Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

А. В. Люлинцев

ЯКОБИЕВЫ ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Якобиевы ветвящиеся случайные блуждания

В настоящей работе изучается процесс ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Под случайным блужданием в данном случае понимается однородный марковский процесс на фазовом пространстве $\mathbf{Z}_+$ с непрерывным временем t. Такой процесс задается своей матрицей переходных интенсивностей $A = \big(a(n,m)\big)_{n,m\in\mathbf{Z}_+}$ (см., например, [5]), на которую мы накладываем условия:

A1. $a(n,m) = 0$ при $|n-m| \geqslant 2$;

A2. $a(n,m) > 0$ при $|n-m| = 1$, $a(n,n) < 0$ и

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}_+} a(n,m) = a(n,n-1) + a(n,n) + a(n,n+1) = 0$$

(в последней формуле мы используем соглашение $a(0,-1) = 0$);

A3. $a(n,m) = a(m,n)$.

Условия A1 и A2 означают, что частица может переходить только в соседние точки $\mathbf{Z}_+$, то есть при каждой смене положения частицы ее координата изменяется на единицу, и при старте из любого состояния $n \in \mathbf{Z}_+$ любое состояние $m \in \mathbf{Z}_+$ достижимо, то есть случайное блуждание является неприводимым.

Ключевые слова: марковский ветвящийся процесс, ветвящиеся случайные блуждания, матрицы Якоби, ортогональные многочлены.

Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим Институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение No. 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

Опишем сначала процесс случайного блуждания, отвечающий матрице A. Для этого введем и зафиксируем последовательность $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ положительных чисел и последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ независимых случайных величин, таких что при каждом $k \in \mathbf{Z}_+$ величина τ_k имеет экспоненциальное распределение с параметром $\frac{1}{\gamma_k}$. Случайную величину τ_k мы интерпретируем как время, которое частица, находящаяся в точке k, проведет там до смены состояния. Если частица находилась в точке k, то после смены состояния независимым образом генерируется новая случайная величина τ_k.

Через γ обозначим матрицу

$$\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots) = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\gamma_k > 0$ для всех $k \in \mathbf{Z}_+$.

Пусть $I = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, \dots)$ — единичная матрица. Выберем и зафиксируем последовательность $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ таким образом, чтобы матрица

$$\begin{aligned} P &= \gamma A + I \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_0 a(0,0)+1 & \gamma_0 a(0,1) & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_1 a(1,0) & \gamma_1 a(1,1)+1 & \gamma_1 a(1,2) & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_2 a(2,1) & \gamma_2 a(2,2)+1 & \gamma_2 a(2,3) & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_3 a(3,2) & \gamma_3 a(3,3)+1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

была стохастической матрицей, что в силу условия A2 означает, что на диагонали у нее стоят неотрицательные числа. Это можно сделать не единственным способом. В качестве γ_k можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < \gamma_k \leqslant -\frac{1}{a(k,k)}.$$

Для $n \in \mathbf{Z}_+$ по матрице P и последовательности $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ построим марковский процесс $\xi_n(t)$ с начальным условием $\xi_n(0) = n$, который мы интерпретируем как движение частицы по $\mathbf{Z}_+$. Попадая в точку $m \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$, частица находится там экспоненциальное время τ_m, после чего совершает переход в соответствии с матрицей P, то есть с вероятностью $\gamma_m\, a(m, m-1)$ переходит в точку $m-1$, с вероятностью $\gamma_m\, a(m, m) + 1$ остается в точке m и с вероятностью $\gamma_m\, a(m, m+1)$ переходит в точку $m+1$. Попадая в точку $m = 0$, частица находится там экспоненциальное время τ_0, после чего с вероятностью $\gamma_0\, a(0, 0)+1$ остается в нуле и с вероятностью $\gamma_0\, a(0, 1)$ переходит в точку 1.

Марковское семейство $\xi_n(t)$ стандартным образом определяет полугруппу операторов

$$P_0^t : \ell_2(\mathbf{Z}_+) \to \ell_2(\mathbf{Z}_+), \quad t \geqslant 0,$$

где оператор P_0^t действует на функцию $\varphi \in \ell_2(\mathbf{Z}_+)$ как

$$[P_0^t \varphi](n) = \mathbf{E}\, \varphi\bigl(\xi_n(t)\bigr). \tag{3}$$

В работе [7] показано, что генератор $\mathcal{A}$ данной полугруппы

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}\varphi](n) &= \sum_{m \in \mathbf{Z}_+} a(n, m)\, \varphi(m) \\ &= a(n, n-1)\, \varphi(n-1) + a(n, n)\, \varphi(n) + a(n, n+1)\, \varphi(n+1)\end{aligned}$$

есть оператор, задаваемый матрицей A в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ (напомним, что мы используем соглашение $a(0, -1) = 0$).

Для описания ветвящегося случайного блуждания добавим к случайному блужданию механизм ветвления. Будем предполагать, что источники ветвления находятся во всех точках $\mathbf{Z}_+$, причем ветвления отдельной частицы в любой точке происходят через независимые экспоненциально распределенные времена с параметром 1. В таком случае источник ветвления, находящийся в точке $n \in \mathbf{Z}_+$, однозначно описывается последовательностью коэффициентов $\{d_k(n)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям

$$d_1(n) \leqslant 0,\ d_k(n) \geqslant 0 \ \text{ при } \ k \neq 1 \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} d_k(n) = 0.$$

Данная последовательность коэффициентов однозначно определяется своей инфинитезимальной производящей функцией

$$\varkappa(n, u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(n)\, u^k, \quad u \in [0, 1],\ n \in \mathbf{Z}_+.$$

Размножение и гибель частиц в источнике ветвления в каждой точке $n \in \mathbf{Z}_+$ задается процессом Гальтона–Ватсона, где $d_k(n)$ – интенсивность деления на k потомков.

Введем последовательность $\{\beta(n)\}_{n=0}^{\infty}$ интенсивностей источников. По определению $\beta(n) = \varkappa'(n,1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, d_k(n)$.

Процесс ветвления предполагается независимым от процесса блуждания.

Таким образом, каждая частица, находящаяся в момент времени t в некоторой точке $n \in \mathbf{Z}_+$, может независимо от остальных частиц в системе за малое время h перейти с вероятностью $p(h,n,m) = a(n,m)\,h + o(h)$ в точку $m \neq n$, или произвести $k \neq 1$ потомков, находящихся в этой же точке n, с вероятностью $p_k(h,n) = d_k(n)\,h + o(h)$, или сохраниться (то есть никаких изменений не произойдет) с вероятностью

$$1 - \sum_{m \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{n\}} a(n,m)\,h - \sum_{k \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{1\}} d_k(n)\,h + o(h).$$

Отметим, что в литературе такие процессы также носят название однородных марковских ветвящихся процессов на фазовом пространстве $\mathbf{Z}_+$ (см. [6, глава V, §3]), но мы, следуя [13], будем называть их ветвящимися случайными блужданиями. Учитывая специфику нашей задачи (матрица A является трехдиагональной), будем называть данные процессы *якобиевыми ветвящимися случайными блужданиями.*

Обозначим через $X_n(t)$, $t \geqslant 0$, процесс, задаваемый оператором $\mathcal{A}$ и производящей функцией $\varkappa(n,u)$, с условием $X_n(0) = \delta_n$ того, что в момент времени $t = 0$ в системе имеется ровно одна частица, находящаяся в точке $n \in \mathbf{Z}_+$, где δ_n – дельта-мера в точке n. Как и в [12], процесс $X_n(t)$ мы далее будем рассматривать как марковский процесс, принимающий значения в пространстве $\mathcal{M}$ всех конечных целочисленных мер на $\mathbf{Z}_+$. Всякий элемент $M \in \mathcal{M}$ имеет вид

$$M = \sum_{j=1}^{k} \delta_{m_j}, \tag{4}$$

где $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $m_j \in \mathbf{Z}_+$. Важно отметить, что в представлении (4) точки m_j не обязательно различны, что соответствует тому, что в одной точке $\mathbf{Z}_+$ может находиться несколько частиц одновременно, и отличаются находящиеся в одной точке частицы только своими номерами в списке частиц $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$. Другими словами, каждое m_j соответствует отдельной частице, которую мы кодируем занятой ей точкой m_j и ее номером j в списке. Так как далее мы будем рассматривать только симметрические функции от $X_n(t)$, конкретный выбор нумерации частиц не играет роли. Для $M \in \mathcal{M}$ символом $\{M\}$ будем обозначать множество всех частиц, это множество мы будем записывать как

$$\{M\} = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}, \tag{5}$$

причем в этом представлении каждая точка $\mathbf{Z}_+$ может встречаться несколько раз, что соответствует тому, что в этой точке находится несколько частиц.

Итак, ветвящееся случайное блуждание $X_n(t)$ мы рассматриваем как $\mathcal{M}$-значный марковский случайный процесс, определяемый условием того, что в начальный момент времени имеется единственная частица в точке $n \in \mathbf{Z}_+$. Нас будет интересовать величина, равная среднему числу частиц $N_n(t, m)$ в некоторой точке $m \in \mathbf{Z}_+$ в момент времени $t > 0$, а также асимптотическое поведение этой величины при $t \to +\infty$.

В работах автора [7] и [8] было показано, что исследование величин $N_n(t, m)$ связано с исследованием спектра некоторой матрицы Якоби. В работе [9] была рассмотрена похожая модель, в которой нуль является поглощающим состоянием, то есть при попадании частицы в нуль она погибает там с единичной вероятностью.

В упомянутых работах были получены точные значения для величин $N_n(t, m)$, а далее эти результаты были применены к некоторым конкретным моделям, для которых величины $N_n(t, m)$ были выражены в терминах специальных функций, а также было исследовано их асимптотическое поведение при $t \to +\infty$. В работе [10] исследовано асимптотическое поведение среднего значения функционалов от случайного поля частиц, задаваемого ветвящимся случайным блужданием. В качестве примера получена формула для ковариации числа частиц якобиево ветвящегося случайного блуждания. Результат применен к модели, связанной с многочленами Чебышёва II рода.

Настоящая работа имеет аналогичную структуру. Как и в [7,8], нуль является отражающим состоянием. Однако здесь мы рассмотрим примеры, связанные с многочленами, которые ортонормированы по дискретной мере.

Для каждых $t \geqslant 0$, $n \in \mathbf{Z}_+$ и $\varphi \in \ell_2(\mathbf{Z}_+)$ определим случайную величину $\mathfrak{I}_{t,n}(\varphi)$, полагая

$$\mathfrak{I}_{t,n}(\varphi) = \sum_{m \in \{X_n(t)\}} \varphi(m) = \int\limits_{\mathbf{Z}_+} \varphi \, dX_n(t). \tag{6}$$

По определению $\mathfrak{I}_{0,n}(\varphi) = \varphi(n)$.

Для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор P^t, который действует на $\varphi \in \ell_2(\mathbf{Z}_+)$ как

$$[P^t\varphi](n) = \mathbf{E}\,\mathfrak{I}_{t,n}(\varphi). \tag{7}$$

Определим диагональный оператор $\mathcal{B}$, задаваемый в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ матрицей

$$\begin{pmatrix} \beta(0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta(1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В работе [7] доказаны следующие две леммы, которые мы будем использовать. Важно отметить, что доказательство этих лемм не требует равномерной ограниченности элементов матриц.

Лемма 1. *Семейство операторов P^t является полугруппой, то есть для всех $s, t \geqslant 0$ справедливо соотношение*

$$P^{t+s} = P^t P^s.$$

Лемма 2. *Генератор полугруппы P^t есть оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, то есть для всех $\varphi \in \ell_2(\mathbf{Z}_+)$, $n \in \mathbf{Z}_+$ справедливо*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{[P^t\varphi](n) - \varphi(n)}{t} = [\mathcal{A}\varphi](n) + \beta(n)\,\varphi(n).$$

Заметим, что утверждение леммы 2 эквивалентно операторному тождеству (см., например, [4, глава 8, §2])

$$P^t = e^{t\mathcal{H}}, \quad \text{где } \mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

где оператор $\mathcal{A}$ отвечает блужданию, а диагональный оператор $\mathcal{B}$ отвечает ветвлению.

В нашей модели оператор $\mathcal{H}$ в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ задается матрицей Якоби

$$H = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где последовательности $\{a_k\}, \{b_k\}$ для всех $k \in \mathbf{Z}_+$ определяются равенствами

$$a_k = a(k,k) + \beta(k), \quad b_k = a(k,k+1) = a(k+1,k) > 0.$$

Важно отметить (и далее мы будем это использовать), что верно и обратное, всякая матрица H вида (8) с условием $b_k > 0$ для всех $k \in \mathbf{Z}_+$ может быть однозначно представлена в виде суммы матриц, отвечающих операторам блуждания и ветвления, именно,

$$H = \begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & \dots \\ b_0 & -(b_0+b_1) & b_1 & \dots \\ 0 & b_1 & -(b_1+b_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0+b_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1+b_0+b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2+b_1+b_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Оператор $\mathcal{H}$ является симметричным, но не обязательно ограниченным.

Теорема 1. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, – якобиево ветвящееся случайное блуждание по $\mathbf{Z}_+$, соответствующая ему матрица H задается формулой (8), а оператор $\mathcal{H}$ является самосопряженным оператором в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$. Тогда для среднего числа частиц $N_n(t,m)$ в точке $m \in \mathbf{Z}_+$ в момент времени $t \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$N_n(t,m) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{t\lambda} P_m(\lambda)\, P_n(\lambda)\, \rho(d\lambda). \quad (10)$$

Случаю ограниченного оператора посвящена работа [7]. В продолжение представленных там примеров (многочлены Чебышёва II рода, многочлены Чебышёва I рода и многочлены Лежандра) рассмотрим примеры с неограниченными операторами, матрицам которых соответствуют классические ортогональные многочлены.

§2. Примеры

Для исследуемых ниже примеров необходимы некоторые сведения о специальных функциях (см. подробнее, например, [2]). Гипергеометрическим рядом будем называть

$${}_pF_q(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}, \quad (11)$$

где $(a)_n$ обозначает символ Похгаммера (восходящий факториал), определенный равенством

$$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1), \quad k \in \mathbf{N}; \quad (a)_0 = 1,$$

a – любое действительное или комплексное число.

Здесь b_j не могут быть отрицательными целыми числами или нулем, поскольку это привело бы к обращению в нуль знаменателя. Ряд обрывается (то есть становится конечной или пустой суммой), если хотя бы одно из a_j является целым отрицательным числом или нулем.

Один из примеров гипергеометрического ряда – гипергеометрическая функция Гаусса

$${}_2F_1(a,b;c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{x^k}{k!}, \quad |x| < 1.$$

Ряд (11) сходится абсолютно при всех x, если $p \leqslant q$, и для $|x| < 1$, если $p = q+1$, и расходится для всех $x \neq 0$, если $p > q+1$ и ряд не обрывается (см. [2], глава 2).

Через C_n^k, как обычно, будем обозначать биномиальные коэффициенты

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k(-n)_k}{k!}.$$

В настоящей работе будут рассмотрены модели ветвящихся случайных блужданий, связанных с многочленами Кравчука, Мейкснера и Пуассона–Шарлье. Ранее данные многочлены использовались в работе [1] для исследования процессов рождения-гибели.

2.1. Многочлены Кравчука. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_{p,N}$, который в стандартном базисе в $\mathbf{R}^{N+1}$, $N \geqslant 0$, задается матрицей

$$H_{p,N} = \begin{pmatrix} 0q+Np & \sqrt{1(N-0)pq} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{1(N-0)pq} & 1q+(N-1)p & \sqrt{2(N-1)pq} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2(N-1)pq} & 2q+(N-2)p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{N1pq} & Nq+0p \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $p, q \in (0,1)$, $p+q=1$. При $p=q=\frac{1}{2}$ матрица (12) имеет вид

$$H_{\frac{1}{2},N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} N & \sqrt{1N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{1N} & N & \sqrt{2(N-1)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2(N-1)} & N & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{N} & N \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0)=\delta_n$, – якобиево ветвящееся случайное блуждание по $\{0,1,2,\dots,N\}$, соответствующая ему матрица $H_{p,N}$ задается формулой* (12). *Тогда для среднего числа частиц $\mathcal{N}_n(t,m)$ в точке $m \in \{0,1,2,\dots,N\}$ справедливо асимптотическое равенство при $t \to +\infty$*

$$\mathcal{N}_n(t,m) = \sqrt{C_N^m C_N^n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+n}{2}} p^N e^{tN}\big(1+O(e^{-t})\big).$$

В частности, при $p=q=1/2$

$$\mathcal{N}_n(t,m) = \frac{\sqrt{C_N^m C_N^n}}{2^N} e^{tN}\big(1+O(e^{-t})\big).$$

Доказательство. Симметричный оператор $\mathcal{H}_{p,N}$ действует в конечномерном пространстве (можно рассматривать его и как оператор в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$), а потому он самосопряжен.

В данном случае рекуррентное соотношение для многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (подробнее см. [7]) имеет вид

$$\sqrt{n(N+1-n)pq}\,P_{n-1}(\lambda) + [nq+(N-n)p]\,P_n(\lambda) \\ + \sqrt{(n+1)(N-n)pq}\,P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \quad (13)$$

$n=1,2,\dots,N$, где $P_0(\lambda)=1, P_1(\lambda)=\frac{\lambda-Np}{\sqrt{Npq}}$.

Решением данного рекуррентного соотношения являются многочлены

$$P_n(\lambda) = (-1)^n\sqrt{C_N^n}\left(\frac{p}{q}\right)^{n/2} K_n(\lambda;p,N), \quad n=0,1,\dots,N, \quad (14)$$

где $K_n(\lambda;p,N)$ – многочлены Кравчука [2, глава 6, с. 321]

$$K_n(\lambda;p,N) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-n)_k(-\lambda)_k}{(-N)_k}\cdot\frac{p^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{C_n^k C_\lambda^k}{C_N^k}p^{-k}. \quad (15)$$

Многочлены Кравчука удовлетворяют соотношению ортогональности (см., например, [2, глава 6, с. 321])

$$\sum_{\lambda=0}^{N} C_N^\lambda p^\lambda q^{N-\lambda} K_m(\lambda;p,N) K_n(\lambda;p,N) = \frac{1}{C_N^n}\left(\frac{q}{p}\right)^n \delta_{mn}.$$

Таким образом, с учетом нормировки в (14) получаем, что семейство многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^N$ ортонормировано на $\{0,1,\ldots,N\}$ по биномиальному распределению с параметром p, то есть вес $\rho(\lambda)$ в точке $\lambda\in\{0,1,\ldots,N\}$ равен

$$\rho(\lambda) = C_N^\lambda p^\lambda q^{N-\lambda}.$$

Спектр оператора, задаваемого матрицей (12), равен $\sigma(\mathcal{H}_{p,N}) = \{0,1,\ldots,N\}$. Оператор является самосопряженным, тогда по теореме 1 из [8] для среднего числа частиц справедливо

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_n(t,m) &= \sum_{\lambda=0}^{N} e^{t\lambda} P_m(\lambda)P_n(\lambda) C_N^\lambda p^\lambda q^{N-\lambda}\\
&= (-1)^{m+n}\sqrt{C_N^m C_N^n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}} \sum_{\lambda=0}^{N} e^{\lambda t} K_m(\lambda;p,N)K_n(\lambda;p,N) C_N^\lambda p^\lambda q^{N-\lambda}\\
&= (-1)^{m+n}\sqrt{C_N^m C_N^n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}} K_m(N;p,N)K_n(N;p,N) p^N e^{tN}\big(1+O(e^{-t})\big)\\
&= (-1)^{m+n}\sqrt{C_N^m C_N^n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{m+n} p^N e^{tN}\big(1+O(e^{-t})\big)\\
&= \sqrt{C_N^m C_N^n}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+n}{2}} p^N e^{tN}\big(1+O(e^{-t})\big),
\end{aligned}$$

где равенство $K_n(N;p,N) = (1-p^{-1})^n$ следует из (15). □

2.2. Многочлены Мейкснера. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_{b,c}$, который в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ задается матрицей

$$H_{b,c} = \frac{1}{1-c}\begin{pmatrix} 0+(0+b)c & \sqrt{1(0+b)c} & 0 & 0 & \ldots\\ \sqrt{1(0+b)c} & 1+(1+b)c & \sqrt{2(1+b)c} & 0 & \ldots\\ 0 & \sqrt{2(1+b)c} & 2+(2+b)c & \sqrt{3(2+b)c} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $b>0, c\in(0,1)$.

Теорема 3. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, – якобиево ветвящееся случайное блуждание по $\mathbf{Z}_+$, соответствующая ему матрица $H_{b,c}$ задается формулой* (16). *Тогда для среднего числа частиц $\mathcal{N}_n(t,m)$ в точке $m \in \mathbf{Z}_+$ справедливо асимптотическое равенство при $t \to \ln\frac{1}{c} - 0$*

$$\mathcal{N}_n(t,m) = \frac{(1-c)^{b+m+n}}{c^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{m!n!}} \cdot \frac{(b)_{m+n}}{\sqrt{(b)_m(b)_n}} \cdot \frac{1}{\left(\ln\frac{1}{c}-t\right)^{b+m+n}}\left(1+O\left(\ln\frac{1}{c}-t\right)\right).$$

Доказательство. Оператор $\mathcal{H}_{b,c}$ является самосопряженным по признаку Карлемана (см., [3], глава I), так как выполнено условие

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-c)\sqrt{(n+1)(n+b)c}} = \infty.$$

В данном случае рекуррентное соотношение для многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (подробнее см. [7]) имеет вид

$$\frac{1}{1-c}\Big(\sqrt{n(n-1+b)c}P_{n-1}(\lambda)+[n+(n+b)c]P_n(\lambda)+\sqrt{(n+1)(n+b)c}P_{n+1}\Big) = \lambda P_n(\lambda),$$

где $P_0(\lambda) = 1, P_1(\lambda) = \frac{(1-c)\lambda - bc}{\sqrt{bc}}$.

Решением данного рекуррентного соотношения являются многочлены

$$P_n(\lambda) = (-1)^n c^{\frac{n}{2}}\sqrt{\frac{(b)_n}{n!}}M_n(\lambda;b,c), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

где $M_n(\lambda;b,c)$ – многочлены Мейкснера [2, глава 6, с. 321]

$$M_n(\lambda;b,c) = {}_2F_1(-n,-\lambda;b;1-1/c). \tag{18}$$

Многочлены Мейкснера удовлетворяют соотношению ортогональности (см. [2, глава 6, с. 321])

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(b)_\lambda}{\lambda!}c^\lambda M_m(\lambda;b,c)M_n(\lambda;b,c) = \frac{n!}{c^n(b)_n(1-c)^b}\delta_{mn}.$$

Таким образом, с учетом нормировки в (17) получаем, что семейство многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормировано на $\mathbf{Z}_+$ по отрицательному биномиальному распределению с параметрами b, c, то есть вес $\rho(\lambda)$ в точке $\lambda \in \mathbf{Z}_+$ равен

$$\rho(\lambda) = \frac{(b)_\lambda}{\lambda!}c^\lambda(1-c)^b. \tag{19}$$

Спектр оператора, задаваемого матрицей (16), равен $\sigma(\mathcal{H}_{b,c}) = \mathbf{Z}_+$. Оператор является самосопряженным, тогда по теореме 1 из [8] для среднего числа частиц справедливо

$$\mathcal{N}_n(t,m) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{t\lambda} P_m(\lambda) P_n(\lambda) \frac{(b)_\lambda}{\lambda!} c^\lambda (1-c)^b \tag{20}$$

$$= (-1)^{m+n}(1-c)^b c^{\frac{m+n}{2}} \sqrt{\frac{(b)_m (b)_n}{m!n!}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{\lambda t} M_m(\lambda; b, c) M_n(\lambda; b, c) \frac{(b)_\lambda}{\lambda!} c^\lambda$$

$$= (-1)^{m+n}(1-c)^b c^{\frac{m+n}{2}} \sqrt{\frac{(b)_m (b)_n}{m!n!}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} M_m(\lambda; b, c) M_n(\lambda; b, c) \frac{(b)_\lambda}{\lambda!} (ce^t)^\lambda.$$

Многочлен $M_m(\lambda; b, c) M_n(\lambda; b, c)$ имеет степень $m+n$, разложим его следующим образом

$$M_m(\lambda; b, c) M_n(\lambda; b, c) = \sum_{k=0}^{m+n} \alpha_k \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1). \tag{21}$$

Тогда, вводя обозначение $u = ce^t \in (0,1)$, для $k = 0, \ldots, m+n$ при $t \to \ln\frac{1}{c} - 0$ имеем

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1) \frac{(b)_\lambda}{\lambda!} u^\lambda = u^k \frac{d^k}{du^k} \sum_{\lambda=k}^{\infty} \frac{(b)_\lambda}{\lambda!} u^\lambda$$

$$= u^k \frac{d^k}{du^k} {}_1F_0(b; -; u)$$

$$= u^k \frac{d^k}{du^k} (1-u)^{-b} = (b)_k u^k (1-u)^{-b-k}$$

$$= \frac{(b)_k}{(1-ce^t)^{b+k}} = \frac{(b)_k}{\left(\ln\frac{1}{c} - t\right)^{b+k}} \left(1 + O\left(\ln\frac{1}{c} - t\right)\right). \tag{22}$$

Подставляя (21) и (22) в (20), получаем

$$\mathcal{N}_n(t,m) = (-1)^{m+n}(1-c)^b c^{\frac{m+n}{2}} \sqrt{\frac{(b)_m (b)_n}{m!n!}} \alpha_{m+n} \frac{(b)_k}{(1-ce^t)^{b+k}}$$

$$= \frac{(b)_k}{\left(\ln\frac{1}{c} - t\right)^{b+k}} \left(1 + O\left(\ln\frac{1}{c} - t\right)\right). \tag{23}$$

Для того, чтобы найти старший коэффициент α_{m+n} многочлена $M_m(\lambda; b, c)M_n(\lambda; b, c)$, воспользуемся (18)

$$M_n(\lambda; b, c) = {}_2F_1(-n, -\lambda; b; 1 - 1/c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k(-\lambda)_k}{(b)_k k!}\left(1 - \frac{1}{c}\right)^k.$$

Таким образом, старший коэффициент многочлена $M_n(\lambda; b, c)$ равен

$$\frac{(-1)^n(1-c)^n}{(b)_n c^n},$$

а старший коэффициент многочлена $M_m(\lambda; b, c)M_n(\lambda; b, c)$ соответственно равен

$$\alpha_{m+n} = \frac{(-1)^{m+n}(1-c)^{m+n}}{(b)_m(b)_n c^{m+n}}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), получаем утверждение теоремы. □

2.3. Многочлены Пуассона–Шарлье. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_a$, который в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ задается матрицей

$$H_a = \begin{pmatrix} 0+a & \sqrt{1a} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1a} & 1+a & \sqrt{2a} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2a} & 2+a & \sqrt{3a} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $a > 0$.

Теорема 4. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, – якобиево ветвящееся случайное блуждание по $\mathbf{Z}_+$, соответствующая ему матрица H_a задается формулой (25). Тогда для среднего числа частиц $\mathcal{N}_n(t, m)$ в точке $m \in \mathbf{Z}_+$ справедливо асимптотическое равенство при $t \to +\infty$*

$$\mathcal{N}_n(t, m) = \sqrt{\frac{a^{m+n}}{m!n!}}\, e^{-a} e^{ae^t} e^{(m+n)t}\bigl(1 + O(e^{-t})\bigr).$$

Доказательство. Оператор $\mathcal{H}_a$ является самосопряженным по признаку Карлемана (см., [3, глава I]), так как выполнено условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)a}} = \infty.$$

В данном случае рекуррентное соотношение для многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (подробнее см. [7]) имеет вид

$$\sqrt{na}P_{n-1}(\lambda) + (n+a)P_n(\lambda) + \sqrt{(n+1)a}\, P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $P_0(\lambda) = 1, P_1(\lambda) = \frac{\lambda - a}{\sqrt{a}}$.

Решением данного рекуррентного соотношения являются многочлены

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \sqrt{\frac{a^n}{n!}} C_n(\lambda; a), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{26}$$

где $C_n(\lambda; a)$ – многочлены Пуассона–Шарлье (см. [2, глава 6, с. 322]; [11, глава II, 2.81])

$$C_n(\lambda; a) = {}_2F_0(-n, -\lambda; -; -1/a). \tag{27}$$

Многочлены Пуассона–Шарлье удовлетворяют соотношению ортогональности ([2, глава 6, с. 322])

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a^\lambda}{\lambda!} e^{-a} C_m(\lambda; a) C_n(\lambda; a) = n! a^{-n} \delta_{mn}.$$

Таким образом, с учетом нормировки в (26) получаем, что семейство многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормировано на $\mathbf{Z}_+$ по распределению Пуассона с параметром a, то есть вес $\rho(\lambda)$ в точке $\lambda \in \mathbf{Z}_+$ равен

$$\rho(\lambda) = \frac{a^\lambda}{\lambda!} e^{-a}.$$

Спектр оператора, задаваемого матрицей (25), равен $\sigma(\mathcal{H}_a) = \mathbf{Z}_+$. Оператор является самосопряженным, тогда по теореме 1 из [8] для среднего числа частиц справедливо

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(t, m) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{t\lambda} P_m(\lambda) P_n(\lambda) \frac{a^\lambda}{\lambda!} e^{-a} \\ &= (-1)^{m+n} \sqrt{\frac{a^{m+n}}{m!n!}} e^{-a} \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{t\lambda} C_m(\lambda; a) C_n(\lambda; a) \frac{a^\lambda}{\lambda!}. \end{aligned} \tag{28}$$

Многочлен $C_m(\lambda; a) C_n(\lambda; a)$ имеет степень $m + n$, разложим его следующим образом

$$C_m(\lambda; a) C_n(\lambda; a) = \sum_{k=0}^{m+n} \alpha_k \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - k + 1). \tag{29}$$

Тогда для $k = 0, \dots, m + n$ имеем

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{t\lambda} \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - k + 1) \frac{a^\lambda}{\lambda!} = \sum_{\lambda=k}^{\infty} \frac{(ae^t)^\lambda}{(\lambda - k)!} = e^{ae^t} (ae^t)^k. \tag{30}$$

Подставляя (29) и (30) в (28), получаем асимптотическое равенство при $t \to +\infty$

$$\mathcal{N}_n(t,m) = (-1)^{m+n}\sqrt{\frac{a^{m+n}}{m!n!}}\,e^{-a}\alpha_{m+n}e^{ae^t}(ae^t)^{m+n}\big(1+O(e^{-t})\big). \quad (31)$$

Для того, чтобы найти старший коэффициент α_{m+n} многочлена коэффициент $C_m(\lambda;a)C_n(\lambda;a)$, воспользуемся (27)

$$C_n(\lambda;a) = {}_2F_0(-n,-\lambda;-;-1/a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(-\lambda)_k}{k!}\left(-\frac{1}{a}\right)^k.$$

Таким образом, старший коэффициент многочлена $C_n(\lambda;a)$ равен

$$\frac{(-1)^n}{a^n},$$

а старший коэффициент многочлена $C_m(\lambda;a)C_n(\lambda;a)$ соответственно равен

$$\alpha_{m+n} = \frac{(-1)^{m+n}}{a^{m+n}}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31), получаем утверждение теоремы. □

Автор выражает глубокую благодарность Н. В. Смородиной за постановку задачи и внимание к работе и А. Л. Лукашову за ценные советы.

Список литературы

1. M. Domínguez de la Iglesia, *Orthogonal Polynomials in the Spectral Analysis of Markov Processes*, Cambridge, Cambridge University Press, 2022.
2. Р. Аски, Р. Рой, Дж. Эндрюс, *Специальные функции*, перевод с англ. под ред. Ю. А. Неретина, М., МЦНМО, 2013.
3. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, М., Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1961.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, учеб. пособие. Л., 1980.
5. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М., Наука, 1977.
6. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов, т. II*, М., Наука, 1973.
7. А. В. Люлинцев, *Марковские ветвящиеся случайные блуждания по* $\mathbf{Z}_+$*. Подход с использованием ортогональных многочленов.* I. —Теория вероятн. и ее примен. **69**, No. 1 (2024), 91–111.

8. А. В. Люлинцев, *Марковские ветвящиеся случайные блуждания по* $\mathbf{Z}_+$*. Подход с использованием ортогональных многочленов.* II. — Теория вероятн. и ее примен. **69**, No. 3 (2024), 439–458.
9. А. В. Люлинцев, *Марковские ветвящиеся случайные блуждания по* $\mathbf{Z}_+$ *с поглощением в нуле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **526** (2023), 109–129.
10. А. В. Люлинцев, *Об асимптотическом поведении среднего значения функционалов от случайного поля частиц, задаваемого ветвящимся случайным блужданием.* — Алгебра и анализ **36**, No. 4 (2024), 38–56.
11. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, М., Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1962.
12. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий.* — Теория вероятн. и ее примен. **68**, No. 4 (2023), 779–795.
13. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде,* М., Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, 2007.

Lyulintsev A. V. Jacobi branching random walks corresponding to orthogonal polynomials of discrete variable.

A branching random walk on $\mathbf{Z}_+$ is considered, which corresponds to a Jacobi matrix. Previously, formulas for the average number of particles at an arbitrary fixed point in $\mathbf{Z}_+$ at time $t > 0$ were obtained in terms of the orthogonal polynomials associated with this matrix. In the present work, the application of the obtained results to certain models involving orthogonal polynomials of a discrete variable (Krawtchouk, Meixner, and Poisson–Charlier polynomials) is discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lav_100k@mail.ru

Поступило 12 октября 2024 г.