Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПО ПРОСТРАНСТВУ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С ВЕТВЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ

§1. Введение

Изучается эволюция системы частиц, которые могут не только ветвиться, т.е. размножаться, гибнуть, но и перемещаться по пространству в различных средах [1]. Такие стохастические процессы находят применение в различных областях науки – от статистической физики [2, 3] до теории гомополимеров [4].

В настоящей работе рассматривается один из таких процессов — непрерывное по времени ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Предполагается, что случайное блуждание, лежащее в основе ВСБ, является симметричным, неприводимым и однородным по времени марковским процессом. В отличие от предыдущих исследований, см., например, [1, 5–7], доказательство основных результатов проводится без дополнительного предположения о пространственной однородности случайного блуждания. Как и в [6, 7], предполагается возможность ветвления частиц во всех точках решетки, и при этом интенсивность ветвления стремится к нулю при удалении точки $x \in \mathbb{Z}^d$ от начала координат. Кроме того, накладывается дополнительное условие, гарантирующее экспоненциальный рост (по времени) среднего числа всей популяции частиц на решетке. Точные условия на процессы блуждания и ветвления сформулированы при описании модели ВСБ в §2.

Основным объектом изучения является численность частиц $\mathcal{N}(x, y_0, t)$ в момент времени t в произвольной фиксированной точке $y_0 \in \mathbb{Z}^d$ при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ имелась единственная частица, находящаяся в точке $x \in \mathbb{Z}^d$.

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, мартингалы, предельные теоремы.

Работа поддержана РНФ (грант No. 23-11-00375) и выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

Основным результатом работы является теорема 3 о равномерной по $x \in \mathbb{Z}^d$ сходимости в среднеквадратическом нормированной величины $\mathcal{N}(x, y_0, t)$ при $t \to \infty$. Для доказательства этой теоремы мы используем метод, основанный на мартингальной технике, предложенный в [6, 7]. Такой подход позволяет доказать утверждение о сходимости случайных величин к пределу в среднеквадратическом.

Применение мартингальной техники для изучения марковских ветвящихся процессов и их обобщений хорошо известно, см., например, [8, 9], и библиографию в этих работах. Предположение о симметричности случайного блуждания позволяет нам использовать иную конструкцию мартингала, базирующуюся на методах спектральной теории самосопряженных операторов (см. теорему 1 в §3).

Кратко опишем структуру статьи. В §2 напоминается определение ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с возможностью ветвления с различной интенсивностью в каждой точке $\mathbb{Z}^d$. Для применения мартингальной техники используются два ключевых предположения (6) и (12). Условие (6) определяет структуру ветвящейся среды, а условие (12) гарантирует экспоненциальный рост по времени математических ожиданий величин $\mathcal{N}(x, y_0, t)$. В §3 предлагается рассмотреть ВСБ как марковский процесс, принимающий значения в пространстве всех конечных целочисленных мер на $\mathbb{Z}^d$. Здесь же вводятся операторные семейства, порожденные марковским процессом. §4 посвящен доказательству теоремы 3 о сходимости в среднеквадратическом нормированного числа частиц в произвольной фиксированной точке $\mathbb{Z}^d$ для ВСБ при $t \to \infty$, которое основано на аппроксимации нормированного числа частиц неотрицательным мартингалом, построенным в §3.

§2. Постановка задачи и предварительные сведения

В изучаемом ВСБ время $t \geqslant 0$ предполагается непрерывным, а перемещение (блуждание) частиц описывается марковским процессом на фазовом пространстве $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ через $\|x\|_\infty$ условимся обозначать равномерную норму вектора x, именно,

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}.$$

Марковский процесс, лежащий в основе ВСБ, задается матрицей переходных интенсивностей $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$, на которую накладываются условия:

A1. $a(x,y) \geqslant 0$ при $x \neq y$ и $a(x,x) < 0$, $\sum_y a(x,y) = 0$ (*регулярность*);

A2. $a(x,y) = a(y,x)$ (*симметричность*);

A3. $\sup\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} |a(x,x)| < \infty$ (*ограниченность*);

A4. для каждых $x, y \in \mathbb{Z}^d$ найдутся такие векторы $z_0 = x, z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $y = \sum_{j=0}^k z_j$ и $a(z_{j-1}, z_j) \neq 0$ при $j = 1, \ldots, k$ (*неприводимость*);

A5. $\sup\limits_n \frac{1}{n^d}\Big(\sum\limits_{\substack{\|x\|_\infty \leqslant n,\\ \|y\|_\infty \leqslant n}} a(x,y)\Big) = 0.$

Как будет показано ниже, условие A5 гарантирует нам, что число ноль лежит в спектре оператора, определяемого матрицей A.

Через $\xi_x(t)$ обозначим траекторию марковского процесса с начальным условием $\xi_x(0) = x$. Как известно, см., например, [16], аксиомы A1–A5 определяют марковское семейство $\xi_x(t)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, с которым мы свяжем полугруппу операторов

$$P_0^t : L_2(\mathbb{Z}^d) \to L_2(\mathbb{Z}^d), \quad t \geqslant 0,$$

где оператор P_0^t действует на функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ следующим образом:

$$[P_0^t \varphi](x) = \mathbb{E}\, \varphi(\xi_x(t)). \tag{1}$$

В качестве области определения оператора P_0^t нам будет удобно выбрать $L_2(\mathbb{Z}^d)$. В этом случае, как будет показано ниже, при всех $t \geqslant 0$ оператор P_0^t будет сжимающим оператором в $L_2(\mathbb{Z}^d)$. Для $h \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ через $\|h\|$ будем обозначать норму h в $L_2(\mathbb{Z}^d)$, именно,

$$\|h\|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |h(x)|^2.$$

Вычислим генератор полугруппы P_0^t. При $x \in \mathbb{Z}^d$, $t \to 0$ имеем

$$\begin{aligned}
[P_0^t \varphi](x) - \varphi(x) &= \mathbb{E}\, \varphi(\xi_x(t)) - \varphi(x) \\
&= \varphi(x)(1 + ta(x,x)) + t \sum_{y\neq x} a(x,y)\, \varphi(y) + o(t) - \varphi(x) \\
&= t\Big(\varphi(x)\, a(x,x) + \sum_{y\neq x} a(x,y)\, \varphi(y)\Big) + o(t) \\
&= t[\mathcal{A}\varphi](x) + o(t),
\end{aligned} \tag{2}$$

где
$$[\mathcal{A}\varphi](x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y)\,\varphi(y).$$

Соотношение (2) означает, что оператор $\mathcal{A}$ является генератором (инфинитезимальным оператором) полугруппы P_0^t. Последнее утверждение эквивалентно тому, что для оператора P_0^t при всех $t \geqslant 0$ справедливо представление
$$P_0^t = e^{t\mathcal{A}}. \tag{3}$$

Используя условия $A1$, $A2$, $A3$ и тест Шура (см. [10, теорема 5.2]), нетрудно показать, что оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{Z}^d)$, а так как он симметричный, то он автоматически является самосопряженным. Далее, выбирая функции теста Шура $p = q \equiv 1$ постоянными, получаем оценку операторной нормы $\mathcal{A}$
$$R = \|\mathcal{A}\|_{L_2\to L_2} \leqslant 2\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}|a(x,x)|.$$

Покажем теперь, что оператор $\mathcal{A}$ неположителен, причем число ноль принадлежит спектру $\mathcal{A}$. Для этого рассмотрим квадратичную форму a_0, соответствующую оператору $\mathcal{A}$. Она имеет вид
$$a_0[\varphi,\varphi] = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi(y)}.$$

Покажем сначала, что спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ лежит на отрицательной полуоси $(-\infty, 0]$. Для этого покажем, что его квадратичная форма принимает только неположительные значения.

Для $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ имеем
$$\begin{aligned} a_0[\varphi,\varphi] &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} a(x,x)\,|\varphi(x)|^2 + \sum_{x\neq y} a(x,y)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi(y)} \\ &\leqslant \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} a(x,x)\,|\varphi(x)|^2 + \frac{1}{2}\biggl(\sum_{x\neq y} a(x,y)\,|\varphi(x)|^2 + \sum_{x\neq y} a(x,y)\,|\varphi(y)|^2\biggr) \\ &= \frac{1}{2}\biggl(\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y)\,|\varphi(x)|^2 + \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y)\,|\varphi(y)|^2\biggr) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) следует, что справедливо включение
$$\sigma(\mathcal{A}) \subset [-R, 0]. \tag{5}$$

Далее, покажем, что правый край спектра оператора $\mathcal{A}$ есть точка ноль. Пусть S_1 – правый край спектра. Тогда, как хорошо известно,

$$S_1 = \sup_{\{\varphi\colon \|\varphi\|=1\}} a_0[\varphi, \varphi].$$

Для $n = 1, 2, \ldots$ через G_n обозначим подмножество $\mathbb{Z}^d$ вида

$$G_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty \leqslant n\}.$$

Введем теперь последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\|\varphi_n\| = 1$, полагая

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(2n+1)^{d/2}} 1_{G_n}(x).$$

Замечая, что

$$a_0[\varphi_n, \varphi_n] = \frac{1}{(2n+1)^d} \Big(\sum_{\substack{\|x\|_\infty \leqslant n, \\ \|y\|_\infty \leqslant n}} a(x, y) \Big)$$

и пользуясь условием $A5$, получаем, что $S_1 = 0$.

Из утверждения о спектре (5) и формулы (3) немедленно вытекает, что для всех $t \geqslant 0$ оператор P_0^t является сжимающим оператором в $L_2(\mathbb{Z}^d)$.

Для описания ВСБ добавим к исходному марковскому процессу механизм ветвления. Как и в [7], будем предполагать, что источники ветвления находятся в каждой точке $\mathbb{Z}^d$. Процесс ветвления в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ задается с помощью инфинитезимальной производящей функции

$$f(x, u) = \sum_{k=0}^\infty b_k(x) u^k, \quad u \in [0, 1],\ x \in \mathbb{Z}^d,$$

где $b_1(x) \leqslant 0$, $b_k(x) \geqslant 0$ при $k \neq 1$ и $\sum_{k=0}^\infty b_k(x) = 0$.

Через $\beta(x)$ будем обозначать интенсивность источника, находящегося в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, а через $\beta^{(2)}(x)$ – соответствующий второй факториальный момент. По определению

$$\beta(x) = f'(x, 1) = \sum_{k=1}^\infty k b_k(x), \quad \beta_2(x) = f''(x, 1) = \sum_{k=2}^\infty k(k-1) b_k(x).$$

Всюду далее мы будем предполагать, что

$$\beta(x) \to 0 \quad \text{при} \quad \|x\|_\infty \to \infty, \tag{6}$$

а функция $\beta_2(x)$ ограничена на $\mathbb{Z}^d$. Как обычно, процесс ветвления предполагается независимым от процесса блуждания. Кроме приведенных выше условий далее мы будем также предполагать выполнение условия

$$\sup_{\|h\|=1}\left\{(\mathcal{A}h,h)+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\beta(x)h^2(x)\right\}>0.$$

Как будет показано далее, последнее условие гарантирует нам, что ВСБ является надкритическим, то есть среднее число частиц в популяции экспоненциально растет по t.

Следуя [7], обозначим через $X_x(t), t\geqslant 0$, марковский процесс с ветвлением, задаваемый оператором $\mathcal{A}$ и производящей функцией $f(x,u)$, с условием $X_x(0)=\delta_x$ того, что в момент времени $t=0$ в системе имеется ровно одна частица, находящаяся в точке $x\in\mathbb{Z}^d$. Процесс $X_x(t)$ далее будем рассматривать как марковский процесс, принимающий значения в пространстве $\mathcal{M}$ всех конечных целочисленных мер на $\mathbb{Z}^d$. Всякий элемент $M\in\mathcal{M}$ имеет вид

$$M=\sum_{j=1}^{k}\delta_{y_j}, \tag{7}$$

где $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $y_j\in\mathbb{Z}^d$. Важно отметить, что в представлении (7) точки y_j не обязательно различны, что соответствует тому, что в одном узле решетки $\mathbb{Z}^d$ может находиться несколько частиц одновременно, и отличаются находящиеся в одном узле частицы только своими номерами в списке частиц $\{y_1,y_2,\dots,y_k\}$. Другими словами, каждое y_j соответствует отдельной частице, которую мы кодируем занятым ею узлом решетки y_j и ее номером j в списке. Так как далее мы будем рассматривать только симметрические функции от $X_x(t)$, конкретный выбор нумерации частиц не играет роли. Для $M\in\mathcal{M}$ символом $\{M\}$ будем обозначать множество всех частиц, которое запишем как

$$\{M\}=\{y_1,y_2,\dots,y_k\}, \tag{8}$$

причем в этом представлении каждый узел решетки может встречаться несколько раз, что соответствует тому, что в этом узле находится несколько частиц.

Итак, $X_x(t)$ мы рассматриваем как $\mathcal{M}$-значный марковский случайный процесс.

Утверждения разделов 3 и 4 близки к представленным в [7], но не предполагают выполнение условия пространственной однородности для переходных интенсивностей $a(x,y) = a(0, y-x) = a(y-x)$ марковского процесса, см. аксиомы A1–A5. В связи с этим, для полноты изложения, мы проводим эти доказательства с учетом выполнения аксиом A1–A5.

§3. Операторные семейства, порождаемые ветвящимся марковским процессом

Так как фазовое пространство $\mathcal{M}$ марковского процесса $X_x(t)$ устроено достаточно сложно, мы не будем пытаться выписывать аналог "классической" полугруппы (1). Вместо этого мы определим два более простых операторных семейства, первое из которых будет являться полугруппой, а второе уже нет (см. ниже леммы 2 и 4). Данный подход близок к идее построения кратных стохастических интегралов (см., например, [11]), хотя нам для наших целей будет достаточно ограничиться интегралами кратности один и два. Напомним, что процесс $X_x(t)$ мы рассматриваем как случайный процесс со значениями в пространстве $\mathcal{M}$, при этом случайное множество $\{X_x(t)\}$ определяется формулой (8).

Для каждых $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$ и $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ определим случайные величины $I_{t,x}(\varphi)$ и $I^{(2)}_{t,x}(\varphi)$, полагая

$$I_{t,x}(\varphi) = \sum_{y \in \{X_x(t)\}} \varphi(y) = \int_{\mathbb{Z}^d} \varphi \, dX_x(t), \tag{9}$$

$$I^{(2)}_{t,x}(\varphi) = \sum_{\{y_j, y_m\} \subset \{X_x(t)\},\, j \neq m} \varphi(y_j)\, \varphi(y_m). \tag{10}$$

В последней формуле суммирование проводится по всем двухчастичным подмножествам множества $\{X_x(t)\}$. По определению имеем

$$I_{0,x}(\varphi) = \varphi(x), \quad I^{(2)}_{0,x}(\varphi) = 0.$$

Из (9) и (10) легко выводится соотношение

$$(I_{t,x}(\varphi))^2 = 2I^{(2)}_{t,x}(\varphi) + I_{t,x}(\varphi^2). \tag{11}$$

Для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор P^t, полагая

$$[P^t \varphi](x) = \mathbb{E}\, I_{t,x}(\varphi).$$

Далее нам понадобится одно полезное свойство случайного процесса $I_{t,x}(\varphi)$. Через $\mathcal{F}_t$ обозначим σ–алгебру, порожденную процессом $X_x(t)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любых* $0 \leqslant t < T$ *и* $x \in \mathbb{Z}^d$ *справедливо соотношение*

$$\mathbb{E}\,(I_{T,x}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = I_{t,x}(P^{T-t}\varphi).$$

Доказательство. Так как процесс $X_x(t)$ является марковским, имеем

$$\mathbb{E}\,(I_{T,x}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\,(I_{T,x}(\varphi)|X_x(t)).$$

Вычислим сначала условное математическое ожидание

$$\mathbb{E}\,(I_{T,x}(\varphi)|X_x(t) = M),$$

где $M \in \mathcal{M}$.

Пусть $M = \sum_{j=1}^{k} \delta_{y_j}$ для некоторых $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{Z}^d$. Тогда, в силу (8), выполнено $\{M\} = \{y_1, \dots, y_k\}$.

Далее, разбивая сумму $I_{T,x}(\varphi)$ на k кластеров частиц, отвечающих общему “предку” y_j, получаем

$$\mathbb{E}\,\big(I_{T,x}(\varphi)\big|X_x(t) = M\big) = \sum_{j=1}^{k} P^{T-t}\varphi(y_j).$$

Теперь, подставляя в правую часть последнего равенства $M = X_x(t)$ и пользуясь определением (9), получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Семейство операторов* P^t *является полугруппой, то есть для всех* $s, t \geqslant 0$ *справедливо соотношение*

$$P^{t+s} = P^t P^s.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 1, получаем

$$\mathbb{E}\,(I_{t+s,x}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = I_{t,x}(P^s\varphi).$$

Вычисляя математическое ожидание от левой и правой частей последнего равенства, получаем утверждение леммы. □

Оператор P^t для всех t мы будем рассматривать на области определения $\mathcal{D}(P^t) = L_2(\mathbb{Z}^d)$.

Введем диагональный оператор покоординатного умножения $\mathcal{B}$, действующий на функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ следующим образом:

$$[\mathcal{B}\varphi](x) = \beta(x)\,\varphi(x),$$

для любого $x \in \mathbb{Z}^d$. Аналогично тому, как это делалось для полугруппы P_0^t, найдем генератор полугруппы P^t. Заметим, что поскольку всюду речь идет только об ограниченных операторах, область определения генератора совпадает с $L_2(\mathbb{Z}^d)$.

Лемма 3. *Генератор полугруппы P^t есть оператор $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, то есть для всех $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $x \in \mathbb{R}^d$ справедливо*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{[P^t\varphi](x)-\varphi(x)}{t} = [\mathcal{A}\varphi](x) + \beta(x)\,\varphi(x) = [(\mathcal{A}+\mathcal{B})\,\varphi](x).$$

Доказательство. При $t \to 0+$ имеем

$$\begin{aligned}
[P^t\varphi](x)-\varphi(x) &= \mathbb{E}\, I_{t,x}(\varphi) - \varphi(x) \\
&= \varphi(x)(1+ta(x,x)+o(t))(1+tb_1(x)+o(t)) \\
&\quad + t\sum_{y\neq x} a(x,y)\,\varphi(y) + t\sum_{k\neq 1} kb_k(x)\,\varphi(x) + o(t) - \varphi(x) \\
&= t\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y)\,\varphi(y) + t\beta(x)\,\varphi(x) + o(t). \qquad \square
\end{aligned}$$

Утверждение леммы 3 эквивалентно операторному тождеству

$$P^t = e^{t\mathcal{H}}, \quad \text{где} \quad \mathcal{H} = \mathcal{A}+\mathcal{B}.$$

Далее нам потребуются некоторые свойства спектра оператора $\mathcal{H}$. Прежде всего отметим, что $\mathcal{H}$ является самосопряженным ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{Z}^d)$. Кроме того, оператор $\mathcal{H}$ представляет собой компактное возмущение оператора $\mathcal{A}$ (см. [12], глава 4, § 6). Из теоремы 3 главы 9 книги [13] вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{H}$. Как мы ранее показали, спектр $\mathcal{A}$ содержится в интервале $[-R,0]$. Соответственно, положительный спектр возмущенного оператора $\mathcal{H}$ может состоять только из собственных значений конечной кратности, возможно сгущающихся к нулю. Последнее означает, что для любого $\delta > 0$ в множестве $[\delta,\infty)$ может находиться только конечное число точек спектра.

Далее мы всегда будем предполагать, что квадратичная форма оператора $\mathcal{H}$ принимает положительные значения, то есть выполнено условие

$$\lambda_0 = \sup_{\|h\|=1} \left\{ \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y)\,h(x)\,h(y) + \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \beta(x)\,h^2(x) \right\}$$
$$= \sup_{\|h\|=1} \{(\mathcal{H}h,h)\} > 0. \tag{12}$$

Условие (12) гарантирует (см. [13], глава 10, §1), что у оператора $\mathcal{H}$ имеется положительное собственное значение. Из теоремы Крейна–Рутмана (см. [14] и [15]) вытекает, что число λ_0 является простым собственным значением оператора $\mathcal{H}$, которому соответствует строго положительная собственная функция $\varphi_0 \in L_2(\mathbb{Z}^d)$.

Сформулируем и докажем важное для последующего утверждение.

Теорема 1. *Пусть φ – собственная функция оператора $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, соответствующая собственному значению λ. Тогда для любого $x \in \mathbb{Z}^d$ процесс*

$$\eta(t,x) = e^{-\lambda t} I_{t,x}(\varphi), \quad \eta(0,x) = \varphi(x),$$

является $\mathcal{F}_t$-мартингалом.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из условия (12) вытекает, что хотя бы одно собственное значение $\lambda > 0$ у оператора $\mathcal{H}$ имеется. Так как φ является собственной функцией оператора $\mathcal{H}$, отвечающей собственному значению λ, то для всех $s \geqslant 0$ функция φ автоматически является собственной функцией оператора $e^{s\mathcal{H}}$, отвечающей собственному значению $e^{\lambda s}$, что означает справедливость соотношения $P^s\varphi = e^{\lambda s}\varphi$ (про определение функции от самосопряженного оператора (см. подробнее [13], глава 6).

Далее, пусть $0 \leqslant t < T$. В силу леммы 1 имеем

$$\mathbb{E}(\eta(T,x)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(e^{-\lambda T} I_{T,x}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = e^{-\lambda T} I_{t,x}(P^{T-t}\varphi)$$
$$= e^{-\lambda T} e^{\lambda(T-t)} I_{t,x}(\varphi) = e^{-\lambda t} I_{t,x}(\varphi) = \eta(t,x). \qquad \square$$

Рассмотрим старшее собственное значение λ_0 оператора $\mathcal{H}$ и отвечающую ему собственную функцию φ_0. Как уже было отмечено, это собственное значение является простым (единичной кратности), а функция φ_0 может быть выбрана строго положительной. Из теоремы 1 вытекает, что процесс $\eta(t,x) = e^{-\lambda_0 t} I_{t,x}(\varphi_0)$ является $\mathcal{F}_t$-мартингалом.

Более того, этот мартингал является неотрицательным, а тогда из теоремы Дуба (см. [16], глава 3) следует, что с вероятностью единица существует предел

$$\eta(\infty, x) = \lim_{t\to\infty} \eta(t, x). \tag{13}$$

Далее мы покажем, что предел в (13) существует не только почти наверное, но и в среднеквадратическом.

Чтобы доказать сходимость в среднеквадратическом нам нужно оценить величину $\mathbb{E}(\eta(t,x))^2$. В силу (11) для этого достаточно оценить величину $\mathbb{E}\, I^{(2)}_{t,x}(\varphi_0)$. С этой целью для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор Q^t, полагая

$$[Q^t\varphi](x) = \mathbb{E}\, I^{(2)}_{t,x}(\varphi).$$

Отметим, что семейство операторов Q^t уже не является полугруппой. Следующее утверждение дает полезную замену полугруппового свойства.

Лемма 4. *Для всех неотрицательных s, t справедливо соотношение*

$$Q^{t+s} = P^tQ^s + Q^tP^s. \tag{14}$$

Доказательство. Для произвольной $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ вычислим условное математическое ожидание

$$\mathbb{E}\,(I^{(2)}_{t+s,x}(\varphi)|X_x(t) = M),$$

где $M \in \mathcal{M}$.

Пусть $M = \sum_{j=1}^k \delta_{y_j}$ для некоторых $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{Z}^d$. Тогда, в силу (8), выполнено $M = \{y_1, \dots, y_k\}$.

Далее, частицы, присутствующие в системе в момент времени $t+s$, разобьем на k кластеров, отвечающих общему “предку” y_j, а в свою очередь, сумму $I^{(2)}_{t+s,x}(\varphi)$ разобьем на суммы произведений $\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)$, где z_1, z_2 принадлежат одному кластеру и аналогичные суммы, где z_1, z_2 принадлежат разным кластерам. Получим соотношение

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(I^{(2)}_{t+s,x}(\varphi)|X_x(t) = M) &= \sum_{j=1}^k \mathbb{E}\, I^{(2)}_{s,y_j}(\varphi) + \sum_{j\neq m} \mathbb{E}\, I_{s,y_j}(\varphi)\,\mathbb{E}\, I_{s,y_m}(\varphi)\\ &= \sum_{j=1}^k [Q^s\varphi](y_j) + I^{(2)}_{t,x}(P^s\varphi).\end{aligned}$$

Теперь, подставляя в правую часть последнего равенства $M = X_x(t)$ и вычисляя математическое ожидание, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 5. *Функция* $[Q^t\varphi](x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d}{dt}[Q^t\varphi](x) = [\mathcal{H}Q^t\varphi](x) + \frac{1}{2}\,\beta_2(x)\cdot([P^t\varphi](x))^2.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любых $\psi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ справедливо соотношение

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{[Q^{\Delta t}\psi](x)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} b_k(x)\,k(k-1)\,\psi^2(x) = \frac{1}{2}\beta_2(x)\,\psi^2(x).$$

Полагая в (14) $t = \Delta t$, $s = t$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Q^t\varphi(x) &= \lim_{\Delta t\to 0+}\frac{[Q^{\Delta t+t}\varphi](x) - [Q^t\varphi](x)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0+}\frac{[P^{\Delta t}Q^t\varphi](x) - [Q^t\varphi](x)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0+}\frac{[Q^{\Delta t}P^t\varphi](x)}{\Delta t}\\ &= [\mathcal{H}Q^t\varphi](x) + \frac{1}{2}\,\beta_2(x)\cdot([P^t\varphi](x))^2.\end{aligned}$$
$\square$

Из лемм 2 и 5 вытекает, что функции $u_1(t,x) = \mathbb{E}\,I_{t,x}(\varphi) = P^t\varphi(x)$ и $u_2(t,x) = \mathbb{E}\,I^{(2)}_{t,x}(\varphi) = Q^t\varphi(x)$ являются решениями следующей системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \mathcal{H}u_1,\\ \frac{du_2}{dt} &= \mathcal{H}u_2 + \frac{1}{2}\,\beta_2(x)\cdot u_1^2,\end{aligned}$$

удовлетворяющими начальным условиям $u_1(0,x) = \varphi(x)$ и $u_2(0,x) = 0$, соответственно.

Решая эту систему, получаем

$$u_1(t,x) = P^t\varphi(x) = \big[e^{t\mathcal{H}}\varphi\big](x), \tag{15}$$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2(\,\cdot\,)\,u_1^2(s,\,\cdot\,)\big)\big](x)\,ds. \tag{16}$$

Пусть, как и выше, $\lambda_0 > 0$ – старшее собственное значение, $\varphi_0 > 0$ – соответствующая нормированная собственная функция оператора $\mathcal{H}$. Обозначим через λ_1, где $\lambda_1 < \lambda_0$, правую границу оставшегося спектра.

Нам понадобятся два простых неравенства: для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ справедливо неравенство

$$\|e^{t\mathcal{H}}\varphi\| \leqslant e^{t\lambda_0}\|\varphi\|, \tag{17}$$

а для любой функции φ, принадлежащей ортогональному дополнению к φ_0, справедливо неравенство

$$\|e^{t\mathcal{H}}\varphi\| \leqslant e^{t\lambda_1}\|\varphi\|. \tag{18}$$

Кроме того, мы будем неоднократно использовать неравенство: для любого $\psi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$

$$\|\psi\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{Z}^d} |\psi(x)| \leqslant \|\psi\|.$$

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\,(\eta(t,x) - \eta(\infty,x))^2 = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Покажем, что семейство случайных функций $\eta(t,x)$ равномерно по $x \in \mathbb{Z}^d$ фундаментально в $L_2(\Omega)$ при $t \to \infty$, т.е. для него выполнено

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\,(\eta(t_2,x) - \eta(t_1,x))^2 \underset{t_1,t_2\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{20}$$

Пусть $t_2 > t_1 > 0$. Так как процесс $\eta(t,x)$ – $\mathcal{F}_t$-мартингал, то для любого фиксированного $x \in \mathbb{Z}^d$ мы имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(\eta(t_2,x) - \eta(t_1,x))^2 &= \mathbb{E}\,(\eta(t_2,x))^2 - 2\mathbb{E}\,(\eta(t_2,x)\cdot\eta(t_1,x)) + \mathbb{E}\,(\eta(t_1,x))^2\\ &= \mathbb{E}\,(\eta(t_2,x))^2 - \mathbb{E}\,(\eta(t_1,x))^2.\end{aligned} \tag{21}$$

Для $t > 0$ вычислим величину

$$\mathbb{E}\,(\eta(t,x))^2 = e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,(I_{t,x}(\varphi_0))^2.$$

В силу (11), имеем

$$e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,(I_{t,x}(\varphi_0))^2 = 2e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,I^{(2)}_{t,x}(\varphi_0) + e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,I_{t,x}(\varphi_0^2). \tag{22}$$

Из (17) следует, что

$$\begin{aligned} r(t) = \sup_x (e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,I_{t,x}(\varphi_0^2)) &\leqslant \|e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,I_{t,\cdot}(\varphi_0^2)\|\\ &= e^{-2\lambda_0 t}\|e^{t\mathcal{H}}\varphi_0^2\| \underset{t\to\infty}{\to} 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Вычислим первое слагаемое в правой части (22). Для этого воспользуемся формулой (16) при $\varphi = \varphi_0$. В этом случае $u_1(t,x) = e^{\lambda_0 t}\varphi_0(x)$, а

$$u_2(t,x) = \mathbb{E}\, I^{(2)}_{t,x}(\varphi_0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0^2\big)\big](x)\, e^{2\lambda_0 s}\, ds.$$

Соответственно, мы имеем

$$\begin{aligned} 2e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\, I^{(2)}_{t,x}(\varphi_0) &= \int\limits_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0^2\big)\big](x)\, e^{-2\lambda_0 (t-s)}\, ds \\ &= \int\limits_0^t \big[e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0^2\big)\big](x)\, e^{-2\lambda_0 s}\, ds. \end{aligned} \tag{24}$$

Используя (21), (22), (23) и (24), получаем

$$\mathbb{E}\,(\eta(t_2,x) - \eta(t_1,x))^2 \leqslant \left\| \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0^2\big)\, e^{-2\lambda_0 s}\, ds \right\| + r(t_1) + r(t_2), \tag{25}$$

где $r(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Оценим теперь первое слагаемое в правой части (25). Используя (17), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0^2\big) e^{-2\lambda_0 s}\, ds \right\| &\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} \big\| e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0^2\big)\big\|\, e^{-2\lambda_0 s}\, ds \\ &\leqslant \|\beta_2\varphi_0^2\| \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda_0 s}\, ds \\ &\leqslant \frac{\|\beta_2\|_\infty}{\lambda_0}(e^{-\lambda_0 t_1} - e^{-\lambda_0 t_2}). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства вытекает (20) и, соответственно, существование равномерного по $x \in \mathbb{Z}^d$ предела в $L_2(\Omega)$ у функции $\eta(t,x)$ при $t \to \infty$. Этот предел при всех x совпадает п.н. с $\eta(\infty, x)$, так как и из сходимости в $L_2(\Omega)$, и из сходимости почти наверное вытекает сходимость по вероятности. $\square$

§4. Предельная теорема для числа частиц в точке решетки

Пусть, как и в предыдущих разделах, $X_x(t)$ – ветвящийся марковский процесс, удовлетворяющий начальному условию $X_x(0) = \delta_x$, а $y_0 \in \mathbb{Z}^d$ – фиксированная точка решетки. Через $\mathcal{N}(x, y_0, t)$ обозначим число частиц ветвящегося процесса $X_x(t)$ в точке y_0 в момент времени t.

Для случайного процесса $\mathcal{N}(x, y_0, t)$ справедлива следующая предельная теорема.

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left(e^{-\lambda_0 t}\mathcal{N}(x, y_0, t) - \varphi_0(y_0)\eta(\infty, x)\right)^2 = 0.$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что справедлива формула

$$\mathcal{N}(x, y_0, t) = I_{t,x}(\psi),$$

где $\psi(y) = \mathbb{I}_{\{y_0\}}(y)$ – индикаторная функция одноточечного множества $\{y_0\}$.

Разложим функцию ψ на ее проекцию (в $L_2(\mathbb{Z}^d)$) на функцию φ_0 и на проекцию на ортогональное дополнение к φ_0:

$$\psi = \varphi_0(y_0)\,\varphi_0 + \varphi.$$

Далее, имеем

$$\mathcal{N}(x, y_0, t) = I_{t,x}(\psi) = \varphi_0(y_0)\, I_{t,x}(\varphi_0) + I_{t,x}(\varphi),$$

и, соответственно,

$$e^{-\lambda_0 t}\mathcal{N}(x, y_0, t) = \varphi_0(y_0)\,\eta(t, x) + e^{-\lambda_0 t} I_{t,x}(\varphi). \tag{26}$$

Из (19) вытекает, что для доказательства утверждения теоремы нам достаточно показать, что второе слагаемое в правой части (26) равномерно по $x \in \mathbb{Z}^d$ стремится к нулю в $L_2(\Omega)$ при $t \to \infty$.

Для $t > 0$ вычислим величину

$$e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,(I_{t,x}(\varphi))^2.$$

В силу (11), имеем

$$e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbb{E}\,(I_{t,x}(\varphi))^2 = 2e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbb{E}\, I^{(2)}_{t,x}(\varphi) + e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbb{E}\, I_{t,x}(\varphi^2). \tag{27}$$

Из (17) следует, что

$$r(t) = \sup_x |e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbb{E}\,I_{t,x}(\varphi^2)| \leqslant \|e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbb{E}\,I_{t,\cdot}(\varphi^2)\| = e^{-2\lambda_0 t}\|e^{t\mathcal{H}}\varphi^2\| \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Теперь нам достаточно показать, что $L_2(\mathbb{Z}^d)$-норма первого слагаемого в (27) стремится к нулю. Обозначим это первое слагаемое через $v(t,x)$. В силу (16), имеем

$$v(t,x) = 2e^{-2\lambda_0 t}\mathbb{E}\,I^{(2)}_{t,x}(\varphi) = e^{-2\lambda_0 t}\int_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2(e^{s\mathcal{H}}\varphi)^2\big)\big](x)\,ds.$$

Далее, пользуясь (17), (18) (напомним, что φ лежит в ортогональном дополнении к φ_0), получаем

$$\begin{aligned}\|v(t,\cdot)\| &\leqslant e^{-2\lambda_0 t}\int_0^t \big\|e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2(e^{s\mathcal{H}}\varphi)^2\big)\big\|\,ds\\ &\leqslant \|\beta_2\|_\infty\|\varphi\|^2 e^{-2\lambda_0 t}\int_0^t e^{\lambda_0(t-s)}e^{2\lambda_1 s}\,ds\\ &= \|\beta_2\|_\infty\|\varphi\|^2 e^{-\lambda_0 t}\int_0^t e^{\lambda_1 s}\,ds.\end{aligned}$$

Так как $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_0$, то последнее выражение стремится к нулю при $t\to\infty$, что и завершает доказательство теоремы. □

Отметим еще, что предельная теорема 3 является прямым обобщением теоремы 5 §VII книги [16] со случая надкритического ветвящегося процесса на случай марковского процесса с ветвлением частиц.

Список литературы

1. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.* М., Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, 2007.
2. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaĭkin, D. D. Sokolov, *Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium.* — Sov. Sci. Rev., Sect. C, Math. Phys. Rev. **7** (1988), 1–110.
3. J. Gärtner, S. A. Molchanov, *Parabolic problems for the Anderson model. II. Second-order asymptotics and structure of high peaks.* — Probab. Theory Relat. Fields **111**, No. 1 (1998), 17–55.

4. M. Cranston, L. Koralov, S. Molchanov, B. Vainberg, *Continuous model for homopolymers.* — J. Funct. Anal. **256**, No. 8 (2009), 2656–2696.
5. Iu. Makarova, D. Balashova, S. Molchanov, E. Yarovaya, *Branching random walks with two types of particles on multidimensional lattices.* — Mathematics **10**, No. 6 (2022), 1–46.
6. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Мартингальный метод исследования ветвящихся случайных блужданий.* — Успехи матем. наук **5** (2022), 223–224.
7. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий.* — Теория вероятн. и ее примен. **68**, No. 4 (2023), 779–795.
8. Дж. Д. Биггинс, *Сходимость мартингалов и большие уклонения в ветвящемся случайном блуждании.* — Теория вероятн. и ее примен. **37**, No. 2 (1992), 301–306.
9. A. Ioffe, *A new martingale in branching random walk.* — Ann. Appl. Probab. **3**, No. 4 (1993), 1145–1150.
10. P. R. Halmos, V. S. Sunder, *Bounded Integral Operators on L_2-spaces.* Springer Science & Business Media **96**, 2012.
11. P. Major, *Multiple Wiener–Ito Integrals. With Applications to Limit Theorems.* — Lecture Notes Math., **849**, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 2014.
12. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., Наука, 1972.
13. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* СПб.–М.–Краснодар, Лань, 2010.
14. K.-Ch. Chang, X. Wang, X. Wu, *On the spectral theory of positive operators and PDE applications.* — Discrete Contin. Dyn. Syst. **40**, No. 6 (2020), 3171–3200
15. П. П. Забрейко, С. В. Смицких, *Об одной теореме М. Г. Крейна—М. А. Рутмана.* — Функц. анализ и его прил. **13**, No. 3 (1979), 81–82.
16. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* М., Наука, 1977.

Smorodina N. V., Yarovaya E. B. Limit theorem for non homogeneous by space random walks with branching of particles.

We consider a symmetric, irreducible, continuous-time random walk (a Markov process) on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, with the possibility of particle branching at any lattice point. The evolution of the process starts from a single particle. Unlike previous works of the authors, the proof of the limit theorem on mean squared convergence of the normalized number of particles at an arbitrary fixed point of the lattice (at $t \to \infty$) fixed point of the lattice (at $t \to \infty$) is carried out without an additional assumption on spatial homogeneity of the random walk.

ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия;
Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН,
Москва, Россия; Санкт-Петербургский
государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия;
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,
Москва, Россия
E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su

Поступило 15 октября 2024 г.