Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

М. В. Платонова, К. С. Рядовкин

ВЕТВЯЩИЕСЯ ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДАХ

§1. Введение

В работе рассматривается ветвящийся диффузионный процесс в $\mathbf{R}^d$. Такой процесс устроен следующим образом:

- В начальный момент времени $t = 0$ в некоторой точке $x \in \mathbf{R}^d$ находится единственная частица.
- Время жизни τ этой частицы имеет стандартное экспоненциальное распределение, то есть
$$\mathbf{P}\,(\tau > t) = e^{-t}.$$
- В течение своей жизни частица перемещается в $\mathbf{R}^d$ вдоль траектории случайного процесса $\xi_x(t)$, который является решением стохастического дифференциального уравнения
$$d\xi_x(t) = \sigma(\xi_x(t))\,dw(t) + b(\xi_x(t))\,dt, \quad \xi_x(0) = x, \tag{1}$$
где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс в $\mathbf{R}^d$.
- В момент времени τ частица погибает, и в этот момент в той же точке появляется случайное число новых частиц в соответствии с вероятностным распределением $\{p_k(y)\}_{k=0}^{\infty}$, где $p_k(y)$, $y \in \mathbf{R}^d$, $k = 0, 1, \dots,$ – вероятность того, что в точке $y \in \mathbf{R}^d$ появилось k новых частиц при условии, что гибель исходной частицы произошла в точке $y \in \mathbf{R}^d$.
- Новые частицы эволюционируют независимо друг от друга по тем же правилам, независимо от остальных частиц.

Отметим, что процесс $\xi_x(t)$ называется диффузионным процессом (см. [12, 14]). Нестрого говоря, в уравнении (1) перемещение в пространстве описывается двумя механизмами: с одной стороны есть макроскопическая скорость перемещения $b(x)$, зависящая от положения,

---

Ключевые слова: ветвящиеся диффузионные процессы, преобразование Гельфанда, периодическое возмущение, эллиптический дифференциальный оператор второго порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 19-71-30002.

которая отвечает перемещению на $b(\xi_x(t))\,\delta t + o(\delta t)$ за малый промежуток времени $[t, t+\delta t)$, с другой стороны есть флуктуационная составляющая перемещения, которая является случайной величиной с нулевым математическим ожиданием. Эта составляющая отвечает перемещению на $\sigma(\xi_x(t))(w(t+\delta(t)) - w(t)) + o(\delta t)$ за тот же промежуток времени $[t, t+\delta t)$.

Введем обозначение

$$\beta(y) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(y) - 1, \quad y \in \mathbf{R}^d.$$

Функция $\beta(y)$ отвечает за среднее число потомков одной частицы при одном делении. Будем называть функцию $\beta(y)$ интенсивностью ветвления. Будем предполагать, что функции $\sigma(y)$, $b(y)$ в (1) являются липшицевыми, а функция $\beta(y)$ – ограничена.

В [18] рассмотрена модель, в основе которой лежит винеровский процесс в ограниченной области, что соответствует случаю $b = 0$ и $\sigma = I$ в (1), а распределение числа новых частиц не зависит от точки области (т.е. $\beta(y) = \mathrm{const}$). Были получены результаты о вероятностях вырождения таких процессов, а также исследовано поведение среднего числа частиц во всем пространстве. В работе [2] исследовалась вероятность вырождения ветвящегося диффузионного процесса (как для ограниченных, так и для неограниченных областей). Результаты об асимптотическом поведении ветвящихся диффузионных процессов в $\mathbf{R}^d$ в случае, когда ветвление происходит только в компактной области, можно найти в [6, 7].

В данной работе будем исследовать периодический ветвящийся диффузионный процесс в $\mathbf{R}^d$. Поэтому дополнительно предположим, что $\sigma(y)$, $b(y)$ и $\beta(y)$ являются периодическими функциями относительно некоторой решетки

$$\Gamma = \Big\{ g \in \mathbf{R}^d : g = \sum_{j=1}^{d} n_j g_j,\ n_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \ldots, d \Big\},$$

где $g_1, \ldots, g_d \in \mathbf{R}^d$ – набор линейно независимых векторов.

Для надкритического ветвящегося винеровского процесса в $\mathbf{R}$ при $b = 0$ и $\sigma = 1$ сходимость нормированного числа частиц в фиксированной ограниченной области была доказана в [4] с использованием методов мартингальной сходимости. В работе [3] рассматривалась модель ветвящегося диффузионного процесса в периодической среде в $\mathbf{R}^d$ в случае, когда общее число частиц экспоненциально растет. Было получено асимптотическое поведение при $t \to \infty$ моментов числа частиц в ограниченной области. Были рассмотрены области, расстояние до которых от точки старта растет различным образом.

Отметим, что в упомянутых работах частица при ветвлении могла либо дать два потомка, либо умереть. В данной работе мы исследуем асимптотическое поведение только первого момента числа частиц в ограниченной и статичной области, но без ограничения на количество непосредственных потомков одной частицы и без условий экспоненциального роста среднего числа частиц в системе. Также, по сравнению с работой [3], в нашей работе несколько ослаблены условия гладкости коэффициентов. Однако мы исследуем только случай, когда генератор полугруппы диффузионного процесса может быть записан в дивергентной форме (см. условие (ii) ниже).

Пусть D – ограниченное множество в $\mathbf{R}^d$. Мы покажем, что среднее число частиц в D в момент времени t при условии, что в начальный момент времени была одна частица в точке x, является решением задачи Коши для параболического дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Au(x,t); \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{2}$$

где A – это некоторый полуограниченный сверху эллиптический оператор, а в качестве начальной функции $\varphi(x)$ нужно выбрать индикаторную функцию $\chi_D(x)$ множества D, определяемую равенством

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 0, & x \notin D; \\ 1, & x \in D. \end{cases}$$

Несмотря на то, что нас больше всего интересует случай $\varphi(x) = \chi_D(x)$, в дальнейшем мы будем рассматривать произвольные $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$, имеющие компактный носитель, так как случай именно индикаторной функции никак специально не выделяется.

Из (2) следует, что поведение функции $u(x,t)$ при больших временах определяется спектром оператора A. Будем предполагать, что коэффициенты диффузионного процесса в (1) удовлетворяют таким условиям, что оператор A является самосопряженным периодическим оператором в $L_2(\mathbf{R}^d)$ (условия будут сформулированы ниже). В этом случае его можно частично диагонализовать с помощью преобразования Гельфанда (подробнее см. [10]). Можно показать, что оператор A представляется в виде прямого интеграла операторов, действующих на ячейке периодов, склеенной в тор. В нашем случае у этих операторов будет дискретный спектр, который может накапливаться только к минус бесконечности. Отметим, что в случае неотрицательного начального данного из результатов [1] следует, что главный член асимптотики $u(x,t)$ при $t \to \infty$ определяется только поведением правого края первой (правой) зоны спектра оператора A.

Основной результат данной работы содержится в теореме 4.2. В размерностях $d \leqslant 3$ получено асимптотическое равенство при $t \to \infty$

$$u(x,t) = \frac{e^{t \max \sigma(A)}}{t^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)}{t^n},$$

где $\sigma(A)$ – спектр оператора A, а функции $u_n(x)$ могут быть вычислены с помощью собственных функций некоторого вспомогательного оператора. Отметим, что полученная асимптотика верна для любой ограниченной области D, но не является равномерной по x: чем дальше область D находится от точки старта, тем больше времени должно пройти, чтобы эта асимптотика оказалась верна.

Для случая произвольной размерности получен более слабый результат (теорема 4.1). Именно, для любой функции $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ с компактным носителем при $t \to \infty$ выполнено

$$\langle u(\,\cdot\,,t), f(\,\cdot\,)\rangle_{L_2(\mathbf{R}^d)} = \frac{e^{t \max \sigma(A)}}{t^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(f)}{t^n}.$$

Здесь все коэффициенты вновь могут быть выписаны явно. Величину в левой части формулы выше при $\varphi(x) = \chi_D(x)$ и $f(x) \geqslant 0$, такой что $\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,dx = 1$, можно рассматривать как среднее число частиц в момент времени t в множестве D в случае, когда начальная конфигурация частиц случайна и мера, равная среднему числу частиц в множестве, имеет плотность f.

Для марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем (без перемещения в пространстве) используется следующая классификация: процесс называется надкритическим, если среднее число непосредственных потомков одной частицы больше единицы, критическим, если среднее число непосредственных потомков одной частицы равно единице, и докритическим, если среднее число непосредственных потомков одной частицы меньше единицы (см. [18]). Свойства поведения процесса в этих трех случаях существенно отличаются друг от друга. Например, в докритическом и критическом случаях с вероятностью 1 процесс вырождается при $t \to \infty$, а в надкритическом случае процесс не вырождается с положительной вероятностью. Различается и поведение среднего числа частиц в таких системах при $t \to \infty$: в надкритическом случае происходит экспоненциальный рост, в докритическом – экспоненциальное убывание, а в критическом случае – среднее число не меняется. Для ветвящегося диффузионного процесса в нашем случае можно провести аналогичную классификацию, но параметр будет более сложным. Именно, ответ дается в терминах правого края спектра оператора A: если правый край больше нуля, то процесс оказывается надкритическим, если меньше нуля – докритическим, а если равен нулю – критическим.

Отметим, что задача о ветвящихся случайных блужданиях на периодических графах достаточно подробно изучена. Известно, что поведение среднего числа частиц зависит от свойств некоторого оператора. Этот оператор может быть представлен как сумма двух операторов, один из которых отвечает за пространственное перемещение частиц (им оказывается дискретный оператор Лапласа), а другой отвечает за ветвление, и его удобно рассматривать в качестве возмущения. В работах [9, 21, 22] рассмотрен случай с конечным числом источников ветвления, в работе [17] был рассмотрен случай периодического расположения источников ветвления. Отметим также недавнюю работу [19], в которой за ветвление отвечает некоторый компактный оператор.

В разделе 2 мы подробно опишем модель, рассматриваемую в работе. Раздел 3 посвящен результатам о спектральных свойствах оператора, отвечающего за среднее число частиц в ограниченной области. Наконец, в разделе 4, используя результаты разделов 2 и 3, мы докажем теоремы 4.1 и 4.2.

Авторы выражают благодарность Н. В. Смородиной и Т. А. Суслиной за внимание к работе и ценные замечания.

§2. Постановка задачи и предварительные сведения

Опишем ветвящийся диффузионный процесс в $\mathbf{R}^d$. Пусть $\sigma(x)$ – матрица-функция размера $d \times d$, $b(x)$ – d-мерная вектор-функция. Будем считать, что перемещение частиц описывается диффузионным процессом, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_x(t) = \sigma(\xi_x(t))\,dw(t) + b(\xi_x(t))\,dt, \quad \xi_x(0) = x,$$

где $w(t)$ – стандартный d-мерный винеровский процесс.

Обозначим стандартную норму в $\mathbf{R}^d$ через $\|\cdot\|$. Предположим, что функции $b^j(x)$ и $\sigma^j_l(x)$, $j, l = 1, \ldots, d$, липшицевы, то есть

(i) существует константа $L > 0$, такая что при всех $j, l = 1, \ldots, d$ и $x, y \in \mathbf{R}^d$ выполнено

$$|b^j(x) - b^j(y)| \leqslant L\|x - y\|, \qquad |\sigma^j_l(x) - \sigma^j_l(y)| \leqslant L\|x - y\|.$$

При таких условиях существует сильное решение стохастического уравнения при $t \geqslant 0$ (см. [12], §12.4). Полученное решение $\xi_x(t)$ является диффузионным процессом с инфинитезимальным оператором A_0, определенным на всех функциях $\varphi \in C^2_{\text{равн}}(\mathbf{R}^d)$ (ограниченные и равномерно непрерывные вместе со своими частными производными первого и второго порядков) следующей формулой:

$$A_0 f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d} q^{jl}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} + \sum_{j=1}^{d} b^j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad q^{jl}(x) = \sum_{n=1}^{d}\sigma^j_n(x)\sigma^l_n(x).$$

Пусть $U_\varepsilon(x)$ – ε-окрестность точки x, $V_\varepsilon(x)$ – ее дополнение. Переходная функция $P(t, x, \cdot\,)$ решения $\xi_x(t)$ удовлетворяет следующим условиям: при любом $\varepsilon > 0$ равномерно по x при $t \to 0$ выполнено

$$P(t, x, V_\varepsilon(x)) = o(t),$$

$$\int\limits_{U_\varepsilon(x)} (y_j - x_j) P(t, x, dy) = b^j(x)\,t + o(t),$$

$$\int\limits_{U_\varepsilon(x)} (y_j - x_j)(y_l - x_l) P(t, x, dy) = q^{jl}(x)\,t + o(t).$$

Для того чтобы воспользоваться в дальнейшем известными фактами из теории самосопряженных операторов и теории линейных уравнений параболического типа, предположим, что выполнены следующие условия:

(ii) $b^j(x) = \sum\limits_{l=1}^{d} \frac{\partial q^{lj}(x)}{\partial x_l}, \quad j = 1, \ldots, d;$

(iii) $0 < \delta \leqslant \|\sigma(x)\xi\| \leqslant \frac{1}{\delta} < \infty, \quad x, \xi \in \mathbf{R}^d, \quad \|\xi\| = 1.$

В силу условия (ii), оператор A_0 имеет вид
$$A_0 f(x) = -\nabla^* \big(q(x)\nabla f\big)(x) \tag{3}$$
и оказывается симметричным оператором в $L_2(\mathbf{R}^d)$ с областью определения $C^2_{\text{равн}}(\mathbf{R}^d) \supset C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Из условия (iii) следует, что оператор A_0 является равномерно эллиптическим. Отсюда следует, что этот оператор является существенно самосопряженным. Его замыкание – это самосопряженный оператор в $L_2(\mathbf{R}^d)$, определяемый тем же выражением (3) на $W_2^2(\mathbf{R}^d)$. В дальнейшем мы, несколько злоупотребляя обозначениями, будем использовать тот же символ для замыкания оператора A_0.

Добавим к диффузионному процессу $\xi_x(t)$ механизм ветвления. Будем предполагать, что время жизни τ частицы имеет стандартное экспоненциальное распределение и не зависит от траектории частицы. В момент времени τ частица погибает, и в этот момент в точке, где произошла гибель частицы, появляется случайное число новых частиц, каждая из которых начинает эволюционировать по тем же правилам, независимо от остальных частиц. Через $p_k(y)$, $y \in \mathbf{R}^d$, $k = 0, 1, \ldots,$ обозначим вероятность того, что число непосредственных потомков частицы равно k при условии, что гибель частицы произошла в точке $y \in \mathbf{R}^d$.

Обозначим через $X_x(t)$, $t \geqslant 0$, ветвящийся диффузионный процесс, задаваемый оператором A_0 и набором вероятностей $\{p_j(y)\}_{j=0}^\infty$, $y \in \mathbf{R}^d$, с начальным условием $X_x(0) = \delta_x$. Процесс $X_x(t)$ мы далее будем рассматривать как марковский процесс, принимающий значения в пространстве $\mathcal{M}$ всех конечных целочисленных мер в $\mathbf{R}^d$. Всякий элемент $M \in \mathcal{M}$ имеет вид
$$M = \sum_{j=1}^K \delta_{y_j},$$
где $K \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $y_j \in \mathbf{R}^d$. Отметим, что в этом представлении точки y_j не обязательно различны.

Для каждых $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^d$ и $\varphi \in C(\mathbf{R}^d)$ определим интеграл $I_{x,t}(\varphi)$ по мере $X_x(t)$
$$I_{x,t}(\varphi) = \int \varphi \, dX_x(t), \quad I_{x,0}(\varphi) = \varphi(x).$$
Определим оператор P^t, полагая
$$P^t \varphi(x) = \mathbf{E}\, I_{x,t}(\varphi).$$

Отметим, что в последней формуле равенство может быть распространено по непрерывности на любые $\varphi \in L_1(\mathbf{R}^d)$.

Через $\mathcal{F}^t$ обозначим σ–алгебру, порожденную процессом $X_x(t)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Семейство операторов P^t является полугруппой, то есть для всех $s, t \geqslant 0$ справедливо соотношение*

$$P^{t+s} = P^t P^s.$$

Доказательство. Так как процесс $X_x(t)$ является марковским, имеем

$$\mathbf{E}(I_{x,t+s}(\varphi)|\mathcal{F}^t) = \mathbf{E}(I_{x,t+s}(\varphi)|X_x(t)).$$

Заметим, что если $X_x(t) = M = \sum\limits_{j=1}^{K} \delta_{y_j}$, где $K \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $y_j \in \mathbf{R}^d$, то

$$\mathbf{E}(I_{x,t+s}(\varphi)|X_x(t) = M) = \sum_{j=1}^{K} P^s \varphi(y_j).$$

Из последнего равенства следует, что

$$\mathbf{E}(I_{x,t+s}(\varphi)|\mathcal{F}^t) = I_{x,t}(P^s \varphi).$$

Далее, вычисляя математическое ожидание от левой и правой частей последнего равенства, получаем утверждение леммы. $\square$

Напомним, что $\beta(y)$ обозначает интенсивность ветвления в точке $y \in \mathbf{R}^d$

$$\beta(y) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j(y) - 1.$$

Предположим, что

(iv) существует константа $L > 0$, такая что при всех $y \in \mathbf{R}^d$ выполнено

$$|\beta(y)| \leqslant L.$$

Через B обозначим оператор умножения на функцию $\beta(y)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$:

$$(Bf)(y) = \beta(y) f(y).$$

Лемма 2.2. *Генератор полугруппы P^t есть оператор*

$$A = A_0 + B, \tag{4}$$

то есть для всех $f \in W_2^2(\mathbf{R}^d)$ справедливо

$$\lim_{t\to 0} \frac{P^t f(x) - f(x)}{t} = A_0 f(x) + Bf(x) = -\nabla^*\big(q(x)\nabla f\big)(x) + \beta(x) f(x).$$

Доказательство. Первоначальная частица за промежуток времени $[0,t]$ может иметь следующую судьбу: с вероятностью e^{-t} частица не испытает превращения ни в какой момент времени $0 < u < t$ и окажется в точке $\xi_x(t)$, с плотностью вероятности e^{-u} в момент времени $0 < u < t$ в точке $\xi_x(u)$ она может испытать превращение. Воспользовавшись формулой полной вероятности, при $t \to 0$ имеем

$$\begin{aligned}
P^t f(x) &= e^{-t} \int\limits_{U_\varepsilon(x)} f(y) P(t,x,dy) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^t e^{-u} \int\limits_{U_\varepsilon(x)} \int\limits_{U_\varepsilon(y)} p_k(y) k f(z)\, P(t-u,y,dz)\, P(u,x,dy)\, du + o(t) \\
&= (1-t) \int\limits_{U_\varepsilon(x)} \Big(f(x) + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}(y_j - x_j) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{d} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_l}(y_j - x_j)(y_l - x_l)\Big) P(t,x,dy) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} t p_k(x) k f(x) + o(t) \\
&= f(x) + t \sum_{j=1}^{d} b^j(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} t \sum_{j,l=1}^{d} q^{jl}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_l} - t f(x) \\
&+ t \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x) j f(x) + o(t) \\
&= f(x) + tA_0 f(x) + tBf(x) + o(t) = f(x) + tAf(x) + o(t).
\end{aligned}$$

Из последней формулы следует утверждение леммы. □

Из этой леммы вытекает, что функция $u(x,t) = \mathbf{E}\, I_{x,t}(\varphi)$ удовлетворяет равенству

$$u(x,t) = e^{tA}\varphi(x).$$

В частности, это означает, что $u(x,t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Au(x,t); \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{5}$$

Разрешимость задач такого вида в различных классах функций подробно исследована в [16]. В частности, условий (i)–(iv) достаточно, чтобы для любого $T > 0$ задача (5) имела единственное решение из класса $V_2^{1,0}(\mathbf{R}^d \times [0,T])$ (см. [16, с. 15] для точного определения $V_2^{1,0}(\mathbf{R}^d \times [0,T])$). Можно также показать, что именно $u(x,t) = e^{tA}\varphi(x)$ является решением из этого класса. Более того, при дополнительном предположении, что функция $\beta(x)$ принадлежит классу Гёльдера, можно доказать непрерывность решения $u(x,t)$.

Пусть $g_1, \dots, g_d \in \mathbf{R}^d$ – некоторый базис в $\mathbf{R}^d$. Через Γ обозначим решетку, порожденную данным базисом,

$$\Gamma = \Big\{ g \in \mathbf{R}^d : g = \sum_{j=1}^{d} n_j g_j,\ n_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \dots, d \Big\}.$$

Отметим, что различные базисы могут порождать одну и ту же решетку.

Далее будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(v) для любых $g \in \Gamma$ и $x \in \mathbf{R}^d$ выполнено

$$\beta(x) = \beta(x+g), \qquad q(x) = q(x+g).$$

При выполнении условия (v) операторы A_0 и B оказываются периодическими относительно решетки Γ. В этом случае существует удобная техника, позволяющая свести исследование оператора $A = A_0 + B$ к исследованию семейства операторов с дискретным спектром. Эта техника и результаты, полученные с ее помощью, описываются в следующей главе.

§3. Разложение в прямой интеграл

В этой главе мы приводим известные результаты о разложении периодических самосопряженных операторов вида (4) в прямой интеграл операторов в слоях. Подробно и в большей общности эта техника изложена, например, в работе [10]. Представление оператора в виде прямого интеграла будет использовано в главе 4 для изучения асимптотического поведения решения задачи Коши (5).

Нам потребуется ввести ряд определений и обозначений. Назовем элементарной ячейкой решетки Γ множество

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^d : x = \sum_{j=1}^{d} x_j g_j,\ -1/2 \leqslant x_j < 1/2,\ j = 1, \dots, d\}.$$

Отметим, что для каждого $x \in \mathbf{R}^d$ существует единственное представление

$$x = \widetilde{x} + g, \quad \widetilde{x} \in \Omega,\ g \in \Gamma.$$

Через $\{\widetilde{g}_j\}_{j=1}^d$ обозначим двойственный базис к базису $\{g_j\}_{j=1}^d$, то есть

$$\langle \widetilde{g}_l, g_j \rangle = 2\pi\delta_{lj}.$$

Такой базис порождает двойственную к Γ решетку $\widetilde{\Gamma}$, определенную

$$\widetilde{\Gamma} = \{g \in \mathbf{R}^d\ :\ g = \sum_{j=1}^{d} n_j \widetilde{g}_j,\ \ n_j \in \mathbf{Z},\ \ j = 1, \dots, d\}.$$

В качестве элементарной ячейки двойственной решетки $\widetilde{\Gamma}$ выберем множество

$$\widetilde{\Omega} = \Big\{k \in \mathbf{R}^d : k = \sum_{j=1}^{d} k_j \widetilde{g}_j,\ -1/2 \leqslant k_j < 1/2,\ j = 1, \dots, d\Big\}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямой интеграл пространств $L_2(\Omega)$

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega)\, dk,$$

то есть пространство таких функций $f(x,k)$ двух переменных $x \in \Omega$, $k \in \widetilde{\Omega}$, что $f(\,\cdot\,,k) \in L_2(\Omega)$ при почти всех k, с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \|f(\,\cdot\,,k)\|_{L_2(\Omega)}^2\, dk.$$

Введем преобразование Гельфанда U

$$Uf(x,k) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{g \in \Gamma} f(x+g)\, e^{-i\langle x+g, k\rangle},$$

где через $|\widetilde{\Omega}|$ обозначен объем элементарной ячейки $\widetilde{\Omega}$ двойственной решетки $\widetilde{\Gamma}$. Изначально такое преобразование определяется на классе Шварца, но по непрерывности может быть продолжено до унитарного оператора из $L_2(\mathbf{R}^d)$ в $\mathcal{H}$. Обратное преобразование задается формулой

$$U^{-1}f(\widetilde{x}+g) = |\widetilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle g,k\rangle} f(\widetilde{x},k)\,dk. \tag{6}$$

С помощью преобразования Гельфанда можно провести частичную диагонализацию оператора A. Это сводит вопросы исследования спектра оператора A к вопросам исследования спектров семейства вспомогательных операторов, определяемых ниже.

Обозначим через $\widetilde{W_2^2}(\Omega)$ подпространство функций из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$, периодическое продолжение которого лежит в $W^2_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$. Пусть $A_0(k)$ – самосопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор с областью определения $\widetilde{W_2^2}(\Omega)$, задаваемый на ней равенством

$$A_0(k)f(x,k) = -(\nabla + ik)^*\big(q(x)(\nabla + ik)f\big)(x,k).$$

Пусть $\widetilde{B} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – оператор умножения на функцию $\beta(x)$. Для любого $k \in \widetilde{\Omega}$ обозначим

$$A(k) = A_0(k) + \widetilde{B}.$$

Тогда оператор $A(k)$, определенный на множестве $\widetilde{W_2^2}(\Omega)$, является самосопряженным в $L_2(\Omega)$ при всех $k \in \widetilde{\Omega}$. Известно (см., например, [10, глава 2, §2.3]), что оператор A эквивалентен прямому интегралу операторов $A(k)$

$$UAU^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus A(k)\,dk, \tag{7}$$

то есть для любой функции $f(x) \in W_2^2(\mathbf{R}^d)$ и почти всех $k \in \widetilde{\Omega}$ выполнено равенство

$$UAf(x,k) = A(k)Uf(x,k). \tag{8}$$

При каждом k спектр оператора $A(k)$ состоит из собственных значений конечной кратности, которые накапливаются только к $-\infty$. Семейство операторов $A(k)$ является аналитическим по $k \in \widetilde{\Omega}$. Тогда, согласно общей аналитической теории (см. [15]), существуют вещественно-аналитические функции, являющиеся ветвями собственных значений операторов $A(k)$. Обозначим собственные значения оператора $A(k)$, занумерованные в порядке невозрастания с учетом кратности, через

$$\lambda_1(k) \geqslant \lambda_2(k) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(k) \geqslant \ldots.$$

При такой нумерации функции $\lambda_j(k)$ уже не обязаны быть вещественно-аналитическими функциями, но они будут по крайней мере непрерывными. Тогда из равенства (7) следует (см. [8, теорема XIII.85]), что спектр оператора A совпадает с объединением образов функций $\lambda_j(k)$, $j = 1, 2, \dots,\ k \in \widetilde{\Omega}$.

Также из общей аналитической теории следует, что существуют вещественно-аналитические $L_2(\Omega)$-значные функции, которые являются ветвями собственных функций операторов $A(k)$. Обозначим через $\psi_j(x, k)$, $j = 1, 2, \dots$, собственную функцию оператора $A(k)$, отвечающую собственному значению $\lambda_j(k)$, $j = 1, 2, \dots$. Отметим, что при такой перенумерации собственных значений функции $\psi_j(x, k)$, $j = 1, 2, \dots$, могут оказаться не вещественно-аналитическими.

Правый край спектра оператора A подробно изучен. Нам потребуется следующая лемма, доказанная в [1].

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (ii)–(v)*. Тогда:*

- *максимум функции $\lambda_1(k)$ достигается только при $k = 0$;*
- *выполнено неравенство $\max\limits_{k\in\widetilde{\Omega}} \lambda_2(k) < \lambda_1(0)$;*
- *правый край спектра является регулярным, то есть существуют $C > 0$ и $r > 0$, такие что при $\|k\| < r$ выполнено*
$$\lambda_1(0) - \lambda_1(k) \geqslant C\|k\|^2;$$
- *собственная функция $\psi_1(x, k)$ может быть выбрана таким образом, что*
$$\psi_1(x, 0) > 0, \quad x \in \Omega.$$

Из леммы 3.1, в частности, следует, что $\lambda_1(k)$ и $\psi_1(x, k)$ являются вещественно-аналитическими функциями при малых $\|k\|$. Аналогичные результаты для оператора Лапласа были получены в работе [5].

Лемма 3.2. *Пусть функция $h \in L_2(\mathbf{R}^d)$ имеет компактный носитель. Тогда существует такое $r > 0$, что $\langle Uh(\,\cdot\,, k), \psi_1(\,\cdot\,, k)\rangle_{L_2(\Omega)}$ является аналитической функцией при $\|k\| \leqslant r$.*

Доказательство. Так как функция h имеет компактный носитель, то сумма в выражении ее преобразования Гельфанда имеет только конечное число ненулевых слагаемых, и справедливо
$$\langle Uh(\,\cdot\,, k), \psi_1(\,\cdot\,, k)\rangle_{L_2(\widetilde{\Omega})} = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,k\rangle} \langle h(\,\cdot\,), \psi_1(\,\cdot\,, k)\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Так как $\psi_1(\,\cdot\,,k)$ является аналитической $L_2(\Omega)$-значной функцией k при $\|k\| \leqslant r$, то каждое слагаемое в сумме является аналитической функцией, а значит и $\langle Uh(\,\cdot\,,k), \psi_1(\,\cdot\,,k)\rangle_{L_2(\widetilde{\Omega})}$ тоже является аналитической функцией, так как сумма содержит только конечное число слагаемых. □

Результаты следующих двух лемм для оператора $A = A_0$ (то есть в случае $B = 0$) были доказаны в работе [11]. Так как нас интересует случай $A = A_0 + B$, а также в дальнейшем нам понадобятся некоторые детали доказательств, мы приводим их в полном объеме.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия* (ii)–(v). *Тогда для каждой собственной функции* $\psi_j(x,k)$, $j = 1,2,\dots,$ *оператора* $A(k)$ *выполнено*

$$|\psi_j(x,k)| \leqslant C_j, \quad x \in \Omega, k \in \widetilde{\Omega}.$$

Доказательство. Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ операторы, которые получаются из операторов $A_0(k)$, если положить $q(x) = I$:

$$-\Delta(k) = -(\nabla + ik)^*(\nabla + ik).$$

Пусть $\widetilde{g} \in \widetilde{\Gamma}$. Собственными числами и собственными функциями операторов $-\Delta(k)$ оказываются $-\|\widetilde{g} + k\|^2$ и $e^{i\langle \widetilde{g},x\rangle}$ соответственно. Из условия (iii) следует неравенство

$$A_0(k) \leqslant -\delta^2\Delta(k).$$

Обозначим через $M : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ оператор умножения на постоянную, равную максимуму модуля функции $\beta(x)$:

$$Mf(x) = f(x) \max_{y\in\Omega} \beta(y).$$

Тогда оператор $\widetilde{B} - M$ неположителен и выполнено неравенство

$$A_0(k) + \widetilde{B} - M = A(k) - M \leqslant -\delta^2\Delta(k) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что для спектральных проекторов справедливо

$$E_{A(k)-M}[\lambda, 0] \leqslant E_{-\Delta(k)}[\delta^{-2}\lambda, 0], \quad \lambda < 0. \tag{9}$$

Спектральный проектор оператора $E_{A(k)-M}[\lambda, 0]$ – это интегральный оператор с ядром

$$\sum_{j\colon \lambda_j(k) > \lambda + \max\beta(\,\cdot\,)} \psi_j(x,k)\,\overline{\psi_j}(y,k).$$

Тогда из (9) следует, что на диагонали $y = x$ выполнено поточечное неравенство

$$\sum_{j\colon \lambda_j(k)>\lambda+\max\beta(\,\cdot\,)} |\psi_j(x,k)|^2 \leqslant \sum_{\widetilde{g}\in\widetilde{\Gamma}\colon -\delta^2\|\widetilde{g}+k\|^2>\lambda} 1. \tag{10}$$

Отсюда следует, что каждая собственная функция оператора $A(k)$ равномерно ограничена. $\square$

Следствие 3.4. *Существуют такой номер $l > 0$ и $C > 0$, что для любого $j > l$ выполнено неравенство*

$$|\psi_j(x,k)| \leqslant C(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}}, \quad x\in\Omega,\ k\in\widetilde{\Omega}.$$

Доказательство. Выберем некоторый номер j и найдем такое число λ, что выполнены неравенства

$$\lambda_j(k) > \lambda + \max_{x\in\Omega}\beta(x), \quad \lambda_j(k) < \lambda + \max_{x\in\Omega}\beta(x) + 1.$$

При таком λ воспользуемся неравенством (10) и оставим в левой части только слагаемое с номером j. Имеем

$$|\psi_j(x,k)|^2 \leqslant \sum_{\widetilde{g}\in\widetilde{\Gamma}\colon -\delta^2\|\widetilde{g}+k\|^2>\lambda} 1 \leqslant \sum_{\widetilde{g}\in\widetilde{\Gamma}\colon -\delta^2\|\widetilde{g}+k\|^2>\lambda_j(k)-\max\beta(\,\cdot\,)-1} 1.$$

Сумма справа равна числу точек решетки $\widetilde{\Gamma}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\widetilde{g}+k\|^2 < \delta^{-2}\big(\max_{x\in\Omega}\beta(x) + 1 - \lambda_j(k)\big), \tag{11}$$

то есть числу точек решетки $\widetilde{\Gamma}$ в шаре с центром в точке $-k$ и радиусом

$$\delta^{-1}\sqrt{\max\beta(\,\cdot\,) + 1 - \lambda_j(k)}.$$

Обозначим через $D_{\widetilde{\Omega}}$ диаметр области $\widetilde{\Omega}$. Заметим, что можно найти параллелепипед, который удовлетворяет следующим условиям:

- центр параллелепипеда находится в точке 0;
- ребра параллелепипеда коллинеарны базисным векторам решетки $\widetilde{\Gamma}$;
- параллелепипед содержит в себе все шары радиусом R с центрами в точках $-k$ при всех $k\in\widetilde{\Omega}$;
- существует постоянная $\alpha > 0$, зависящая только от решетки $\widetilde{\Gamma}$, такая что все стороны этого параллелепипеда не превосходят $\alpha(R + D_{\widetilde{\Omega}})$.

Оценивая число точек решетки $\widetilde{\Gamma}$, удовлетворяющих (11), через число точек в этом параллелепипеде, получаем

$$|\psi_j(x,k)|^2 \leqslant \alpha^d\big(\delta^{-1}\sqrt{\max\beta(\,\cdot\,)+1-\lambda_j(k)}+D_{\widetilde{\Omega}}\big)^d.$$

Так как единственной точкой накопления собственных значений оператора $A(k)$ является $-\infty$, то существуют такой номер $l>0$ и константа $C>0$, что для любых $j>l$ выполнено

$$|\psi_j(x,k)| \leqslant C(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}}. \qquad \square$$

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия* (ii)–(v) *и пусть* $D_{\widetilde{\Omega}}$ *– диаметр области* $\widetilde{\Omega}$. *Существуют такой номер* $l>0$ *и константа* $C>0$, *что для собственных чисел* $\lambda_j(k)$ *оператора* $A(k)$ *при* $j>l$ *выполнено неравенство*

$$\lambda_j(k) \leqslant -Cj^{\frac{2}{d}}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mu_j(k)$, $j=1,2,\dots$, собственные значения оператора $-\delta^2\Delta(k)$, занумерованные в порядке невозрастания. Из неравенства $A_0(k) \leqslant -\delta^2\Delta(k)$ следует неравенство на собственные значения

$$\lambda_j(k) \leqslant \mu_j(k)$$

для любого $j=1,2,\dots$. Известно, что все $\mu_j(k)$ имеют вид $-\|\widetilde{g}+k\|^2$ при некотором $\widetilde{g}\in\widetilde{\Gamma}$, при этом каждому $\widetilde{g}\in\widetilde{\Gamma}$ отвечает ровно одна собственная функция. Тогда, если номер j больше числа точек решетки $\widetilde{\Gamma}$ в шаре с центром в точке $-k$ и радиусом равным R, то при всех $\|\widetilde{g}\|<R$ выполнено

$$\mu_j(k) \leqslant -\|\widetilde{g}+k\|^2. \tag{12}$$

Как и в доказательстве леммы 3.4, оценим число точек в шаре выше через число точек в параллелепипеде с центром в нуле и сторонами не больше $\alpha(R+D_{\widetilde{\Omega}})$. Отсюда следует, что неравенство (12) будет выполнено при $j>\alpha^d(R+D_{\widetilde{\Omega}})^d$. Если R достаточно велико, то в шаре радиуса R найдется вектор решетки $\widetilde{\Gamma}$, длиной по крайней мере $\frac{R}{2}$. Так как $k\in\widetilde{\Omega}$, то из неравенства (12) при достаточно больших j следует

$$\lambda_j(k) \leqslant \mu_j(k) \leqslant -\frac{j^{\frac{2}{d}}}{16\alpha^2}. \tag{13}$$

Лемма доказана. $\square$

§4. Асимптотическое поведение $u(x,t)$

Напомним, что через $u(x,t)$ обозначено решение задачи Коши (5), для которого выполнено

$$u(x,t) = e^{At}\varphi(x).$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (i)–(v), *и функция* φ *имеет компактный носитель. Тогда для любой функции* $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$, *имеющей компактный носитель, при* $t \to \infty$ *выполнено*

$$\langle u(\,\cdot\,,t), f(\,\cdot\,)\rangle_{L_2(\mathbf{R}^d)} = \frac{e^{\lambda_1(0)t}}{t^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(f)}{t^n}.$$

Все коэффициенты $a_n(f)$ *могут быть вычислены явно, в частности,*

$$a_0(f) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \big\langle \psi_1(\,\cdot\,,0), Uf(\,\cdot\,,0)\big\rangle_{L_2(\Omega)} \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,0), \psi_1(\,\cdot\,,0)\big\rangle_{L_2(\Omega)}}{\sqrt{|\det H_{\lambda_1}(0)|}}, \qquad (14)$$

где $H_{\lambda_1}(0)$ *– матрица Гессе функции* $\lambda_1(k)$ *при* $k=0$.

Доказательство. Из (8) и унитарности преобразования Гельфанда имеем

$$\langle u(\,\cdot\,,t), f(\,\cdot\,)\rangle_{L_2(\mathbf{R}^d)} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \langle e^{A(k)t} U\varphi(\,\cdot\,,k), Uf(\,\cdot\,,k)\rangle_{L_2(\Omega)}\, dk.$$

Разложим функцию $U\varphi(x,k)$ по собственным функциям $\psi_j(x,k)$, $j = 1,2,\ldots$, оператора $A(k)$ при каждом $k \in \widetilde{\Omega}$:

$$U\varphi(x,k) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x,k) \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k), \psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда действие $e^{A(k)t}$ на функцию $U\varphi(x,k)$ может быть записано в виде

$$e^{A(k)t} U\varphi(x,k) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t} \psi_j(x,k) \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k), \psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}. \qquad (15)$$

Для скалярного произведения $\langle u(\,\cdot\,,t), f(\,\cdot\,)\rangle_{L_2(\mathbf{R}^d)}$ имеем

$$\langle u(\,\cdot\,,t), f(\,\cdot\,)\rangle_{L_2(\mathbf{R}^d)} \\ = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t} \langle \psi_j(\,\cdot\,,k), Uf(\,\cdot\,,k)\rangle_{L_2(\Omega)} \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k), \psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\, dk. \tag{16}$$

Так как функции φ и f имеют компактные носители, то нормы $\|Uf(\,\cdot\,,k)\|$ и $\|U\varphi(\,\cdot\,,k)\|$ оказываются ограниченными равномерно по k. Тогда из лемм 3.1 и 3.5 следует, что существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$, что при всех $t > \tau$ выполнено неравенство

$$\Big| \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \sum_{j=2}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t} \langle \psi_j(\,\cdot\,,k), Uf(\,\cdot\,,k)\rangle_{L_2(\Omega)} \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k), \psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\, dk \Big| \\ \leqslant Ce^{(\lambda_1(0)-\varepsilon)t}.$$

Рассмотрим теперь интеграл от слагаемого при $j = 1$ в (16). Из леммы 3.2 и компактности носителей функций φ и f следует, что при достаточно малых $\|k\|$ обе функции $\langle \psi_1(\,\cdot\,,k), Uf(\,\cdot\,,k)\rangle_{L_2(\Omega)}$ и $\big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k), \psi_1(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}$ являются аналитическими функциями переменной k. Из леммы 3.1 следует, что в некоторой окрестности точки $k = 0$ функция $\lambda_1(k)$ является аналитической, достигает своего единственного глобального максимума в нуле и имеет невырожденную матрицу Гессе. Тогда, применяя метод Лапласа к интегралу от слагаемого при $j = 1$, получим полный асимптотический ряд (см., например, [20], теорему 4.1) при $t \to \infty$

$$\langle u(\,\cdot\,,t), f(\,\cdot\,)\rangle_{L_2(\mathbf{R}^d)} = \frac{e^{\lambda_1(0)t}}{t^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(f)}{t^n}.$$

При этом все коэффициенты могут быть вычислены явно (см., например, [20], формула (4.9)). В частности,

$$a_0(f) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \big\langle \psi_1(\,\cdot\,,0), Uf(\,\cdot\,,0)\big\rangle_{L_2(\Omega)} \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,0), \psi_1(\,\cdot\,,0)\big\rangle_{L_2(\Omega)}}{\sqrt{|\det H_{\lambda_1}(0)|}}. \qquad \square$$

Теорема 4.2. *Пусть размерность $d \leqslant 3$, выполнены условия* (i)–(v), *и функция φ имеет компактный носитель. Тогда при $t \to \infty$ выполнено* *следующее асимптотическое равенство*

$$u(x,t) = \frac{e^{\lambda_1(0)t}}{t^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)}{t^n}.$$

Все функции $u_n(x)$ *могут быть выписаны явно. В частности, для любого* $x \in \mathbf{R}^d$ *выполнено*

$$u_0(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,0), \psi_1(\,\cdot\,,0)\big\rangle_{L_2(\Omega)}}{|\widetilde{\Omega}|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\det H_{\lambda_1}(0)|}} \psi_1(\widetilde{x},0), \tag{17}$$

где $x = \widetilde{x} + g$, $\widetilde{x} \in \Omega, g \in \Gamma$, $H_{\lambda_1}(0)$ *– матрица Гессе функции* $\lambda_1(k)$ *при* $k = 0$.

Доказательство. Пусть $x = \widetilde{x} + g$, где $\widetilde{x} \in \Omega$, $g \in \Gamma$. Используя (6) и (8), получаем

$$\begin{aligned} u(x,t) = e^{At}\varphi(x) = U^{-1}Ue^{At}\varphi(x) = U^{-1}e^{A(k)t}U\varphi(\widetilde{x},k) \\ = |\widetilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle g,k\rangle} e^{A(k)t} U\varphi(\widetilde{x},k)\,dk. \end{aligned}$$

Далее, используя равенство (15), получаем

$$u(x,t) = |\widetilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle g,k\rangle} \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t} \psi_j(\widetilde{x},k) \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k), \psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\,dk. \tag{18}$$

Покажем, что при больших временах интегралы от слагаемых при $j \neq 1$ малы по сравнению с интегралом от слагаемого при $j = 1$. Выберем $m > 0$ так, чтобы для любого $j > m$ выполнялись следствие 3.4 и лемма 3.5. Из леммы 3.1 следует, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что выполнено

$$\Big| \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle g,k\rangle} \sum_{j=2}^{m} e^{\lambda_j(k)t} \psi_j(\widetilde{x},k) \big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k), \psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\,dk \Big| \leqslant C_1 e^{(\lambda_1(0)-\varepsilon)t}. \tag{19}$$

Рассмотрим сумму, начиная с номера $m+1$. Для нее, с учетом следствия 3.4, имеем

$$\Big|\sum_{j=m+1}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t}\psi_j(\widetilde{x},k)\big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k),\psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\Big| \\ \leqslant C\sum_{j=m+1}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t}(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}}\|U\varphi(\,\cdot\,,k)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отметим, что норма $\|U\varphi(\,\cdot\,,k)\|_{L_2(\Omega)}$ ограничена равномерно при всех $k\in\widetilde{\Omega}$, так как функция φ имеет компактный носитель. Учитывая монотонное невозрастание собственных чисел $\lambda_j(k)$, имеем

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t}(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}}\|U\varphi(\,\cdot\,,k)\|_{L_2(\Omega)} \\ \leqslant e^{\lambda_{m+1}(k)(t-2)}\sum_{j=m+1}^{\infty} e^{2\lambda_j(k)}(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}}.$$

Используя лемму (3.5), получаем

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} e^{2\lambda_j(k)}(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}} \leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty} e^{-Cj^{\frac{2}{d}}}e^{\lambda_j(k)}(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}}. \tag{20}$$

Из (13) следует, что при $j\to\infty$ величины $e^{\lambda_j(k)}(-\lambda_j(k))^{\frac{d}{4}}$ монотонно стремятся к нулю равномерно по $k\in\widetilde{\Omega}$. Ряд $\sum_{j=m+1}^{\infty} e^{-Cj^{\frac{2}{d}}}$ сходится. Тогда и ряд (20) сходится равномерно при всех $k\in\widetilde{\Omega}$. Таким образом, мы получаем

$$\Big|\int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle g,k\rangle}\sum_{j=m+1}^{\infty} e^{\lambda_j(k)t}\psi_j(\widetilde{x},k)\big\langle U\varphi(\,\cdot\,,k),\psi_j(\,\cdot\,,k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\,dk\Big| \\ \leqslant \widetilde{C}_2 e^{t\max\lambda_{m+1}(\,\cdot\,)} \leqslant C_2 e^{(\lambda_1(0)-\varepsilon_2)t}. \tag{21}$$

Рассмотрим наконец слагаемое при $j=1$ в (18). Семейство операторов $A(k)$ является аналитическим по $k\in\widetilde{\Omega}$. Тогда, согласно общей аналитической теории (см. [15]) и лемме 3.1, существует $r>0$, такое что при $\|k\|\leqslant r$ функция $\psi_1(\widetilde{x},k)$ является вещественно-аналитической функцией со значениями в $L_2(\Omega)$, и выполнено равенство

$$\psi_1(\widetilde{x}, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{1j}(\widetilde{x}) k^j.$$

При этом все коэффициенты $\psi_{1j}(\widetilde{x})$ являются функциями из $\widetilde{W}_2^2(\Omega)$. Тогда при $d \leqslant 3$ каждая из них является непрерывной функцией $\widetilde{x}$ в силу теорем вложения (см. [13], с. 170, теорема 7). Тогда функция $\psi_1(\widetilde{x}, k)$ оказывается непрерывной по $\widetilde{x}$ и k при $\|k\| \leqslant r$. Отсюда следует, что к интегралу по шару $\|k\| \leqslant r$ можно применить метод Лапласа. При $t \to \infty$ имеем

$$|\widetilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\|k\| \leqslant r} e^{i\langle g,k\rangle} e^{\lambda_1(k)t} \psi_1(\widetilde{x}, k) \big\langle U\varphi(\,\cdot\,, k), \psi_1(\,\cdot\,, k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\, dk = \frac{e^{\lambda_1(0)t}}{t^{\frac{d}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)}{t^n}, \tag{22}$$

где все коэффициенты могут быть выписаны явно (см., например, [20], формула (4.9)). В частности,

$$u_0(x) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \big\langle U\varphi(\,\cdot\,, 0), \psi_1(\,\cdot\,, 0)\big\rangle_{L_2(\Omega)}}{|\widetilde{\Omega}|^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\det H_{\lambda_1}(0)|}} \psi_1(\widetilde{x}, 0).$$

Для интеграла по области $\|k\| > r$ из лемм 3.1 и 3.3 следует, что существует $\varepsilon_3 > 0$, такое что

$$\Big| \int\limits_{\|k\| > r} e^{i\langle g,k\rangle} e^{\lambda_1(k)t} \psi_1(\widetilde{x}, k) \big\langle U\varphi(\,\cdot\,, k), \psi_1(\,\cdot\,, k)\big\rangle_{L_2(\Omega)}\, dk\Big| \leqslant C_3 e^{(\lambda_1(0)-\varepsilon_3)t}. \tag{23}$$

Из равенства (22) и оценок (19), (21), (23) следует результат теоремы. $\square$

Список литературы

1. M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Two-dimensional periodic Pauli operator. The effective masses at the lower edge of the spectrum.* — Oper. Theory Adv. Appl. **108** (1999), 13–31.
2. J. Engländer, S. C. Harris, A. E. Kyprianou, *Strong law of large numbers for branching diffusions.* — Ann. Inst. H. Poincaré. Probab., Statist. **46**, No. 1 (2010), 279–298.

3. P. Hebbar, L. Koralov, J. Nolen, *Asymptotic behavior of branching diffusion processes in periodic media.* — Electron. J. Probab. **25**, Paper No. 126 (2020), 40.
4. N. Ikeda, K. Kawazu, Y. Ogura, *Branching one-dimensional periodic diffusion processes.* — Stoch. Processes Appl. **19**, No. 1 (1985), 63–83.
5. W. Kirsch, B. Simon, *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators.* — J. Funct. Anal. **75**, No. 2 (1987), 396–410.
6. L. Koralov. *Branching diffusion in inhomogeneous media.* — Asymptot. Anal. **81**, No. 3–4 (2013), 357–377.
7. L. Koralov, S. Molchanov, *Structure of population inside propagating front.* — J. Math. Sci. **189** (2013), 637–658.
8. M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Phisics IV: Analysis of Operators*, Elsevier, 1978.
9. E. B. Yarovaya, *Operator equations of branching random walks.* — Methodol. Comput. Appl. Probab. **21** (2019), 1007–1021.
10. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения.* — Алгебра и анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.
11. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Асимптотика фундаментального решения для уравнения диффузии в периодической среде на больших временах и ее применение к оценкам теории усреднения.* — Соврем. матем. Фундам. направл. **63**, No. 2 (2017), 223–246.
12. А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов.* М., Наука, 1996.
13. Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, Д. К. Фаддеев, *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Л., Изд.-во ЛГУ, 1981.
14. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* М., Наука, 1977.
15. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М., Мир, 1972.
16. О. А. Ладыженская, В. А. Солloников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука, 1967.
17. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, *Ветвящиеся случайные блуждания на* $\mathbf{Z}^d$ *с периодически расположенными источниками ветвления.* — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 2 (2019), 283–307.
18. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы.* М., Наука, 1971.
19. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий.* — Успехи матем. наук. **77** (2022), 193–194.
20. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* Наука, 1977.
21. И. И. Христолюбов, Е. Б. Яровая, *Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности.* — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 3 (2019), 456–480.
22. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.* ЦПИ при мехмате Моск. ун-та, 2007.

Platonova M. V., Ryadovkin K. S. Branching diffusion processes in periodic media.

We consider branching diffusion processes in $\mathbf{R}^d$ in periodic media. The movement of particles in $\mathbf{R}^d$ is described by a stochastic differential equation with periodic coefficients. We study the asymptotic behavior of the mean number of particles in an arbitrary bounded set as $t \to \infty$. In the case when an initial configuration cosists of one particle at a point $x \in \mathbf{R}^d$ we obtain the answer for $d \leqslant 3$. In the case when an initial configuration is random and has a density with a compact support the answer is obtained for any d.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова;
СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербург, Россия

E-mail: `mariyaplat@gmail.com`

E-mail: `kryadovkin@gmail.com`

Поступило 20 октября 2024 г.