Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

Т. Д. Мосеева

СРЕДНИЙ ОБЪЕМ СМЕШАННЫХ БЕТА-ПОЛИТОПОВ

§1. Введение

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ независимые случайные векторы $X_1, \ldots, X_n$. Пусть $2 \leqslant n \leqslant d+1$ и для некоторого $k = 0, \ldots, n$ векторы $X_1, \ldots, X_k$ равномерно распределены внутри единичного шара, а $X_{k+1}, \ldots, X_n$ – на единичной сфере. Выпуклая оболочка данных точек почти наверное является $(n-1)$-мерным симплексом. Классический результат Майлза [5] дает явное выражение для математического ожидания объема описанного выше симплекса:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\mathrm{conv}(X_1, \ldots, X_n)\right) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{d+1}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n(d-1)+k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}nd+k\right)}$$
$$\times \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})d}{\Gamma(\frac{1}{2}(d+1))}\right)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(d-n+j+2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(d-n+j+1)\right)}.$$

Более того, Майлз вычислил все целые положительные моменты объема этого симплекса [5, теорема 2], см. также [4] для случая $k = n$. Рубен и Майлз [6] обобщили данный результат на случай бета-распределений в $\mathbb{R}^d$, плотности которых задаются следующим образом:

$$f_{d,\beta}(x) = c_{d,\beta} \cdot \left(1 - |x|^2\right)^{\beta}, \quad |x| \leqslant 1,$$

где $\beta > -1$, а нормировочная константа $c_{d,\beta}$ задается равенством

$$c_{d,\beta} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\beta+1)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\beta+1)}.$$

Ключевые слова: смешанные бета-политопы, средний объем, бета-распределение, выпуклая оболочка, геометрическая вероятность, стохастическая геометрия, случайные политопы, функционал Уикера, формула Бляшке–Петканчина, формула Куботы.

Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075-15-2022-287 от 06.04.2022) и при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Равномерное распределение внутри единичного шара соответствует случаю $\beta = 0$, а на единичной сфере равномерное распределение можно получить как слабый предел при $\beta \to -1$. В предположении, что $X_i, i = 1, \dots, n$, распределены независимо в соответствии с f_{d,β_i}, Рубен и Майлз показали, что для $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_{n-1}\,(\mathrm{conv}(X_1, \dots, X_n)))^k \\ &\qquad = ((n-1)!)^{-k} \frac{\Gamma\left(\frac{n(n-1+k)}{2} + \sum_{i=1}^n \beta_i + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{(n-1)(n+k)}{2} + \sum_{i=1}^n \beta_i + 1\right)} \\ &\qquad\qquad \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{j+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \beta_i + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+k}{2} + \beta_i + 1\right)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Кроме того, аналогичный результат был получен для бета'-политопов (см. также [1, 3]).

Если отказаться от условия $n \leqslant d + 1$, выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(X_1, \dots, X_n)$ уже не обязательно будет симплексом. В этом случае Каблучко и др. [2] получили формулу для среднего объема в предположении $\beta_1 = \dots = \beta_n = \beta$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\,(\mathrm{conv}(X_1, \dots, X_n)) \\ &\quad = \frac{(d+1)\kappa_d}{\pi^{\frac{d+1}{2}} 2^d} \cdot \binom{n}{d+1} \left(\frac{(d+1)}{2} + \beta\right) \left(\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2} + \beta)}{\Gamma(\frac{d+3}{2} + \beta)}\right)^{d+1} \\ &\qquad \times \int_{-1}^{1} (1-h^2)^{(d+1)\beta) + \frac{d^2+2d-1}{2}} \cdot \left(F_{\beta + \frac{d-1}{2}}(h)\right)^{n-d-1} \mathrm{d}h, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$F_\beta(h) = c_{1,\beta} \int_{-1}^{h} (1-x^2)^\beta \,\mathrm{d}x, \quad h \in [-1, 1],$$

есть функция распределения закона, отвечающего плотности $f_{1,\beta}$.

Кроме того, были расммотрены случаи бета'-политопов, а также случаи симметризованных выпуклых оболочек и выпуклых оболочек, содержащих начало координат [2, теоремы 2.1, 2.2].

§2. Основные результаты

В данной короткой заметке мы планируем обобщить результат (1.2) на случай разных параметров бета-распределений.

Зафиксируем набор параметров $\overline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\beta_i > -1$. Рассмотрим $X_1, \dots, X_n$ – независимые случайные векторы в $\mathbb{R}^d$, такие что X_i распределен в соответствии с плотностью f_{d,β_i}.

Рассмотрим случайный политоп $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}} = \operatorname{conv}(X_1, \dots, X_n)$. Основной результат данной статьи – явное выражение для математического ожидания объема $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}$.

Теорема 2.1. *Для любого набора параметров* $\overline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, *где* $\beta_i > -1$, *имеем*

$$\mathbb{E}\operatorname{Vol}_d\left(\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}\right) = \frac{\kappa_d}{\pi^{\frac{d+1}{2}} 2^d} \cdot \sum_{i_1 < \ldots < i_{d+1}} \left(\frac{(d+1)^2}{2} + \sum_{k=1}^{d+1} \beta_{i_k}\right) \prod_{k=1}^{d+1} \frac{\Gamma(\frac{d+2}{2} + \beta_{i_k})}{\Gamma(\frac{d+3}{2} + \beta_{i_k})}$$
$$\times \int_{-1}^{1} (1-h^2)^{\sum_{k=1}^{d+1} \beta_{i_k} + \frac{d^2+2d-1}{2}} \cdot \prod_{k \neq i_1, \dots, i_{d+1}} F_{\beta_k + \frac{d-1}{2}}(h)\,\mathrm{d}h.$$

Кроме того, вычислено математическое ожидание функционала $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}$, введенного Уикером [8]:

$$T_{a,b}^{k,d}(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \operatorname{dist}^a(F, 0) \operatorname{Vol}_k^b(F),$$

где $\mathcal{F}_k(P)$ – множество k-мерных граней P.

Теорема 2.2. *Для любого набора параметров* $\overline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, *где* $\beta_i > -1$, *имеем*

$$\mathbb{E}\, T_{a,b}^{d-1,d}\left(\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}\right) = d!\,\kappa_d \sum_{i_1 < \cdots < i_d} \frac{\prod c_{d,\beta_i}}{\prod c_{d-1,\beta_i}} \cdot \mathbb{E}\,\left(\operatorname{Vol}_{d-1}\left(\operatorname{conv}(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})\right)\right)^{b+1}$$
$$\times \int_{-1}^{1} |h|^a (1-h^2)^{\sum_{k=1}^{d} \beta_{i_k} + \frac{d-1}{2}(d+b+1)} \cdot \prod_{k \neq i_1, \dots, i_d} F_{\beta_k + \frac{d-1}{2}}(h)\,\mathrm{d}h,$$

где формула для $\mathbb{E}\,\left(\operatorname{Vol}_{d-1}\left(\operatorname{conv}(X_{i_1}, \dots, X_{i_d})\right)\right)^{b+1}$ *дана в* (1.1).

Заметим, что для $\beta_1 = \cdots = \beta_n$ данный результат был получен в [2, теорема 2.11].

В следующем разделе мы приводим необходимые сведения о бета-распределениях, которые будут использованы далее в разделах, содержащих доказательства основных теорем.

§3. Основные сведения о бета-распределениях

Пусть $k \leqslant d$. Обозначим через $G(d,k)$ множество всех линейных k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^d$ с вероятностной мерой Хаара $\nu_{d,k}$, инвариантной относительно поворотов. Через $A(d,k)$ обозначим множество всех аффинных k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^d$.

Пусть $L \in G(d,k)$ – k-мерное линейное подпространство следующего вида: $L = \{x \in \mathbb{R}^d : x_{k+1} = \dots = x_d = 0\}$. Рассмотрим случайный вектор X с плотностью $f_{d,\beta}$.

Утверждение 3.1. *Пусть* $\pi_L : \mathbb{R}^d \to L$ *– ортогональная проекция на* L*, тогда* $\pi_L(X)$ *имеет в* L *плотность* $f_{k,\beta+\frac{d-k}{2}}$.

Рассмотрим гиперплоскость $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$ и обозначим через $E_h = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = h\}$ аффинную гиперплоскость, параллельную E_0. Рассмотрим следующие полупространства:

$$E_h^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > h\} \text{ и } E_h^- = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d < h\}.$$

Утверждение 3.2. *Для вектора* X*, распределенного в соответствии с плотностью* $f_{d,\beta}$*, имеем*

$$\mathbb{P}\left(X \in E_h^+\right) = 1 - F_{1,\beta+\frac{d-1}{2}}(h), \quad h \in [-1,1]$$
$$\mathbb{P}\left(X \in E_h^-\right) = F_{1,\beta+\frac{d-1}{2}}(h), \quad h \in [-1,1]$$
$$\mathbb{P}\left(X \in E_h^- \cap E_{-h}^+\right) = F_{1,\beta+\frac{d-1}{2}}(h) - F_{1,\beta+\frac{d-1}{2}}(-h), \quad h \in [0,1].$$

Доказательства утверждений 3.1 и 3.2 приведены в [2].

Для набора параметров $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1})$, где $\gamma_i > -1$, обозначим через $\Delta_m^{\overline{\gamma}} = \mathrm{Vol}_m\left(\mathcal{P}_{m+1,m}^{\overline{\gamma}}\right)$ объем случайного бета-симплекса в $\mathbb{R}^m$.

Лемма 3.1. *Пусть* $E \in A(d,d-1)$ *– аффинная гиперплоскость, такая, что* $\mathrm{dist}(E,0) = h$*. Тогда*

$$\int\limits_{E^d} \left(\mathrm{Vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_d)\right)\right)^k \cdot \prod_{i=1}^d f_{d,\beta_i}(x_i) \prod \lambda_E(\mathrm{d}x_i)$$
$$= \frac{\prod c_{d,\beta_i}}{\prod c_{d-1,\beta_i}} \cdot (1-h^2)^{\sum_{i=1}^d \beta_i + \frac{d-1}{2}(k+d)} \cdot \mathbb{E}\,(\Delta_{d-1}^{\overline{\beta}})^k. \quad (3.1)$$

Доказательство. В силу сферической симметричности мы можем считать, что $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = h\}$. Пусть L – линейное подпространство, параллельное E. Обозначим $x^* = \pi_l(x)$, тогда $|x|^2 = |x^*|^2 + h^2$. Таким образом,

$$\int\limits_{E^d} (\mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_d)))^k \cdot \prod_{i=1}^{d} f_{d,\beta_i}(x_i) \prod \lambda_E(\mathrm{d}x_i)$$

$$= \prod c_{d,\beta_i} \int\limits_{(E\cap\mathbb{B}^d)^d} (\mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_d)))^k \cdot \prod_{i=1}^{d} (1 - |x_i|^2)^{\beta_i} \prod \lambda_E(\mathrm{d}x_i)$$

$$= \prod c_{d,\beta_i} \int\limits_{(L\cap\mathbb{B}^d\sqrt{1-h^2})^d} (\mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{conv}(x_1^*, \ldots, x_d^*)))^k \cdot \prod_{i=1}^{d} (1 - |x_i^*|^2 - h^2)^{\beta_i} \prod \lambda_L(\mathrm{d}x_i^*)$$

$$= \prod c_{d,\beta_i} \cdot (1-h^2)^{\sum \beta_i} \int\limits_{(L\cap\mathbb{B}^d\sqrt{1-h^2})^d} (\mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{conv}(x_1^*, ..., x_d^*)))^k \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \frac{|x_i^*|^2}{1-h^2}\right)^{\beta_i}$$

$$\times \prod \lambda_L(\mathrm{d}x_i^*).$$

После замены переменных $y_i = \frac{x_i^*}{\sqrt{1-h^2}}$ получаем

$$\int\limits_{E^d} (\mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_d)))^k \cdot \prod_{i=1}^{d} f_{d,\beta_i}(x_i) \prod \lambda_E(\mathrm{d}x_i)$$

$$= \prod c_{d,\beta_i} \cdot (1-h^2)^{\sum \beta_i + (d-1)(k+d)} \int\limits_{(\mathbb{B}^{d-1})^d} (\mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{conv}(y_1, \ldots, y_d)))^k$$

$$\times \prod_{i=1}^{d} \left(1 - |y_i|^2\right)^{\beta_i} \prod \lambda_L(\mathrm{d}y_i)$$

$$= \frac{\prod c_{d,\beta_i}}{\prod c_{d-1,\beta_i}} \cdot (1-h^2)^{\sum \beta_i + (d-1)(k+d)} \int\limits_{(\mathbb{B}^{d-1})^d} (\mathrm{Vol}_{d-1}(\mathrm{conv}(y_1, \ldots, y_d)))^k$$

$$\times \prod_{i=1}^{d} f_{d-1,\beta_i}(y_i) \prod \lambda_L(\mathrm{d}y_i)$$

$$= \frac{\prod c_{d,\beta_i}}{\prod c_{d-1,\beta_i}} (1-h^2)^{\sum \beta_i + (d-1)(k+d)} \cdot \mathbb{E}\,(\Delta_{d-1}^{\overline{\beta}})^k,$$

откуда следует утверждение леммы. □

§4. Доказательство теоремы 2.2

Напомним, что $T^{k,d}_{a,b}(P) = \sum\limits_{F\in\mathcal{F}_k(P)} \operatorname{dist}^a(F,0)\operatorname{Vol}^b_k(F)$. Перейдем к вычислению $\mathbb{E}\,T^{d-1,d}_{a,b}\left(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d}\right)$. Почти наверное точки $X_1,\dots,X_n$ находятся в общем положении, следовательно, гиперграни $\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d}$ почти наверное являются $(d-1)$-мерными симплексами. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,T^{d-1,d}_{a,b}(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i_1<\dots<i_d}\mathbf{1}(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d})\in\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d}))\right.\\ \left.\times\operatorname{dist}^a(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d}),0)\cdot\operatorname{Vol}^b_{d-1}(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d}))\right)\\ = \sum_{i_1<\dots<i_d}\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^d}\mathbb{P}\left(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d})\in\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d})\,|\,X_{i_1}=x_1,\dots,X_{i_d}=x_d\right)\\ \times\operatorname{dist}^a(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d),0)\cdot\operatorname{Vol}^b_{d-1}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d))\\ \times\prod f_{d,\beta_{i_k}}(x_k)\prod\lambda(\mathrm{d}x_i).\end{aligned}$$

Применяя формулу Бляшке–Петканчина ([7], теорема 7.2.7), получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^d}\mathbb{P}\left(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d})\in\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d})\,|\,X_{i_1}=x_1,\dots,X_{i_d}=x_d\right)\\ \times\operatorname{dist}^a(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d),0)\cdot\operatorname{Vol}^b_{d-1}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d))\\ \times\prod f_{d,\beta_{i_k}}(x_k)\prod\lambda(\mathrm{d}x_i)\\ =(d-1)!\,\frac{\omega_d}{\omega_1}\int\limits_{A_{d,d-1}}\int\limits_{E^d}\mathbb{P}\left(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d})\in\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d})\,|\,X_{i_1}=x_1,\dots,X_{i_d}=x_d\right)\\ \times\operatorname{dist}^a(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d),0)\cdot\operatorname{Vol}^{b+1}_{d-1}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d))\\ \times\prod f_{d,\beta_{i_k}}(x_k)\prod\lambda_E(\mathrm{d}x_i)\,\mu_{d,d-1}(\mathrm{d}E).\end{aligned}$$

Условная вероятность в выражении выше есть вероятность того, что все X_k, где $k\neq i_1,\dots,i_d$, лежат в одном полупространстве относительно $\operatorname{aff}(x_{i_1},\dots,x_{i_d})=E$. Если $\operatorname{dist}(E,0)=h$, в силу сферической инвариантности и утверждения 3.2 имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d})\in\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d})\,|\,X_{i_1}=x_1,\dots,X_{i_d}=x_d\Big)\\
&=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\neq i_1,\dots,i_d}\{X_k\in E^+\}\right)+\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\neq i_1,\dots,i_d}\{X_k\in E^-\}\right)\\
&=\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}\Big(1-F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\Big)+\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h).
\end{aligned}$$

Таким образом (опять же в силу симметрии),

$$\begin{aligned}
&(d-1)!\,\frac{\omega_d}{\omega_1}\int\limits_{A_{d,d-1}}\int\limits_{E^d}\mathbb{P}\Big(\operatorname{conv}(X_{i_1},\dots,X_{i_d})\in\mathcal{F}_{d-1}(\mathcal{P}^{\overline{\beta}}_{n,d})\,|\,X_{i_1}=x_1,\dots,X_{i_d}=x_d\Big)\\
&\qquad\times\operatorname{dist}^a(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d),0)\cdot\operatorname{Vol}^{b+1}_{d-1}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d))\\
&\qquad\times\prod f_{d,\beta_{i_k}}(x_k)\prod\lambda_E(\mathrm{d}x_i)\,\mu_{d,d-1}(\mathrm{d}E)\\
&=(d-1)!\,\frac{\omega_d}{\omega_1}\int\limits_{G_{d,d-1}}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{(L+h)^d}\left[\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}\Big(1-F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\Big)+\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\right]\\
&\quad\times|h|^a\cdot\operatorname{Vol}^{b+1}_{d-1}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d))\cdot\prod f_{d,\beta_{i_k}}(x_k)\prod\lambda_{L+h}(\mathrm{d}x_i)\,\mathrm{d}h\,\nu_{d,d-1}(\mathrm{d}L)\\
&=d!\,\kappa_d\int\limits_0^1\left[\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}\Big(1-F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\Big)+\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\right]\cdot h^a\\
&\qquad\times\int\limits_{E^d}\operatorname{Vol}^{b+1}_{d-1}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d))\cdot\prod f_{d,\beta_{i_k}}(x_k)\prod\lambda_E(\mathrm{d}x_i)\,\mathrm{d}h,
\end{aligned}$$

где $E=E_h$.

Применяя лемму 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
&d!\,\kappa_d\int\limits_0^1\left[\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}\Big(1-F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\Big)+\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\right]\cdot h^a\\
&\qquad\times\int\limits_{E^d}\operatorname{Vol}^{b+1}_{d-1}(\operatorname{conv}(x_1,\dots,x_d))\cdot\prod f_{d,\beta_{i_k}}(x_k)\prod\lambda_E(\mathrm{d}x_i)\,\mathrm{d}h\\
&=d!\,\kappa_d\cdot\frac{\prod c_{d,\beta_i}}{\prod c_{d-1,\beta_i}}\cdot\mathbb{E}\,\Big(\Delta^{\overline{\beta_I}}_{d-1}\Big)^{b+1}\cdot\int\limits_0^1 h^a(1-h^2)^{\sum_{k=1}^d\beta_{i_k}+\frac{d-1}{2}(d+b+1)}
\end{aligned}$$

$$\times\left[\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}\Big(1-F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\Big)+\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\right]\mathrm{d}h$$

$$=d!\,\kappa_d\cdot\frac{\prod c_{d,\beta_i}}{\prod c_{d-1,\beta_i}}\cdot\mathbb{E}\left(\Delta_{d-1}^{\overline{\beta_I}}\right)^{b+1}\cdot\int\limits_{-1}^{1}|h|^a(1-h^2)^{\sum_{k=1}^d\beta_{i_k}+\frac{d-1}{2}(d+b+1)}$$

$$\times\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\,\mathrm{d}h,$$

где $\beta_I=(\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_d})$. Следовательно,

$$\mathbb{E}\,T_{a,b}^{d-1,d}(\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}})=d!\,\kappa_d\sum_{i_1<\dots<i_d}\frac{\prod c_{d,\beta_i}}{\prod c_{d-1,\beta_i}}\cdot\mathbb{E}\left(\Delta_{d-1}^{\overline{\beta_I}}\right)^{b+1}$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}|h|^a(1-h^2)^{\sum_{k=1}^d\beta_{i_k}+\frac{d-1}{2}(d+b+1)}\cdot\prod_{k\neq i_1,\dots,i_d}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\,\mathrm{d}h.$$

§5. Доказательство теоремы 2.1

Рассмотрим сначала случай, когда все $\beta_i>-\frac{1}{2}$. Тогда, если L – произвольное подпространство в $G(d+1,d)$, утверждение 3.1 влечет

$$\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac12}}|_L=\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}},$$

где $\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac12}}|_L$ – ортогональная проекция $\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac12}}$ на L.

Применяя формулу Куботы ([7], равенство (5.8)), получаем

$$V_d(\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac12}})=(d+1)\frac{\kappa_{d+1}}{2\kappa_d}\int\limits_{G(d+1,d)}\mathrm{Vol}_d\left(\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac12}}|_L\right)\nu_{d+1,d}(\mathrm{d}L),$$

откуда

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,V_d\left((\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac12}}\right)&=(d+1)\frac{\kappa_{d+1}}{2\kappa_d}\int\limits_{G(d+1,d)}\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\left(\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac12}}|_L\right)\nu_{d+1,d}(\mathrm{d}L)\\&=(d+1)\frac{\kappa_{d+1}}{2\kappa_d}\int\limits_{G(d+1,d)}\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\left(\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}\right)\nu_{d+1,d}(\mathrm{d}L)\\&=(d+1)\frac{\kappa_{d+1}}{2\kappa_d}\,\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}.\end{aligned}$$

В силу равенства $V_d\left((\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{2}T_{0,1}^{d,d+1}(\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac{1}{2}}})$, получаем

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\left(\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}\right) = \frac{\kappa_d}{(d+1)\kappa_{d+1}}\mathbb{E}\,T_{0,1}^{d,d+1}(\mathcal{P}_{n,d+1}^{\overline{\beta-\frac{1}{2}}}) = \frac{\kappa_d}{(d+1)\kappa_{d+1}}(d+1)!\kappa_{d+1}$$
$$\times \sum_{i_1<\dots<i_{d+1}} \frac{\prod c_{d+1,\beta_i-\frac{1}{2}}}{\prod c_{d,\beta_i-\frac{1}{2}}} \cdot \mathbb{E}\left(\Delta_d^{\overline{\beta_I-\frac{1}{2}}}\right)^2$$
$$\times \int_{-1}^{1}(1-h^2)^{\sum_{k=1}^{d+1}\beta_{i_k}-\frac{d+1}{2}+\frac{d}{2}(d+3)} \cdot \prod_{k\neq i_1,\dots,i_{d+1}} F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\,\mathrm{d}h.$$

Применив (1.1), получим

$$\mathbb{E}\left(\Delta_d^{\overline{\beta_I-\frac{1}{2}}}\right)^2 = (d!)^{-2}\frac{\Gamma\left(\frac{(d+1)(d+2)}{2}+\sum_{k=1}^{d+1}(\beta_{i_k}-\frac{1}{2})+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d(d+3)}{2}+\sum_{k=1}^{d+1}(\beta_{i_k}-\frac{1}{2})+1\right)} \cdot \prod_{j=1}^{d}\frac{\Gamma\left(\frac{j+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}$$
$$\times \prod_{k=1}^{d+1}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+\beta_{i_k}-\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}+\beta_{i_k}-\frac{1}{2}+1\right)}$$
$$= \frac{1}{d!\cdot 2^d}\cdot\left(\frac{(d+1)^2}{2}+\sum_{k=1}^{d+1}\beta_{i_k}\right)\cdot\prod_{k=1}^{d+1}\frac{1}{\frac{d+1}{2}+\beta_{i_k}},$$

следовательно,

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\left(\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}\right) = \frac{\kappa_d}{2^d}\cdot\sum_{i_1<\dots<i_{d+1}}\prod_{k=1}^{d+1}\frac{c_{d+1,\beta_{i_k}-\frac{1}{2}}}{c_{d,\beta_{i_k}-\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{(d+1)^2}{2}+\sum_{k=1}^{d+1}\beta_{i_k}\right)$$
$$\times\prod_{k=1}^{d+1}\frac{1}{\frac{d+1}{2}+\beta_{i_k}}\int_{-1}^{1}(1-h^2)^{\sum_{k=1}^{d+1}\beta_{i_k}+\frac{d^2+2d-1}{2}}\prod_{k\neq i_1,\dots,i_{d+1}}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\,\mathrm{d}h$$
$$= \frac{\kappa_d}{2^d}\cdot\sum_{i_1<\ldots<i_{d+1}}\left(\frac{(d+1)^2}{2}+\sum_{k=1}^{d+1}\beta_{i_k}\right)\prod_{k=1}^{d+1}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2}+\beta_{i_k})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d+1}{2}+\beta_{i_k})}\cdot\prod_{k=1}^{d+1}\frac{1}{\frac{d+1}{2}+\beta_{i_k}}$$
$$\times\int_{-1}^{1}(1-h^2)^{\sum_{k=1}^{d+1}\beta_{i_k}+\frac{d^2+2d-1}{2}}\cdot\prod_{k\neq i_1,\dots,i_{d+1}}F_{\beta_k+\frac{d-1}{2}}(h)\,\mathrm{d}h$$

$$= \frac{\kappa_d}{\pi^{\frac{d+1}{2}} 2^d} \cdot \sum_{i_1 < \cdots < i_{d+1}} \left(\frac{(d+1)^2}{2} + \sum_{k=1}^{d+1} \beta_{i_k} \right) \prod_{k=1}^{d+1} \frac{\Gamma(\frac{d+2}{2} + \beta_{i_k})}{\Gamma(\frac{d+3}{2} + \beta_{i_k})}$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-h^2)^{\sum_{k=1}^{d+1} \beta_{i_k} + \frac{d^2+2d-1}{2}} \cdot \prod_{k \neq i_1, \ldots, i_{d+1}} F_{\beta_k + \frac{d-1}{2}}(h) \, \mathrm{d}h.$$

На данном этапе мы доказали теорему 2.1 только для случая когда $\beta_i > -\frac{1}{2}$. Соображения аналитичности, аналогичные описанным в [2], завершают доказательство.

Список литературы

1. J. Grote, Z. Kabluchko, Ch. Thäle, *Limit theorems for random simplices in high dimensions* — ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Statist. **16** (2019), 141–177.
2. Z. Kabluchko, D. Temesvari, Ch. Thäle, *Expected intrinsic volumes and facet numbers of random beta-polytopes.* — Math. Nachr. **292**, No. 1 (2019), 79–105.
3. Z. Kabluchko, Ch. Thäle, D. Zaporozhets, *Beta polytopes and Poisson polyhedra: f-vectors and angles* — Adv. Math. **374** (2020), article 107333.
4. J. Kingman, *Random secants of a convex body* — J. Appl. Probab. **6**, No. 3 (1969), 660–672.
5. R. E. Miles, *Isotropic random simplices.* — Adv. Appl. Probab. **3** (1971), 353–382.
6. H. Ruben, R. E. Miles, *A canonical decomposition of the probability measure of sets of isotropic random points in* $\mathbb{R}^n$ — J. Multivariate Anal. **10** (1980), 1–18.
7. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*, Probability and its Applications (New York), Berlin, Springer, 2008.
8. J. A. Wieacker, *Einige probleme der polyedrischen Approximation* — Freiburg im Breisgau: Diplomarbeit, 1978.

Moseeva T. D. Mixed random beta-polytopes.

In this paper, we generalize the result on the average volume of random polytopes with vertices following beta distributions to the case of non-identically distributed vectors. Specifically,we consider the convex hull of independent random vectors in $\mathbb{R}^d$, where each vector follows a beta distribution with potentially different parameters. We derive an expression for the expected volume of these generalized beta–polytopes. Additionally, we compute the expected value of a functional introduced by Wieacker, which involves the distance of facets from the origin and their volumes.

Our results extend those of Kabluchko, Temesvari, and Thäle. Key techniques used in the proofs include the Blaschke–Petkantschin formula, Kubota's formula, and projections of beta distributed random vectors.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: polezina@yandex.ru

Поступило 17 октября 2024 г.