Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

М. В. Платонова

О ВЕРОЯТНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Введение

Предположим, что функция $c(x)$ – непрерывно дифференцируема, и не обращается в 0. Решение задачи Коши для уравнения в частных производных
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(0,x) = \varphi(x),$$
может быть записано в виде
$$u(t,x) = \varphi(\xi_x(t)),$$
где $\xi_x(t)$ является решением задачи Коши для дифференциального уравнения
$$d\xi_x = -c(\xi_x)\,dt, \quad \xi_x(0) = x.$$

Заменим теперь в правой части оператор дифференцирования первого порядка на оператор дифференцирования второго порядка. Предположим, что $c(x)$ и $a(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, которые имеют непрерывные ограниченные производные до второго порядка, и $c(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Тогда решение задачи Коши
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c^2(x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{1}$$
может быть представлено в виде
$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi(\xi_x(t)), \tag{2}$$
где $\xi_x(t)$ – диффузионный процесс, удовлетворяющий стохастическому уравнению
$$d\xi_x(t) = c(\xi_x(t))\,dw(t) + a(\xi_x(t))\,dt,$$
где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс (подробнее см. [7, с. 489]).

Ключевые слова: Эволюционное уравнение, задача Коши, предельная теорема.
Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 19-71-30002.

В настоящей работе мы рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования шестого порядка в правой части

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{c^6(x)}{6!}\frac{d^6}{dx^6}.$$

Предположим, что функция $c(x)$ непрерывна, и выполнено

$$0 < c_1 \leqslant c(x) \leqslant c_2 < \infty, \tag{4}$$

а начальная функция $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$.

Аналогичное (2) представление решения задачи Коши (3) написать невозможно, так как нетрудно показать, что если для решения эволюционного уравнения справедливо представление (2) с некоторым случайным процессом, то генератор $\mathcal{L}$ соответствующей полугруппы должен удовлетворять принципу максимума. То есть, если функция φ достигает в точке x_0 абсолютного максимума, то необходимо $\mathcal{L}\,\varphi(x_0) \leqslant 0$. Операторы дифференцирования порядка больше двух этому условию очевидным образом не удовлетворяют.

В литературе рассматривался вопрос обобщения представления (2) на случай оператора дифференцирования высокого порядка. Например, в работах [2] и [3] строилось представление решения задачи Коши (при $c(x) = 1$) в рамках теории псевдопроцессов. Теория псевдопроцессов является формальным обобщением теории стохастических процессов. Каждый псевдопроцесс определяется некоторым псевдодифференциальным оператором, который задает конечно-аддитивную меру на алгебре цилиндрических множеств. Эта мера не может быть продолжена на σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами (см. [8]).

Другой подход был предложен в работе [6]. Для случая, когда $c(x) = 1$, были построены две вероятностные аппроксимации решения задачи Коши. В первом случае решение аппроксимировалось средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля, а во втором случае – средними значениями функционалов от сумм независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с конечным моментом порядка 7.

В настоящей работе мы обобщим предложенный подход на случай, когда в правой части эволюционного уравнения содержится оператор

$\mathcal{L} = \frac{c^6(x)}{6!}\frac{d^6}{dx^6}$. Так как нам будет удобнее использовать симметричные случайные величины, в §2 мы приведем аналогичный работе [6] результат, в котором вероятностная аппроксимация строится на основе функционалов от сумм независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин, с доказательством. В §3 мы построим аналогичную аппроксимацию решения задачи Коши для эволюционного уравнения уже с произвольной непрерывной функцией $c(x)$, удовлетворяющей (4).

§2. Случай $c(x) = 1$

Через $L_2(\mathbf{R})$ будем обозначать пространство квадратично интегрируемых функций на $\mathbf{R}$, а через $W_2^k(\mathbf{R})$ будем обозначать пространство Соболева функций на $\mathbf{R}$, имеющих k квадратично интегрируемых обобщенных производных. Нам будет удобно на этом пространстве использовать норму, эквивалентную стандартной (см. [9, с. 190]), вида

$$\|f\|^2_{W_2^k(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k})|\widehat{f}(p)|^2\, dp,$$

где через $\widehat{f}(p)$ обозначено преобразование Фурье функции f, которое мы определяем как

$$\widehat{f}(p) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ipx} f(x)\, dx,$$

соответственно обратное преобразование Фурье будем определять как

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ipx}\widehat{f}(p)\, dp.$$

Через $C_b^\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}$, ограниченных вместе со всеми производными.

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что у случайной величины ξ_1 существуют моменты μ_k до 8 порядка и

$$\mu_6 = \int\limits_{\mathbf{R}} y^6 d\mathcal{P}(y) = 1.$$

Через $\eta_n(t)$, $t \in [0, \infty)$, обозначим независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью n. Для $k = 0, 1, \dots$ справедливо

$$\mathbf{P}(\eta_n(t) = k) = e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!}.$$

Рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0, T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/6}} \sum_{j=1}^{\eta_n(t)} \xi_j. \tag{5}$$

Несложно заметить, что перейти в (5) к пределу при $n \to \infty$ невозможно, поэтому нам потребуется некоторая регуляризация.

Для натуральных n определим функцию

$$u_n(t, x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \varkappa_n^t)(x - \zeta_n(t))\Big],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\Big(- nt\big(\frac{\mu_2 (ip)^2}{2!\, n^{1/3}} + \frac{\mu_4 (ip)^4}{4!\, n^{2/3}}\big)\Big).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in W_2^8(\mathbf{R})$. *Существует такая константа* $C > 0$*, что справедливо неравенство*

$$\|u_n(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{Ct}{n^{1/3}} \|\varphi\|_{W_2^8(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа e^{tA}. Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа $e^{t(A+B)}$ также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [5, глава IX, §2, п. 1, с. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{6}$$

Пусть $A = \frac{1}{6!}\frac{d^6}{dx^6}$, а оператор $A+B$ определяется для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ следующим образом

$$(A+B)\psi(x)$$
$$= n\int\limits_{\mathbf{R}} \Big(\psi\big(x+\frac{y}{n^{1/6}}\big) - \psi(x) - \psi^{(2)}(x)\frac{y^2}{2!\,n^{1/3}} - \psi^{(4)}(x)\frac{y^4}{4!\,n^{2/3}}\Big)d\,\mathcal{P}(y).$$

Заметим, что для любого $k \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k(\mathbf{R})\to W_2^k(\mathbf{R})} \leqslant 1. \tag{7}$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p) = \widehat{\varphi}(p)\cdot n\int\limits_{\mathbf{R}} \Big(\exp\big(\frac{ipy}{n^{1/6}}\big) - 1 - \frac{(ipy)^2}{2!\,n^{1/3}} - \frac{(ipy)^4}{4!\,n^{2/3}}\Big)d\mathcal{P}(y) - \frac{(ip)^6}{6!}\widehat{\varphi}(p)$$
$$= \widehat{\varphi}(p)\cdot n\int\limits_{\mathbf{R}} \Big(\exp\big(\frac{ipy}{n^{1/6}}\big) - 1 - \frac{(ipy)^2}{2!\,n^{1/3}} - \frac{(ipy)^4}{4!\,n^{2/3}} - \frac{(ipy)^6}{6!\,n}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Заметим, что

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|\frac{p^8}{n^{1/3}},$$

откуда следует, что

$$\|B\|_{W_2^8(\mathbf{R})\to L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{C}{n^{1/3}}. \tag{8}$$

Осталось заметить, что

$$\|e^{t(A+B)}\|_{L_2(\mathbf{R})\to L_2(\mathbf{R})} \leqslant 1, \tag{9}$$

так как для всех $z \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$\cos z - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} \leqslant 0.$$

Утверждение теоремы вытекает из (7), (8) и (9). $\square$

Следствие 2.2. *Для любой $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ и $t \geqslant 0$ выполнено*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

§3. Общий случай

Теперь построим вероятностную аппроксимацию для решения задачи Коши (3) в случае, когда $c(x)$ – непрерывная функция и выполнено условие (4). Мы частично будем использовать идеи, предложенные в работе [4] для построения вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (1) для комплекснозначной $c(x)$.

Для $M > 0$ через $PW_M(\mathbf{R}) \subset L_2(\mathbf{R})$ обозначим пространство Пэли–Винера, состоящее из функций класса $L_2(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которых принимает значение 0 вне интервала $[-M, M]$ (подробнее см. [1, с. 43]). Для $M > 0$ через P_M будем обозначать проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Пэли–Винера. Для $f \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо

$$P_M f = f * D_M,$$

где D_M – ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{\sin Mx}{\pi x}.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных ограниченных случайных величин с симметричным распределением $\mathcal{P}$. Как и ранее, предположим, что

$$\mathbf{E}\,\xi_1^6 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^6\, d\mathcal{P}(y) = 1.$$

Через $\eta_n(t)$ обозначим независимый от $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ пуассоновский процесс с параметром n. Напомним, что траектории процесса Пуассона являются кусочно-постоянными, непрерывными справа, неубывающими функциями со скачками равными единице почти наверное, а времена между скачками являются независимыми случайными величинами и имеют экспоненциальное распределение с параметром n. Через $t_1, t_2, \dots, t_k$ обозначим моменты скачков процесса $\eta_n(t)$ до момента времени t.

Определим процесс $\zeta_n^x(t)$ следующим образом:

$$\zeta_n^x(t) = \begin{cases} x, & t \in [0, t_1), \\ x + c(x)\frac{\xi_1}{n^{1/6}}, & t \in [t_1, t_2), \\ \zeta_n^x(t_2-) + c(\zeta_n^x(t_2-))\frac{\xi_2}{n^{1/6}}, & t \in [t_2, t_3), \\ \dots \\ \zeta_n^x(t_k-) + c(\zeta_n^x(t_k-))\frac{\xi_k}{n^{1/6}}, & t \in [t_k, t). \end{cases}$$

Заметим, что траектории построенного процесса $\zeta_n^x(t)$ являются кусочно-постоянными, непрерывными справа функциями со скачками

$$c(\zeta_n^x(t_k-))\frac{\xi_k}{n^{1/6}}$$

в моменты времени скачков пуассоновского процесса $\eta_n(t)$.

Заметим, что в случае, когда $c(x) = 1$, построенный процесс $\zeta_n^x(t)$ является сложным пуассоновским процессом. В этом случае

$$\zeta_n^x(t) = x + \frac{1}{n^{1/6}} \sum_{j=1}^{\eta_n(t)} \xi_j,$$

и именно этот процесс мы использовали в §2. Как и в §2, построенная последовательность процессов $\zeta_n^x(t)$ не имеет предела при $n \to \infty$, поэтому нам снова потребуется некоторая регуляризация. В отличие от предыдущего случая, когда оператор регуляризации зависел только от конечного значения процесса $\zeta_n(t)$, теперь оператор регуляризации будет зависеть от траектории процесса $\zeta_n^x(t)$. Именно, оператор регуляризации будет зависеть от моментов скачков пуассоновского процесса и размера скачков нашего процесса $\zeta_n^x(t)$.

Для удобства введем две вспомогательные последовательности $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$. Положим

$$\begin{aligned}
&y_0 = x,\\
&y_1 = x + c(x)x_1 = y_0 + c(y_0)x_1,\\
&\quad\dots\\
&y_k = y_{k-1} + c(y_{k-1})x_k.
\end{aligned} \tag{10}$$

Определим оператор регуляризации R, полагая для $\varphi \in C_b^{\infty}(\mathbf{R})$

$$R\,\varphi(y) = \varphi(y) - \sum_{j=1}^{5} \varphi^{(j)}(0)\frac{y^j}{j!}.$$

Для каждого фиксированного $M > 0$ построим последовательность функций $\{\mathcal{R}_k f_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\mathcal{R}_k f_k = [\mathcal{R}_k f_k](x, x_1, \dots, x_k)$. Данная последовательность функций зависит также от переменной M, но для упрощения обозначений мы опустим этот индекс в обозначениях. Пусть

$$f_k = f_k(x, x_1, \dots, x_k) = \varphi(y_k), \tag{11}$$

где y_k определено формулой (10). Сначала свернем функцию $\varphi(y_k)$ с ядром Дирихле D_M по переменной y_k. Далее выразим y_k как $y_{k-1} + z$

и подействуем оператором регуляризации R по переменной z, после чего подставим вместо $z = c(y_{k-1})x_k$. Полученная функция зависит от переменных y_{k-1}, x_k. На следующем шаге мы свернем полученную функцию с ядром Дирихле D_M по переменной y_{k-1}. Далее выразим y_{k-1} как $y_{k-2} + z$ и подействуем оператором регуляризации R по переменной z, после чего подставим вместо $z = c(y_{k-2})x_{k-1}$. Полученная функция зависит теперь от переменных y_{k-2}, x_{k-1}, x_k. Далее, повторяем то же самое, пока не получим функцию, зависящую от переменных y_1, x_2, $\ldots$, x_k. На последнем шаге свернем полученную функцию с ядром Дирихле D_M по переменной y_1. Далее выразим y_1 как $x + z$ и подействуем оператором регуляризации R по переменной z, после чего подставим вместо $z = c(x)x_1$. Наконец, свернем полученную функцию с ядром Дирихле D_M по переменной x.

Описанную процедуру можно записать в виде последовательного применения нескольких операторов. Именно, для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедливо

$$[\mathcal{R}_k f_k](x, x_1, \ldots, x_k) \\ = [P_M^x G^1 P_M^{y_1} \ldots P_M^{y_{k-2}} G^{k-1} P_M^{y_{k-1}} G^k P_M^{y_k} \varphi](x, x_1, \ldots, x_k),$$

где набор операторов G^l, $l = 1, \ldots, k$, определяется следующим образом: для достаточно гладкой функции (по первому аргументу) $\psi(y_l, x_{l+1}, \ldots, x_k)$ положим

$$[G^l \psi](y_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k) = R^z \psi(y_{l-1} + z, x_{l+1}, \ldots, x_k)\big|_{z=c(y_{l-1})x_l}.$$

Верхний индекс z у операторов P_M^z и R^z означает действие этого оператора по переменной z.

Лемма 3.1. *Последовательность функций $\{\mathcal{R}_k f_k\}_{k=0}^{\infty}$ при любом фиксированном x удовлетворяет условию согласования*

$$[\mathcal{R}_k f_k](x, x_1, \ldots, x_{k-1}, 0) = [\mathcal{R}_{k-1} f_{k-1}](x, x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Доказательство. Положим $x_k = 0$. Тогда $y_k = y_{k-1}$ и

$$[G^k P_M^{y_k} \varphi](y_{k-1}, 0) = [P_M^{y_k} \varphi](y_{k-1}),$$

а дальше мы снова применяем оператор P_M по переменной y_{k-1}. Но оператор P_M – это проектор, поэтому $(P_M)^2$ – это тождественный оператор. $\square$

Пусть процесс $\zeta_n^x(t)$ имеет k скачков до момента времени t. Для $\varphi \in PW_M(\mathbf{R})$ определим

$$[\mathcal{R}\,\varphi](\zeta_n^x(t)) = [\mathcal{R}_k f_k]\Big(x, \frac{\xi_1}{n^{1/6}}, \dots, \frac{\xi_k}{n^{1/6}}\Big),$$

где f_k определяется (11).

Далее определим оператор $P_{n,M}^t$, полагая для $\varphi \in PW_M(\mathbf{R})$

$$P_{n,M}^t \varphi(x) = \mathbf{E}\,[\mathcal{R}\,\varphi](\zeta_n^x(t)).$$

Лемма 3.2. *Операторы $P_{n,M}^t$ образуют однопараметрическую полугруппу*

$$P_{n,M}^{t+s} = P_{n,M}^t P_{n,M}^s$$

с генератором $P_M \mathcal{L}_n P_M$, где для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ справедливо

$$\mathcal{L}_n \psi(x) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\psi(x + c(x)\frac{y}{n^{1/6}}) - \psi(x) - \sum_{k=1}^{5} \psi^k(x) \frac{c^k(x) y^k}{k!\; n^{k/6}}\Big)\, d\mathcal{P}(y).$$

Доказательство. Пусть до момента времени t у процесса $\eta_n(t)$ произошло k скачков, и между моментами времени t и $t+s$ произошло l скачков.

Заметим, что по построению

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{R}_{k+l} f_{k+l}](x, x_1, \dots, x_{k+l}) \\
&\qquad = [P_M^x G^1 P_M^{y_1} \dots P_M^{y_{k+l-1}} G^{k+l} P_M^{y_{k+l}} \varphi](x, x_1, \dots, x_{k+l}) \\
&\qquad = [P_M^x G^1 P_M^{y_1} \dots P_M^{y_{k-1}} G^k P_M^{y_k} \psi](x, x_1, \dots, x_{k+l}),
\end{aligned}$$

где $\psi(y_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) = [\mathcal{R}_l f_l](y_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$. Отсюда следует, что

$$[\mathcal{R}_{k+l} f_{k+l}](x, x_1, \dots, x_{k+l}) = [\mathcal{R}_k [\mathcal{R}_l f_l]](x, x_1, \dots, x_{k+l}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P_{n,M}^{t+s}\varphi(x) &= \mathbf{E}\,[\mathcal{R}\,\varphi](\zeta_n^x(t+s)) = \mathbf{E}\,\Big([\mathcal{R}_{k+l} f_{k+l}]\big(x, \frac{\xi_1}{n^{1/6}}, \dots, \frac{\xi_{k+l}}{n^{1/6}}\big)\Big) \\
&= \mathbf{E}\,\Big([\mathcal{R}_k [\mathcal{R}_l f_l]]\big(x, \frac{\xi_1}{n^{1/6}}, \dots, \frac{\xi_{k+l}}{n^{1/6}}\big)\Big) = P_{n,M}^t P_{n,M}^s \varphi(x),
\end{aligned}$$

так как случайные величины $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ независимы в совокупности.

Далее вычислим генератор $P^t_{n,M}$. Пусть $\psi \in PW_M(\mathbf{R})$. При $t \to 0$ выполнено

$$P^t_{n,M}\psi(x) = e^{-nt}\psi(x) + nt\, e^{-nt}\,\mathbf{E}\Big([P^x_M G^1 P^{y_1}_M \psi]\big(x, \frac{\xi_1}{n^{1/6}}\big)\Big) + o(t)$$
$$= \psi(x) + nt\, P_M \mathcal{L}_n P_M \psi(x) + o(t),$$

где

$$\mathcal{L}_n\psi(x) = n\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\psi(x + c(x)\frac{y}{n^{1/6}}) - \psi(x) - \sum_{k=1}^{5} \psi^k(x)\frac{c^k(x)y^k}{k!\; n^{k/6}}\Big)\, d\mathcal{P}(y). \quad \square$$

Заметим, что из леммы 3.2 следует, что для $M > 0$ функция $u_{n,M}(t,x) = P^t_{n,M}\varphi(x)$, $\varphi \in PW_M(\mathbf{R})$, является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P_M \mathcal{L}_n P_M\, u, \quad u(0,x) = \varphi(x). \tag{12}$$

Рассмотрим пространство $L_2(\mathbf{R}, l)$ с весовым скалярным произведением

$$(f,g)_{L_2(\mathbf{R},l)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,l(x)\,dx,$$

где

$$l(x) = \frac{6!}{c^6(x)}.$$

Так как $0 < c_1 \leqslant c(x) \leqslant c_2 < \infty$, то существуют такие положительные числа γ_1, γ_2, что норма в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ и "весовая" норма в пространстве $L_2(\mathbf{R}, l)$ эквивалентны друг другу:

$$\gamma_1 \|u\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \|u\|_{L_2(\mathbf{R},l)} \leqslant \gamma_2 \|u\|_{L_2(\mathbf{R})}. \tag{13}$$

Лемма 3.3. *Для любого $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ справедливо*

$$\sup_{t \geqslant 0} \|e^{t\mathcal{L}}\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R}) \to W_2^{6k}(\mathbf{R})} < \infty.$$

Доказательство. Заметим, что для любой функции $\varphi \in W_2^3(\mathbf{R})$ справедливо

$$(\mathcal{L}\varphi, \varphi)_{L_2(\mathbf{R},l)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^6(x)}{6!}\,\varphi^{(6)}(x)\,\overline{\varphi(x)}\,l(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{(3)}(x)|^2\,dx$$
$$= (\varphi, \mathcal{L}\varphi)_{L_2(\mathbf{R},l)},$$

откуда следует, что оператор $\mathcal{L}$ является самосопряженным неположительным оператором в пространстве $L_2(\mathbf{R}, l)$. Тогда для $t \geqslant 0$

$$\|e^{t\mathcal{L}} f\|_{L_2(\mathbf{R},l)} \leqslant \|f\|_{L_2(\mathbf{R},l)},$$

а значит

$$\|e^{t\mathcal{L}}\|_{L_2(\mathbf{R})\to L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

где γ_1, γ_2 определены (13).

Так как операторы $\mathcal{L}$ и $e^{t\mathcal{L}}$ коммутируют, то для любой функции $f \in W_2^{6k}(\mathbf{R})$ имеем

$$\|\mathcal{L}^k e^{t\mathcal{L}} f\|_{L_2(\mathbf{R},l)} = \|e^{t\mathcal{L}} \mathcal{L}^k f\|_{L_2(\mathbf{R},l)} \leqslant \|\mathcal{L}^k f\|_{L_2(\mathbf{R},l)} \leqslant \gamma_2 \|\mathcal{L}^k f\|_{L_2(\mathbf{R})}.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{6k}(\mathbf{R})$ выполнено

$$|e^{t\mathcal{L}} f|^2 \leqslant C|f|^2,$$

где норма

$$|f|^2 = \|f\|^2_{L_2(\mathbf{R})} + \|\mathcal{L}^k f\|^2_{L_2(\mathbf{R})}$$

эквивалента стандартной норме в классе Соболева (см. [9, с. 190]). □

Лемма 3.4. *Для любого $k \geqslant 2$ справедливо*

$$\|\mathcal{L} - P_M \mathcal{L}_n P_M\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R})\to L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{C_1}{n^{1/3}} \exp\left(\frac{C_2 M}{n^{1/6}}\right).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in W_2^{6k}(\mathbf{R})$, $k \geqslant 2$. Представим

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L}_n P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\
&\qquad = \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M + P_M \mathcal{L} P_M - P_M \mathcal{L}_n P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\
&\qquad \leqslant \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} + \|(P_M \mathcal{L} P_M - P_M \mathcal{L}_n P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}.
\end{aligned}$$

Для первого слагаемого справедливо

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\
&\qquad \leqslant \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L})\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} + \|(P_M \mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\
&\qquad \leqslant \frac{\|\mathcal{L}\varphi\|_{W_2^{6k-6}(\mathbf{R})}}{M^{6k-6}} + \frac{\|\mathcal{L}(I - P_M)\varphi\|_{W_2^{6k-6}(\mathbf{R})}}{M^{6k-6}} \leqslant \frac{C\|\varphi\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R})}}{M^{6k-6}}.
\end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in W_2^{6k}(\mathbf{R})$, $k \geqslant 2$. Обозначим $\varphi_M(x) = P_M\varphi(x)$. Имеем

$$\mathcal{L}_n P_M \varphi(x) = n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi_M\big(x + c(x)\frac{y}{n^{1/6}}\big) - \sum_{k=0}^{5} \varphi_M^{(k)}(x)\frac{c^k(x)y^k}{k!\; n^{k/6}}\Big)\, d\mathcal{P}(y)$$

$$= n\sum_{k=6}^{\infty} \varphi_M^{(k)}(x)\frac{c^k(x)}{k!\; n^{k/6}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^k d\mathcal{P}(y).$$

Из симметричности распределения $\mathcal{P}$ и условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^6\, d\mathcal{P}(y) = 1$ следует, что

$$\|(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} = \Big\| n\sum_{k=8}^{\infty} \varphi_M^{(k)}(x)\frac{c^k(x)}{k!\; n^{k/6}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^k\, d\mathcal{P}(y)\Big\|_{L_2(\mathbf{R})}$$

$$\leqslant \frac{C_1}{n^{2/6}}\|\varphi\|_{W_2^8(\mathbf{R})} \exp\Big(\frac{C_2M}{n^{1/6}}\Big).$$

Осталось заметить, что если $\varphi \in W_2^{6k}(\mathbf{R})$, $k \geqslant 2$, то

$$\|\varphi\|_{W_2^8(\mathbf{R})} \leqslant \|\varphi\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R})},$$

откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 3.5. *Для любого* $t \geqslant 0$ *справедливо*

$$\|e^{tP_M\mathcal{L}_nP_M}\|_{L_2(\mathbf{R})\to L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1} e^{t\left(\frac{M^8C_1}{n^{1/3}}\exp\left(\frac{C_2M}{n^{1/6}}\right)\right)}.$$

Доказательство. Представим

$$e^{tP_M\mathcal{L}_nP_M} = e^{t(P_M\mathcal{L}P_M + P_M\mathcal{L}_nP_M - P_M\mathcal{L}P_M)}.$$

Оператор $P_M\mathcal{L}P_M$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}, l)$ является неположительным самосопряженным оператором, и для $t \geqslant 0$ справедливо

$$\|e^{tP_M\mathcal{L}P_M}\|_{L_2(\mathbf{R},l)\to L_2(\mathbf{R},l)} \leqslant 1.$$

Оператор $P_M(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M$ является ограниченным оператором в пространстве $L_2(\mathbf{R}, l)$, и для $\varphi \in L_2(\mathbf{R}, l)$ справедливо

$$\|P_M(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M\varphi\|_{L_2(\mathbf{R},l)} \leqslant \|\varphi_M\|_{L_2(\mathbf{R},l)} \frac{C_1M^8}{n^{2/6}} \exp\Big(\frac{C_2M}{n^{1/6}}\Big).$$

Из теоремы 2.1 ([5, глава IX, §2, п. 1, с. 614]) следует, что оператор $P_M\mathcal{L}P_M + P_M(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M$ порождает квазиограниченную полугруппу и для любого $t \geqslant 0$ справедливо

$$\|e^{tP_M\mathcal{L}_nP_M}\|_{L_2(\mathbf{R},l)\to L_2(\mathbf{R},l)} \leqslant e^{t\left(\frac{M^8C_1}{n^{1/3}}\exp\left(\frac{C_2M}{n^{1/6}}\right)\right)}. \qquad \square$$

Через $u(t,x)$ обозначим решение задачи Коши (3), а через $u_{n,M}(t,x)$ – решение задачи Коши (12).

Теорема 3.6. *Пусть* $M = M(n) = n^{1/24}$ *и* $\varphi \in W_2^{6k}(\mathbf{R})$, $k \geqslant 2$. *Тогда*

$$\|u_{n,M}(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Big(n^{-k/4} + C_3tn^{-1/3}e^{t\,C_4}\Big)\|\varphi\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}&\|u_{n,M}(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbf{R})}\\ &\qquad\leqslant \|u_{n,M}(t,\cdot\,) - u_M(t,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbf{R})} + \|u_M(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbf{R})},\end{aligned}$$

где $u_M(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad u(0,x) = \varphi_M(x).$$

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\|u_M(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{\|\varphi\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R})}}{M^{6k}}.$$

Для оценки первого слагаемого воспользуемся формулой теории возмущений (6). В нашем случае $A + B = P_M\mathcal{L}_nP_M$ и $A = \mathcal{L}$. Тогда, используя леммы 3.3, 3.4 и 3.5, имеем

$$\|u_{n,M}(t,\cdot) - u_M(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{C\gamma_2t}{\gamma_1n^{1/3}}e^{t\left(\frac{M^8C_1}{n^{1/3}}\exp\left(\frac{C_2M}{n^{1/6}}\right)\right)}e^{\frac{C_2M}{n^{1/6}}}\|\varphi_M\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R})}.$$

Тогда

$$\|u_{n,M}(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\Big(n^{-k/4} + C_3tn^{-1/3}e^{t\,C_4}\Big)\|\varphi\|_{W_2^{6k}(\mathbf{R})}. \quad \square$$

Следствие 3.7. *Пусть* $M = M(n) = n^{1/24}$ *и* $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$. *Тогда*

$$\|u_{n,M}(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbf{R})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Список литературы

1. L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
2. K. Hochberg, *A signed measure on path space related to Wiener measure.* — Ann. Probab. **6**, No. 3 (1978), 433–458.
3. В. Ю. Крылов, *О некоторых свойствах распределения, отвечающего уравнению $\partial u/\partial t = (-1)^{q+1}\partial^{2q}u/\partial x^{2q}$.* — Докл. АН СССР **132**, No. 6 (1960), 1254–1257.
4. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Аналитические диффузионные процессы: определение, свойства, предельные теоремы.* — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 2 (2016), 300–326.
5. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.
6. М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 92–106.
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М., Наука, 1977.
8. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах*, М., Наука, 1983.
9. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры*, Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.

Platonova M. V. A probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for a certain class of evolution equations.

We construct a probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for an evolution equation containing a sixth-order differential operator with a variable coefficient on the right side by mathematical expectations of functionals of a random process.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Санкт-Петербург, Россия;
Санкт-Петербургский
государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@gmail.com

Поступило 18 октября 2024 г.