущих) понимается в следующем смысле: для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}_T$

$$\int\limits_{-T}^{T} \varphi(t)\,dX(t) = \int\limits_{-T}^{T} \varphi(t)\,\mathcal{D}^{n-1}x(t)\,dt + \int\limits_{-T}^{T} \varphi(t)\,d\,\mathcal{D}^{n-1}x(t).$$

Отметим, что спектральная плотность обобщенного процесса $\frac{d}{dt}\,X(t)$ совпадает с функцией f. Отметим также, что

$$dY(t) = \sum_{u\in\Lambda} (1+iu)^n\, a(u)\, e^{iut} + dX(t).$$

В качестве несмещенных оценок $\widehat{a}_u(u)$ коэффициентов $a(u)$ выбираются при $|u| \leqslant m$ случайные величины

$$Y_u := \frac{1}{(1+iu)^n}\,\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{g_u^T(t)}\,dY(t), \quad |u| \leqslant m. \tag{40}$$

При $|u| > m$ полагается $\widehat{a}_u(u) = 0$. Уровень усечения m выбирается исходя из равенства

$$m^{1+2\beta+2n}\,\varepsilon^{1+\alpha} = 1 \quad \text{при } \varepsilon = 1/T.$$

Заметим, что

$$Y_u = a(u) + \frac{1}{(1+iu)^n}\,\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{g_u^T(t)}\,dX(t), \tag{41}$$

так как при $u, v \in \Lambda$

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \overline{g_u^T(t)}\, e^{ivt}\, dt = \delta_{u,v}.$$

Поэтому поведение при $T \to \infty$ величин $(1+u^2)^n\, \mathbf{E}\, |Y_u - a(u)|^2$ контролируется с помощью неравенств (36), а поведение при $T \to \infty$ величин $f_\varepsilon(u)$ точно так же подробно описывается в (38). Поэтому, продолжая те же выкладки, что проделаны в [5], мы приходим к нужной нам оценке сверху для минимаксного риска

$$\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*; \|\;\cdot\;\|_{\mathscr{L}}) \leqslant C\, T^{-\frac{(2\beta+2n)(1+\alpha)}{2\beta+2n+1}}.$$

Оценка снизу минимаксного риска фактически установлена в [6] и [7].

Автор благодарит рецензента за содержательные и весьма полезные замечания.

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* М., Мир, 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* М., Мир, 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее примен. **29**, No. 1, (1984), 19–32.
4. В. Н. Солев, *Адаптивная оценка функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума,* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 261–275.
5. В. Н. Солев, *Оценка функции в гауссовском стационарном шуме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 277–290.
6. В. Н. Солев, *Оценка функции в гауссовском стационарном шуме: новые спектральные условия.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2018), 275–285.
7. В. Н. Солев, *Оценка снизу минимаксного риска в одной задаче оценивания функции в стационарном гауссовском шуме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **505** (2021), 282–293.
8. В. Н. Солев, *Пространство BMO и задача оценивания функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **526** (2023), 193–206.
9. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* М., Наука, 1964.
10. D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, *Minimax risk over hyperrectangles, and implications.* — Ann. Statist. **18**, No. 3 (1990), 1416–1437.

11. W. Stepanoff, *Sur quelques généralisations des fonctions presque-périodiques.* — C. R. Acad. Sci., Paris **181** (1925), 90–92.
12. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* N. Y., Academic Press, 1981.
13. I. M. Johnstone, *Gaussian Estimation: Sequence and Wavelet Models.* Book draft, http:statweb.stanford.edu, 2017.
14. M. Ermakov, *Minimax and Bayes estimation in deconvolution problem.* — ESAIM: Probab. Statist. **12** (2008), 327–344.
15. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
16. В. Н. Солев, *Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.

Solev V. N. Approximation of spectral density and accuracy in the estimation problem.

In this paper, we construct lower and upper bounds for minimax risk in the problem of estimating the unknown pseudo-periodic function observed in the stationary noise with a spectral density satisfying the Muckenhoupt condition, with some a priori information about the behavior of the spectral density in the neighborhood of the spectrum of the signal.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27
Санкт-Петербург 191023, Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 15 октября 2024 г.