Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

И. А. Лимар

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ ОДНОЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ

§1. Введение и постановка задачи

В данной статье рассматривается информационная сложность многопараметрической задачи аппроксимации функций из гильбертова пространства с квадратичным экспоненциальным воспроизводящим ядром. Приведем формальную постановку задачи.

Пусть $L_{2,d}$ – интегрируемые с квадратом вещественнозначные функции d переменных относительно центрированной гауссовской меры с матрицей ковариаций $\frac{1}{2}E_d$, где E_d – единичная матрица размера d, то есть $f \in L_{2,d}$, если

$$\|f\|_{L_{2,d}} = \big(f,f\big)^{1/2}_{L_{2,d}} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(x_1,\ldots,x_d) \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-x_j^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx_1 \ldots dx_d\Bigg)^{1/2} < \infty.$$

Также нам понадобится гильбертово пространство $\mathcal{H}_d$ с квадратичным экспоненциальным воспроизводящим ядром (англ. *reproducing kernel Hilbert space*; более подробно о теории таких пространств см. [1]), которое определяется следующим образом:

$$\mathcal{K}_d(t_1,\ldots,t_d,s_1,\ldots,s_d) = \prod_{j=1}^{d} \exp\big(-\gamma^2(t_j-s_j)^2\big), \quad t_j, s_j \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

где $\gamma > 0$ – масштабирующий параметр. Функция $\mathcal{K}_d$ также известна как гауссовское ядро, которое применяется в моделях машинного обучения (см. [14–16, 20]), алгоритмах анализа данных (см. [7]), компьютерном моделировании (см. [6, 19]).

Теперь перейдем непосредственно к d-параметрической задаче аппроксимации. Рассмотрим вложение APP_d из пространства $\mathcal{H}_d$ в $L_{2,d}$,

Ключевые слова: информационная сложность, многомерные задачи, аппроксимация, минимаксная постановка, гауссовское ядро.

для которого $\mathrm{APP}_d f = f$ для всякой функции $f \in \mathcal{H}_d$. Ввиду невозможности непосредственного ввода функции f в современные вычислительные системы, мы будем искать аппроксимации $\mathrm{APP}_d f$, использующие конечное количество n линейных функционалов от входной функции f. Известно (см. [11]), что мы можем ограничить себя линейными аппроксимациями ранга n вида

$$\mathcal{A}_{d,n} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k l_k(f) : g_k \in L_{2,d}, l_k \in \mathcal{H}_d^* \right\}.$$

Ошибку в худшем случае аппроксимации $A_{d,n} \in \mathcal{A}_{d,n}$ определим следующим образом:

$$e(A_{d,n}) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_d} \leqslant 1} \|\mathrm{APP}_d f - A_{d,n} f\|_{L_{2,d}}.$$

Наименьшая ошибка в худшем случае (далее для краткости – *минимаксная*) $e(d,n)$ ранга n задается как

$$e(d,n) = \inf_{A_{d,n} \in \mathcal{A}_{d,n}} e(A_{d,n}).$$

Кроме того, рассматривается начальная ошибка $e(d,0)$:

$$e(d,0) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_d} \leqslant 1} \|f\|_{L_{2,d}},$$

которая в некотором смысле учитывает параметрическую размерность d и может рассматриваться как ошибка аппроксимации константного алгоритма. Информационная сложность $n(d,\varepsilon)$ для нормализованного критерия в минимаксной постановке (далее для краткости – информационная сложность) определяется как

$$n(d,\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : e(d,n) \leqslant \varepsilon e(d,0)\}, \tag{2}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ – пороговая ошибка. Более детально о задаче анализе информационной сложности в минимаксной постановке и смежных проблемах можно посмотреть в трехтомнике [11–13].

Известно, что оптимальный аппроксимирующий алгоритм $S_{d,n}$ ранга n имеет вид (см. [11]):

$$S_{d,n}(f) = \sum_{m=1}^{n} (f, \phi_{d,m})_{\mathcal{H}_d} \phi_{d,m}, \quad f \in \mathcal{H}_d,$$

где $(\phi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ – последовательность ортонормированных в $\mathcal{H}_d$ собственных функций оператора $W_d = \mathrm{APP}_d^* \mathrm{APP}_d : \mathcal{H}_d \to \mathcal{H}_d$ и $(\xi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$

– невозрастающая последовательность неотрицательных собственных чисел. Причем для ошибки данного алгоритма $e(S_{d,n})$ и величины $e(d,0)$ справедливы представления:

$$e(S_{d,n}) = \sqrt{\xi_{d,n+1}}, \quad e(d,0) = \sqrt{\xi_{d,1}}.$$

Далее, чтобы указать явный вид собственных чисел $(\xi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$, собственных функций $(\phi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ и преобразовать величину $n(d,\varepsilon)$, рассмотрим интегральный оператор $I_d : L_{2,d} \to L_{2,d}$ с ядром $\mathcal{K}_d$:

$$(I_d f)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(s)\,\mathcal{K}_d(t,s) \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-s_j^2}}{\sqrt{\pi}}\,ds, \quad f \in L_{2,d}. \tag{3}$$

Данное отображение является ядерным оператором, то есть является компактным, непрерывным и для него существуют последовательности неотрицательных невозрастающих собственных чисел $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ и соответствующих ортонормированных в $L_{2,d}$ собственных функций $(\psi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$, причем $\lambda_{d,m} \to 0$ при $m \to \infty$ и $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{d,m} < \infty$ (см. [22]). Для данного оператора их можно выписать в явном виде.

При $d = 1$ введем обозначения: $\lambda_k := \lambda_{1,k}$, $\psi_k := \psi_{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда для собственных чисел λ_k справедливо представление (см. [13, с. 17] и [14, с. 97]):

$$\lambda_k = (1-\omega)\,\omega^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где ω – параметр, зависящий от γ:

$$\omega = \frac{2\gamma^2}{1 + 2\gamma^2 + \sqrt{1+4\gamma^2}},$$

и, для собственных функций имеет место следующее равенство:

$$\psi_k(t) = \sqrt{\tfrac{(1+4\gamma^2)^{1/4}}{2^{k-1}(k-1)!}} \cdot \exp\!\Big(-\tfrac{2\gamma^2 t^2}{1+\sqrt{1+4\gamma^2}}\Big) \cdot H_{k-1}\big((1+4\gamma^2)^{1/4} t\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

где H_k – k-ый многочлен Эрмита (см. [25]):

$$H_{k-1}(x) = (-1)^{k-1} e^{x^2} \frac{d^{k-1}}{(dx)^{k-1}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При произвольном $d \in \mathbb{N}$ собственные числа $\lambda_{d,m}$ записываются в мультипликативной форме:

$$\lambda_{d,m} = \prod_{j=1}^{d} \lambda_{k_j}, \quad k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

причем числа $k_1, \ldots, k_d$ должны быть подобраны таким образом, чтобы $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ монотонно убывала по m. Соответствующие собственные функции также имеют мультипликативную структуру:

$$\psi_{d,m}(t) = \prod_{j=1}^{d} \psi_{k_j}(t_j), \quad t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d, \quad k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}.$$

Несложно заметить, что $\lambda_{d,m}, \lambda_j \in (0,1)$ для всех $d, m, j \in \mathbb{N}$. Кроме того, легко показывается, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ и $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{d,m} = 1$.

Более того, согласно теореме Мерсера ядро $\mathcal{K}_d$ представимо в следующем виде (см. [23]):

$$\mathcal{K}_d(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{d,m}\, \psi_m(s)\, \psi_m(t), \quad s, t \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

Далее более детально рассмотрим введенное ранее гильбертово пространство $\mathcal{H}_d$ с воспроизводящим ядром $\mathcal{K}_d$. Скалярное произведение в данном пространстве задается следующим образом:

$$(f,g)_{\mathcal{H}_d} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f, \psi_{d,m})_{L_{2,d}}\, (g, \psi_{d,m})_{L_{2,d}}}{\lambda_{d,m}}.$$

Несложно показать, что $\mathcal{K}_d(s,\,\cdot\,) \in \mathcal{H}_d$ и имеет место воспроизводящее свойство: $f(s) = \big(f, K(s,\,\cdot\,)\big)_{\mathcal{H}_d}$ для $f \in \mathcal{H}_d$. Действительно, из разложения (6) и в силу ортонормированности $(\psi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_{2,d}$ получаем

$$\big(\mathcal{K}_d(s,\,\cdot\,), \mathcal{K}_d(\,\cdot\,,t)\big)_{\mathcal{H}_d} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{d,m}^2\, \psi_{d,m}(s)\, \psi_{d,m}(t)}{\lambda_{d,m}} = \mathcal{K}_d(s,t), \quad s,t \in \mathbb{R}^d,$$

$$\big(f, \mathcal{K}_d(s,\,\cdot\,)\big)_{\mathcal{H}_d} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f, \psi_{d,m})_{L_{2,d}}\, \lambda_{d,m}\, \psi_{d,m}(s)}{\lambda_{d,m}} = f(s), \quad f \in \mathcal{H}_d.$$

Убедимся, что $W_d = \mathrm{APP}_d^* \mathrm{APP}_d$ есть интегральный оператор I_d, суженный на $\mathcal{H}_d$. Действительно, воспользуемся воспроизводящим свойством $\mathcal{H}_d$:

$$\begin{aligned}\big(W_d f\big)(t) &= \big(W_d f(\,\cdot\,), \mathcal{K}_d(t,\,\cdot\,)\big)_{\mathcal{H}_d} = \big(\mathrm{APP}_d f(\,\cdot\,), \mathrm{APP}_d \mathcal{K}_d(t,\,\cdot\,)\big)_{L_{2,d}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(s)\, \mathcal{K}_d(t,s) \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-s_j^2}}{\sqrt{\pi}}\, ds, \quad t \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Откуда заключаем, что элементы введенной выше последовательности $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ являются собственными числами оператора W_d, а система функций $\{\sqrt{\lambda_{d,m}}\,\psi_{d,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ – ортонормированный в $\mathcal{H}_d$ набор собственных функций оператора W_d. Тогда определение (2) может быть переписано следующим образом:

$$n(d,\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : \lambda_{d,n+1} \leqslant \varepsilon^2 \lambda_{d,1}\}. \tag{7}$$

При данном фиксированном масштабирующем параметре $\gamma > 0$ мы будем рассматривать информационную сложность $n(d,\varepsilon)$ как функцию двух переменных: параметрической размерности $d \in \mathbb{N}$ и порога ошибки $\varepsilon \in (0,1)$. Ранее для данной и других постановок (см. статьи [5, 18]) исследовалась трактабильность (англ. *tractability*) задач d-параметрической аппроксимации, или на языке теории алгоритмов — критерии принадлежности к тому или иному классу информационной сложности. Например, соотношения $n(d,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-p})$, $n(d,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-p}d^q)$, $n(d,\varepsilon) = O\Big(\exp\big(p(1+\ln d)(1+|\ln\varepsilon|)\big)\Big)$ для некоторых $p, q > 0$ при $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ означают, что задача является сильно полиномиальной трактабильной (англ. *strong polynomial tractability*), полиномиальной трактабильной (англ. *polynomial tractability*), квазиполиномиальной трактабильной (англ. *quasi-polynomial tractability*) соответственно, а если величина $\ln n(d,\varepsilon)/(d+\varepsilon^{-1}) \not\to 0$ при $d+\varepsilon^{-1} \to \infty$, то задача аппроксимации является нетрактабильной. В статьях [2,4,8] изучались критерии принадлежности различным классам информационной сложности в терминах масштабирующих параметров ковариационной функции $\mathcal{K}_d$ для постановки в среднем, также в статье [9] исследовалась величина информационной сложности при $d \to \infty$ для постановки в среднем. Для сформулированной выше задачи в минимаксной постановке в работе [10] получены асимптотическая оценка величины $n(d,\varepsilon)$ при $d \to \infty$ и логарифмическая асимптотика $\ln n(d,\varepsilon_d)$ при $\varepsilon = \varepsilon_d \to 0$ и $d \to \infty$. В данной работе будет выведена верхняя оценка величины информационной сложности $n(d,\varepsilon)$ при любых фиксированных $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0;1)$.

В данной статье мы будем использовать следующие обозначения: под множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ будем понимать набор $\{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ – целые неотрицательные числа, функцию распределения считаем непрерывной справа, индикаторная функция $\mathbf{1}(A)$ равняется единице, если условие A является истиной, и нулю — в противном случае. Под $\lfloor x\rfloor$ будем понимать целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}$ – дробная часть числа, то есть $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, запись $x_n \sim y_n$ при $n \to \infty$ означает, что $\frac{x_n}{y_n} \to 1$ при $n \to \infty$.

§2. Основной результат

Перейдем к формулировке основного результата.

Теорема 1. *Справедлива следующая оценка величины $n(d,\varepsilon)$ при пороге ошибки $\varepsilon \in (0,1)$ и параметрической размерности $d \in \mathbb{N}$:*

$$n(d,\varepsilon) \leqslant A_{d,\varepsilon}\left(1 + \frac{c_\omega|\ln \varepsilon^2|}{d}\right)^d \exp\left(c_\omega|\ln\varepsilon^2|\ln\left(1 + \frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\right)\right), \tag{8}$$

где $c_\omega = |\ln\omega|^{-1}$, $A_{d,\varepsilon}$ – зависящая от ε и d величина:

$$A_{d,\varepsilon} = \frac{h\left(\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)}{\sqrt{2\pi c_\omega|\ln\varepsilon^2|}}, \quad h(x) = \frac{1 + B\sqrt{2\pi}(1+x)\ln\left(1+x^{-1}\right)}{\ln\left(1+x^{-1}\right)\sqrt{1+x}}, \tag{9}$$

и $B \in (8.2, 9.26)$ – абсолютная константа, не зависящая от d, ε, ω.

Рассмотрим сформулированную оценку более подробно. При $d \to \infty$ и любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ величина $h\left(\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)$ эквивалентна $B\sqrt{2\pi}$, откуда немедленно заключаем $A_{d,\varepsilon} \sim \frac{B}{\sqrt{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}}$. Множитель $\left(1 + \frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)^d$ стремится к $\exp\left(c_\omega|\ln\varepsilon^2|\right)$. Тогда верхняя оценка информационной сложности $n(d,\varepsilon)$ эквивалентна величине

$$\frac{B\,\exp\left(c_\omega|\ln\varepsilon^2| + \left(\ln\left(1 + \frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\right) + 1\right)\right)}{\sqrt{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}} \to \infty, \quad d \to \infty.$$

При $\varepsilon \to 0$ и фиксированном $d \in \mathbb{N}$ верхняя оценка величины $n(d,\varepsilon)$ тоже стремится к бесконечности. Действительно, сначала заметим, что $h(x) \sim (1 + B\sqrt{2\pi})\sqrt{x}$ при $x \to \infty$, откуда для величины $A_{d,\varepsilon}$ получаем

$$A_{d,\varepsilon} \sim \frac{(1 + B\sqrt{2\pi})\sqrt{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}}{\sqrt{2\pi c_\omega|\ln\varepsilon^2|d}} = \frac{1 + B\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi d}}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Далее оценим второй и третий множитель оценки величины $n(d,\varepsilon)$ с учетом $\varepsilon \to 0$:

$$\left(1 + \frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)^d \exp\left(c_\omega|\ln\varepsilon^2|\ln\left(1 + \frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\right)\right) \quad \sim \quad \left(\frac{c_\omega e|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)^d.$$

Рассмотрим случай $\varepsilon = \varepsilon_d \to 0$ при $d \to \infty$. Сначала предположим, что величина $\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}$ отделена от нуля и ограничена, то есть найдутся константы $0 < c_1 < c_2$, для которых $\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d} \in [c_1, c_2]$ при любом $d \in \mathbb{N}$. Тогда величина $h\big(\frac{|\ln \varepsilon_d^2|}{d}\big)$ ограничена и, как следствие,

$$A_{d,\varepsilon_d} = O\Bigg(\frac{1}{\sqrt{|\ln \varepsilon_d^2|}}\Bigg), \quad d \to \infty.$$

Для множителей после A_{d,ε_d} имеет место оценка с учетом $d \to \infty$ и сформулированного выше предположения:

$$\left(1 + \frac{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}{d}\right)^d = O\Big(\exp\big(\ln(1 + c_2 c_\omega) d\big)\Big),$$

$$\exp\left(c_\omega |\ln \varepsilon^2| \ln\left(1 + \frac{d}{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}\right)\right) = O\Big(\exp\big(c_\omega \ln(1 + c_1^{-1} c_\omega^{-1}) |\ln \varepsilon_d^2|\big)\Big).$$

Ситуация $|\ln \varepsilon_d^2| = o(d)$ и $d = o(|\ln \varepsilon_d^2|)$ при $d \to \infty$ рассматриваются так же как описанные ранее случаи с небольшими модификациями в рассуждениях, при этом величина $A_{d,\varepsilon_d} \to 0$ при $d \to \infty$ в силу полученных выше оценок.

Также сравним оценку (8) величины $n(d, \varepsilon)$ с полученными ранее результатами. В статье [10] Хартов и Лимар получили асимптотическую оценку $\ln n(d, \varepsilon_d)$ при $\varepsilon = \varepsilon_d \to 0$ и $d \to \infty$. Приведем ее формулировку:

$$\begin{aligned} \ln n(d, \varepsilon_d) = d \, \ln\Big(1 + \tfrac{c_\omega |\ln \varepsilon_d^2|}{d}\Big) + c_\omega |\ln \varepsilon_d^2| \, \ln\Big(1 + \tfrac{d}{c_\omega |\ln \varepsilon_d^2|}\Big) \\ + o\bigg(|\ln \varepsilon_d^2| \, \ln\Big(1 + \tfrac{d}{c_\omega |\ln \varepsilon_d^2|}\Big)\bigg), \quad d \to \infty. \end{aligned} \tag{10}$$

Несложно увидеть, что оценка (8), если положить $\varepsilon = \varepsilon_d \to 0$ при $d \to \infty$, является уточнением приведенного результата (10). Кроме того, результат (8) согласуется с выводами, полученными в статье [5] Фасшауера, Хикернелла и Вожняковского, в которой утверждается, что задача аппроксимации APP_d является квазиполиномиальной, а именно:

$$n(d, \varepsilon) \leqslant A \exp\big(2 c_\omega (1 + \ln d)(1 + \ln \varepsilon^{-1})\big), \quad \varepsilon \in (0, 1), \ d \in \mathbb{N},$$

где $A > 0$ – абсолютная константа. В статье [10] было показано, что асимптотика (10) для $\ln n(d, \varepsilon_d)$ согласуется с квазиполиномиальностью. Точно так же можно убедиться, что оценка (8) тоже согласуется с квазиполиномиальностью, однако в ситуации $\varepsilon = \varepsilon_d \to \infty$ при $d \to \infty$ оценку можно считать несколько более тонкой, так как $A_{d,\varepsilon_d} \to 0$.

§3. Вспомогательные утверждения

Прежде чем приступить к доказательству основного результата, мы рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – *последовательность независимых случайных величин, распределенных при каждом* $j \in \mathbb{N}$ *следующим образом:*

$$\mathbf{P}(U_j = k \,|\ln\omega|) = (1-\omega)\,\omega^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда для любых $d \in \mathbb{N}$ *и* $\varepsilon \in (0,1)$ *имеет место представление*

$$n(d,\varepsilon) = e^{d|\ln(1-\omega)|}\,\mathbf{E}\left(\exp\Big(\sum_{j=1}^{d} U_j\Big)\,\mathbf{1}\Big(\sum_{j=1}^{d} U_j < |\ln\varepsilon^2|\Big)\right). \tag{11}$$

С подробным доказательством леммы 1 можно ознакомиться в статье [10]. Здесь лишь отметим, что оно основывается на мультипликативной структуре собственных чисел $\lambda_{d,m}$ (см. равенство (5)) оператора I_d. Тогда с учетом сказанного выше, точной формулы (4), задающей собственные числа $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(\lambda_k, \omega \in (0,1))$, представление (7) величины $n(d,\varepsilon)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} n(d,\varepsilon) &= \#\Big\{(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d : \prod_{j=1}^{d}\lambda_{k_j} > \varepsilon^2\lambda_{d,1}\Big\} \\ &= \#\Big\{(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d : \prod_{j=1}^{d}\big((1-\omega)\,\omega^{k_j-1}\big) > \varepsilon^2(1-\omega)^d\Big\} \\ &= \sum_{(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}_0^d}\mathbf{1}\Big(\sum_{j=1}^{d} k_j\,|\ln\omega| < |\ln\varepsilon^2|\Big), \end{aligned}$$

откуда равенство (11) уже несложно получить.

Далее нам понадобится производящая функция моментов случайной величины U_1:

$$M(\nu) := \mathbf{E}\,\exp(\nu U_1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\nu k|\ln\omega|}(1-\omega)\,\omega^k = \sum_{k=0}^{\infty}(1-\omega)\,\omega^{(1-\nu)k}, \quad \nu\in\mathbb{R}.$$

Следующая лемма посвящена некоторым свойствам данной функции.

Лемма 2. 1) *При любом* $\nu < 1$ *функция* $M(\nu)$, *ее производная* $M'(\nu)$ *конечны и имеют следующие представления*:

$$M(\nu) = \frac{1-\omega}{1-\omega^{1-\nu}}, \quad M'(\nu) = \frac{(1-\omega)\,\omega^{1-\nu}}{c_\omega(1-\omega^{1-\nu})^2}.$$

Также вторая производная $M''(\nu)$ *при* $\nu < 1$ *конечна и представима в виде*:

$$M''(\nu) = (1-\omega)\,\cdot\,\frac{(1+\omega^{1-\nu})\,\omega^{1-\nu}}{c_\omega^2(1-\omega^{1-\nu})^3}$$

2) *При любом* $\alpha > 0$ *уравнение* $\alpha = M'(\nu)/M(\nu)$ *имеет единственное решение* $\nu_\alpha < 1$, *которое выражается через* α *следующим образом*:

$$\nu_\alpha = 1 - c_\omega \ln(1 + \tfrac{1}{c_\omega \alpha}). \tag{12}$$

Также справедливы соотношения

$$M(\nu_\alpha) = (1-\omega)(1+c_\omega\alpha), \quad \frac{M'(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} = \alpha, \tag{13}$$

$$\frac{M''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} = c_\omega^{-1}(1+c_\omega\alpha)\,\alpha + \alpha^2, \tag{14}$$

$$\frac{M''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} - \Big(\frac{M'(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)}\Big)^2 = c_\omega^{-1}(1+c_\omega\alpha)\,\alpha. \tag{15}$$

С доказательством леммы 2, содержащим несложные преобразования, можно ознакомиться в статье [10]. Но для вывода основного результата нам понадобится явное представление третьей производной $M'''(\nu)$ и некоторые равенства, связанные с ней, чему отведена следующая лемма.

Лемма 3. *При* $\nu < 1$ *третья производная* $M'''(\nu)$ *конечна и имеет следующее представление*

$$M'''(\nu) = (1-\omega)\,\cdot\,\frac{\big((1+\omega^{1-\nu})^2 + 2\omega^{1-\nu}\big)\,\omega^{1-\nu}}{c_\omega^3(1-\omega^{1-\nu})^4}.$$

Помимо этого имеют место тождества

$$\tfrac{M'''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} = c_\omega^{-2}\alpha(6c_\omega^2\alpha^2 + 6c_\omega\alpha + 1), \tag{16}$$

$$\tfrac{M'''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} - \tfrac{3M''(\nu_\alpha)M'(\nu_\alpha)}{M^2(\nu_\alpha)} + 2\Big(\tfrac{M'(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)}\Big)^3 = \alpha(2\alpha^2 + 3c_\omega^{-1}\alpha + c_\omega^{-2}). \tag{17}$$

Доказательство леммы 3. При $\nu < 1$ продифференцируем числитель второй производной, учитывая, что $c_\omega = |\ln\omega|^{-1}$ и $\omega \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}\big(\omega^{1-\nu} + \omega^{2(1-\nu)}\big)' &= -\ln\omega \cdot \omega^{1-\nu} - 2\ln\omega \cdot \omega^{2(1-\nu)} \\ &= c_\omega^{-1}(\omega^{1-\nu} + 2\omega^{2(1-\nu)}).\end{aligned}$$

Аналогичным образом получим производную знаменателя $M''(\nu)$:

$$\Big((1-\omega^{1-\nu})^3\Big)' = -3c_\omega^{-1}\omega^{1-\nu}(1-\omega^{1-\nu})^2.$$

Тогда с учетом выведенного выше приходим к

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega^{1-\nu} + \omega^{2(1-\nu)}}{(1-\omega^{1-\nu})^3}\right)' &= \frac{(\omega^{1-\nu} + 2\omega^{2(1-\nu)})(1-\omega^{1-\nu})}{c_\omega(1-\omega^{1-\nu})^4} \\ &\quad + \frac{3\omega^{1-\nu}(\omega^{1-\nu} + \omega^{2(1-\nu)})}{c_\omega(1-\omega^{1-\nu})^4},\end{aligned}$$

и, продолжая преобразования,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega^{1-\nu} + \omega^{2(1-\nu)}}{(1-\omega^{1-\nu})^3}\right)' &= \frac{\omega^{1-\nu}\big((1+2\omega^{1-\nu})(1-\omega^{1-\nu}) + 3(\omega^{1-\nu} + \omega^{2(1-\nu)})\big)}{c_\omega(1-\omega^{1-\nu})^4} \\ &= \omega^{1-\nu} \cdot \frac{\omega^{2(1-\nu)} + 4\omega^{1-\nu} + 1}{c_\omega(1-\omega^{1-\nu})^4} \\ &= \omega^{1-\nu} \cdot \frac{(1+\omega^{1-\nu})^2 + 2\omega^{1-\nu}}{c_\omega(1-\omega^{1-\nu})^4}.\end{aligned}$$

Для получения искомого вида $M'''(\nu)$ осталось полученную величину домножить на $(1-\omega)\,c_\omega^{-2}$ (ее не учитывали при дифференцировании).

Далее заметим, что

$$\frac{M'''(\nu)}{M(\nu)} = \frac{M'''(\nu)}{M''(\nu)} \cdot \frac{M''(\nu)}{M(\nu)},$$

и с учетом выведенного выше и сформулированного в лемме 2 получим, что

$$\frac{M'''(\nu)}{M''(\nu)} = \frac{(1-\omega)\,\frac{((1+\omega^{1-\nu})^2 + 2\omega^{1-\nu})\omega^{1-\nu}}{c_\omega^3(1-\omega^{1-\nu})^4}}{(1-\omega)\,\frac{(1+\omega^{1-\nu})\omega^{1-\nu}}{c_\omega^2(1-\omega^{1-\nu})^3}} = \frac{(1+\omega^{1-\nu})^2 + 2\omega^{1-\nu}}{c_\omega(1+\omega^{1-\nu})(1-\omega^{1-\nu})}.$$

С помощью формулы (12) приходим к

$$\omega^{1-\nu_\alpha} = \frac{c_\omega\alpha}{1+c_\omega\alpha}, \quad 1-\omega^{1-\nu_\alpha} = \frac{1}{1+c_\omega\alpha}, \quad 1+\omega^{1-\nu_\alpha} = \frac{1+2c_\omega\alpha}{1+c_\omega\alpha}, \tag{18}$$

и подставим $\nu = \nu_\alpha$:

$$\frac{M'''(\nu_\alpha)}{M''(\nu_\alpha)} = \frac{\left(\frac{1+2c_\omega\alpha}{1+c_\omega\alpha}\right)^2 + \frac{2c_\omega\alpha}{1+c_\omega\alpha}}{c_\omega \cdot \frac{1+2c_\omega\alpha}{1+c_\omega\alpha} \cdot \frac{1}{1+c_\omega\alpha}} = \frac{1+6c_\omega\alpha+6c_\omega^2\alpha^2}{c_\omega(1+2c_\omega\alpha)}.$$

Тогда, учитывая соотношение (14) и полученное выше, приходим к следующему:

$$\begin{aligned}\frac{M'''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} &= \frac{M'''(\nu_\alpha)}{M''(\nu_\alpha)} \cdot \frac{M''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} \\ &= \frac{1+6c_\omega\alpha+6c_\omega^2\alpha^2}{c_\omega(1+2c_\omega\alpha)} \cdot \left(c_\omega^{-1}(1+c_\omega\alpha)\,\alpha+\alpha^2\right) \\ &= \frac{1+6c_\omega\alpha+6c_\omega^2\alpha^2}{c_\omega^2(1+2c_\omega\alpha)} \cdot \alpha \cdot (1+2c_\omega\alpha),\end{aligned}$$

что доказывает справедливость представления (16).

Осталось убедиться в равенстве (17). Подставим полученные выше результаты с учетом тождеств (13) и (14):

$$\begin{aligned}&\frac{M'''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} - \frac{3M''(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} \cdot \frac{M'(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)} + 2\left(\frac{M'(\nu_\alpha)}{M(\nu_\alpha)}\right)^3 \\ &\quad = \alpha c_\omega^{-2}(6c_\omega^2\alpha^2+6c_\omega\alpha+1) - 3(c_\omega^{-1}(1+c_\omega\alpha)\,\alpha+\alpha^2)\alpha + 2\alpha^3 \\ &\quad = \alpha(2\alpha^2+3c_\omega^{-1}\alpha+c_\omega^{-2}).\end{aligned}$$

Таким образом, все искомые соотношения доказаны. □

В следующей лемме продолжается преобразование величины информационной сложности $n(d,\varepsilon)$, начатое в лемме 1.

Лемма 4. *Рассмотрим при некотором $\nu < 1$ последовательность независимых случайных величин $(U_j^{(\nu)})_{j\in\mathbb{N}}$ со следующим распределением для всех $j \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbf{P}\big(U_j^{(\nu)} = k \,|\, \ln\omega|\big) = \frac{(1-\omega)\,\omega^{(1-\nu)k}}{M(\nu)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда при любых $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $\nu < 1$ справедливо представление для $n(d,\varepsilon)$:

$$n(d,\varepsilon) = e^{d|\ln(1-\omega)|} M^d(\nu)\,\mathbf{E}\left(e^{(1-\nu)\sum_{j=1}^d U_j^{(\nu)}}\,\mathbf{1}\Big(\sum_{j=1}^d U_j^{(\nu)} < |\ln\varepsilon^2|\Big)\right).$$

Доказательство леммы 4 можно найти в статье [10]. Перепишем представленное равенство для величины $n(d,\varepsilon)$ следующим образом:

$$n(d,\varepsilon) = C_{d,\varepsilon,\nu}\, E_{d,\varepsilon,\nu}, \tag{19}$$

где константы $C_{d,\varepsilon,\nu}$, $E_{d,\varepsilon,\nu}$ записываются в виде:

$$C_{d,\varepsilon,\nu} = e^{d|\ln(1-\omega)|+(1-\nu)|\ln\varepsilon^2|} M^d(\nu),$$

$$E_{d,\varepsilon,\nu} = \mathbf{E}\left(e^{(1-\nu)(\sum_{j=1}^d U_j^{(\nu)} - |\ln\varepsilon^2|)}\mathbf{1}\Big(\sum_{j=1}^d U_j^{(\nu)} < |\ln\varepsilon^2|\Big)\right).$$

Заметим, что выражение под математическим ожиданием в $E_{d,\varepsilon,\nu}$ не превосходит единицы, так как $\nu < 1$. Поэтому главной компонентой величины $n(d,\varepsilon)$ является $C_{d,\varepsilon,\nu}$. Подберем ν таким образом, чтобы минимизировать $C_{d,\varepsilon,\nu}$, что равносильно оптимизации функции $\ln M(\nu) - \nu\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}$. Несложно непосредственно убедиться, что данная функция имеет точку минимума при $\nu = \nu_{d,\varepsilon}$, для которой

$$\frac{M'(\nu_{d,\varepsilon})}{M(\nu_{d,\varepsilon})} = \frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}.$$

Воспользуемся леммами 2 и 3 при $\alpha = \frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}$. Соответствующее ν_α обозначим как $\nu_{d,\varepsilon}$. Подставим $\nu_{d,\varepsilon}$ в константу $C_{d,\varepsilon,\mu}$ и, применяя (12), первое равенство в (13) и (18), получим представление:

$$\begin{aligned} C_{d,\varepsilon} &= e^{d|\ln(1-\omega)|+(1-\nu_{d,\varepsilon})|\ln\varepsilon^2|} M^d(\nu_{d,\varepsilon}) \\ &= e^{d|\ln(1-\omega)|+c_\omega|\ln\varepsilon^2|\ln\left(1+\frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\right)}\Big((1-\omega)\big(1+\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big)\Big)^d \\ &= \left(1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\right)^d \exp\!\left(c_\omega|\ln\varepsilon^2|\ln\!\left(1+\frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\right)\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично выполним подстановку $\nu = \nu_{d,\varepsilon}$ в $E_{d,\varepsilon,\nu}$:

$$E_{d,\varepsilon} = \mathbf{E}\left(e^{c_\omega \ln\left(1+\frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\right)(S_d - |\ln\varepsilon^2|)}\mathbf{1}(S_d < |\ln\varepsilon^2|)\right), \tag{21}$$

где $S_d = \sum_{j=1}^d U_{d,j}$, $U_{d,j} = U_j^{(\nu_{d,\varepsilon})}$. С учетом полученного выше выражение (19) приобретает вид:

$$n(d,\varepsilon) = C_{d,\varepsilon}\, E_{d,\varepsilon}. \tag{22}$$

В статье [10] было показано, что в случае $\varepsilon = \varepsilon_d \to 0$ при $d \to \infty$ центрированные на $|\ln\varepsilon_d^2|$ и нормированные на $\big((c_\omega^{-1} + |\ln\varepsilon_d^2|/d)|\ln\varepsilon_d^2|\big)^{1/2}$

(математическое ожидание и корень из дисперсии) суммы S_d сходятся по распределению к стандартному нормальному закону. В следующем утверждении мы установим оценку для разности между функцией распределения центрированной и нормированной суммы S_d и функцией распределения стандартного нормального закона для произвольных $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0;1)$.

Утверждение 1. *Пусть Φ – функция распределения стандартного нормального закона, F_d – функция распределения сумм S_d, центрированных на $|\ln \varepsilon^2|$ и нормированных на $\big((c_\omega^{-1} + |\ln \varepsilon^2|/d)|\ln \varepsilon^2|\big)^{1/2}$, то есть*

$$F_d(x) = \mathbf{P}\left(\frac{S_d - |\ln \varepsilon^2|}{\sqrt{\left(c_\omega^{-1} + \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d}\right)|\ln \varepsilon^2|}} \leqslant x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

Тогда для величины $\Delta_{d,\varepsilon} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_d(x) - \Phi(x)|$ справедлива оценка:

$$\Delta_{d,\varepsilon} \leqslant \tilde{B} \cdot \frac{\frac{2|\ln \varepsilon^2|^2}{d^2}(6t_{d,\varepsilon} - 1) + \frac{3|\ln \varepsilon^2|}{c_\omega d}\Big(4t_{d,\varepsilon}\big(1 - \{\ldots\}\big) - 1\Big)}{\sqrt{\left(c_\omega^{-1} + \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d}\right)^3|\ln \varepsilon^2|}}$$
$$+ \tilde{B} \cdot \frac{2t_{d,\varepsilon}\big(1 - 3\{\ldots\} + 3\{\ldots\}^2 + \frac{\{\ldots\}^3}{1 + c_\omega|\ln \varepsilon^2|d^{-1}}\big) - 1}{c_\omega^2\sqrt{\left(c_\omega^{-1} + \frac{|\ln \varepsilon^2|}{d}\right)^3|\ln \varepsilon^2|}}, \qquad (23)$$

где $\tilde{B} \in (0.41, 0.468)$ – абсолютная константа, не зависящая от d, ε и ω, $\{\ldots\} = \left\{\frac{c_\omega|\ln \varepsilon^2|}{d}\right\}$ и величина $t_{d,\varepsilon}$ определяется следующим образом:

$$t_{d,\varepsilon} := \left(\frac{\frac{c_\omega|\ln \varepsilon^2|}{d}}{1 + \frac{c_\omega|\ln \varepsilon^2|}{d}}\right)^{\left\lfloor \frac{c_\omega|\ln \varepsilon^2|}{d}\right\rfloor} \qquad (24)$$

Доказательство утверждения 1. Напомним, что распределение случайных величин $U_{d,j}$, $j \in \mathbb{N}$, задается следующим образом (см. формулировку леммы 4):

$$\mathbf{P}(U_{d,j} = k\,|\ln \omega|) = \frac{(1-\omega)\,\omega^{(1-\nu_{d,\varepsilon})k}}{M(\nu_{d,\varepsilon})}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Из теории больших уклонений известно (см. [21]), что m-ый момент случайной величины $U_{d,1}$ имеет вид

$$\mathbf{E}\, U_{d,1}^m = \frac{M^{(m)}(\nu_{d,\varepsilon})}{M(\nu_{d,\varepsilon})},$$

где $M^{(m)}(\,\cdot\,)$ – производная порядка m производящей функции моментов. Действительно, при $m \geqslant 1$ несложно в этом убедиться:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, U_{d,1}^m &= \sum_{k=1}^{\infty} k^m |\ln\omega|^m \frac{(1-\omega)\,\omega^{(1-\nu_d)k}}{M(\nu_{d,\varepsilon})}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\omega)}{M(\nu_{d,\varepsilon})} \cdot \frac{\partial^m \omega^{(1-\nu)k}}{\partial \nu^m}\bigg|_{\nu=\nu_{d,\varepsilon}} = \frac{M^{(m)}(\nu_{d,\varepsilon})}{M(\nu_{d,\varepsilon})},\end{aligned}$$

откуда второй и третий центральные моменты связаны с производящей функцией моментов следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} U_{d,1} &= \frac{M''(\nu_{d,\varepsilon})}{M(\nu_{d,\varepsilon})} - \left(\frac{M'(\nu_{d,\varepsilon})}{M(\nu_{d,\varepsilon})}\right)^2,\\ \mathbf{E}\,(U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1})^3 &= \frac{M'''(\nu_{d,\varepsilon})}{M(\nu_{d,\varepsilon})} - 3\frac{M''(\nu_{d,\varepsilon})M'(\nu_{d,\varepsilon})}{M^2(\nu_{d,\varepsilon})} + 2\left(\frac{M'(\nu_{d,\varepsilon})}{M(\nu_{d,\varepsilon})}\right)^3.\end{aligned}$$

Далее, согласно соотношениям (13)–(17), получим явные выражения для первых трех моментов случайной величины $U_{d,1}$:

$$\mathbf{E}\, U_{d,1} = \frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}, \quad \mathbf{E}\, U_{d,1}^2 = \frac{|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega d}\Big(1 + \frac{2c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big), \tag{25}$$

$$\mathbf{E}\, U_{d,1}^3 = \frac{|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega^2 d}\Big(\frac{6c_\omega^2|\ln\varepsilon^2|^2}{d^2} + \frac{6c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d} + 1\Big), \tag{26}$$

и аналогично для второго и третьего центральных моментов:

$$\operatorname{Var} U_{d,1} = \frac{|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega d}\Big(1 + \frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big), \tag{27}$$

$$\mathbf{E}\,(U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1})^3 = \frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}\left(\frac{2|\ln\varepsilon^2|^2}{d^2} + \frac{3|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega d} + |\ln\omega|^2\right). \tag{28}$$

Также нам понадобится величина $\mathbf{E}\,|U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1}|^3$, которую обозначим как β_d. Перепишем третий абсолютный центральный момент следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\beta_d &= \mathbf{E}\,(U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1})^3 \mathbf{1}\big(U_{d,1} > \mathbf{E}\,U_{d,1}\big) \\
&\quad - \mathbf{E}\,(U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1})^3 \mathbf{1}\big(U_{d,1} \leqslant \mathbf{E}\,U_{d,1}\big) \\
&= 2\mathbf{E}\,(U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1})^3 \mathbf{1}\big(U_{d,1} > \mathbf{E}\,U_{d,1}\big) - \mathbf{E}\,(U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1})^3.
\end{aligned}
$$

Пусть $\hat{\beta}_d := \mathbf{E}\,(U_{d,1} - \mathbf{E}\,U_{d,1})^3 \mathbf{1}\big(U_{d,1} > \mathbf{E}\,U_{d,1}\big)$. Далее рассмотрим данную величину отдельно:

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_d &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(k|\ln\omega| - \tfrac{|\ln\varepsilon^2|}{d^2}\Big)^3 \frac{(1-\omega)\,\omega^{(1-\nu_{d,\varepsilon})k}}{M(\nu_{d,\varepsilon})} \mathbf{1}\Big(k|\ln\omega| > \tfrac{|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big) \\
&= c_\omega^{-3}(1-\omega) \sum_{k=k_{d,\varepsilon}+1}^{\infty} \big(k - k_{d,\varepsilon} - \big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}\big)^3 \cdot \frac{\omega^{(1-\nu_{d,\varepsilon})(k-k_{d,\varepsilon}+k_{d,\varepsilon})}}{M(\nu_{d,\varepsilon})} \\
&= (1-\omega)\omega^{(1-\nu_{d,\varepsilon})k_{d,\varepsilon}} \sum_{k=1}^{\infty} \big(kc_\omega^{-1} - c_\omega^{-1}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}\big)^3 \cdot \frac{\omega^{(1-\nu_{d,\varepsilon})k}}{M(\nu_{d,\varepsilon})} \\
&= \omega^{(1-\nu_{d,\varepsilon})k_{d,\varepsilon}} \left(\mathbf{E}\left(U_{d,1} - c_\omega^{-1}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}\right)^3 + \frac{(1-\omega)\big\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^3}{c_\omega^3 M(\nu_{d,\varepsilon})} \right),
\end{aligned}
$$

где $k_{d,\varepsilon} = \lfloor \frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d} \rfloor$. С учетом равенств (25) и (26) рассмотрим отдельно величину $\mathbf{E}\left(U_{d,1} - c_\omega^{-1}\big\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}\right)^3 + \frac{(1-\omega)\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\}^3}{c_\omega^3 M(\nu_{d,\varepsilon})}$, обозначив ее как ζ_d:

$$
\begin{aligned}
\zeta_d &= \mathbf{E}\,U_{d,1}^3 - 3c_\omega^{-1}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}\mathbf{E}\,U_{d,1}^2 + 3c_\omega^{-2}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^2\mathbf{E}\,U_{d,1} \\
&\quad - c_\omega^{-3}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^3 + \tfrac{(1-\omega)\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\}^3}{c_\omega^3 M(\nu_{d,\varepsilon})}.
\end{aligned}
$$

Продолжим преобразования:

$$
\begin{aligned}
\zeta_d &= \tfrac{|\ln\varepsilon_d^2|}{c_\omega^2 d}\Big(\tfrac{6c_\omega^2|\ln\varepsilon^2|^2}{d^2} + \tfrac{6c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d} + 1\Big) \\
&\quad - 3c_\omega^{-1}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}\tfrac{|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega d}\Big(1 + \tfrac{2c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big) + 3c_\omega^{-2}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^2\tfrac{|\ln\varepsilon^2|}{d} \\
&\quad - c_\omega^{-3}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^3 + \tfrac{(1-\omega)\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\}^3}{c_\omega^3 M(\nu_{d,\varepsilon})}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим два последних слагаемых в данной сумме с учетом соотношения (13):

$$c_\omega^{-3}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^3\left(\frac{(1-\omega)}{M(\nu_{d,\varepsilon})}-1\right)=c_\omega^{-3}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^3\left(\frac{1}{1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}}-1\right)$$
$$=c_\omega^{-3}\big\{\tfrac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^3\frac{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}}{1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}}.$$

Далее для удобства величину $\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}$ обозначим как $\alpha_{d,\varepsilon}$ и выражение $\big\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}$ будем записывать кратко как $\{\ldots\}$. Тогда величина ζ_d приобретает вид:

$$\zeta_d=\alpha_{d,\varepsilon}\Big(6\alpha_{d,\varepsilon}^2+6c_\omega^{-1}\alpha_{d,\varepsilon}+c_\omega^{-2}-3c_\omega^{-2}(1+2c_\omega\alpha_{d,\varepsilon})\{\ldots\}$$
$$+3c_\omega^{-2}\{\ldots\}^2+c_\omega^{-2}\frac{\{\ldots\}^3}{1+c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}}\Big).$$

Учтем, что $k_{d,\varepsilon}=\lfloor c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}\rfloor$, первое соотношение в равенствах (18) и обозначение (24). Поэтому величину $\hat\beta_d$ можно записать следующим образом:

$$\hat\beta_d=t_{d,\varepsilon}\alpha_{d,\varepsilon}\Big(6\alpha_{d,\varepsilon}^2+6c_\omega^{-1}\alpha_{d,\varepsilon}+c_\omega^{-2}-3c_\omega^{-2}(1+2c_\omega\alpha_{d,\varepsilon})\{\ldots\}$$
$$+3c_\omega^{-2}\{\ldots\}^2+c_\omega^{-2}\frac{\{\ldots\}^3}{1+c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}}\Big).$$

Тогда с учетом полученного ранее и соотношения (28) заключаем, что

$$\beta_d=2\mathbf{E}\,(U_{d,1}-\mathbf{E}\,U_{d,1})^3\mathbf{1}\big(U_{d,1}>\mathbf{E}\,U_{d,1}\big)-\mathbf{E}\,(U_{d,1}-\mathbf{E}\,U_{d,1})^3$$
$$=2t_{d,\varepsilon}\alpha_{d,\varepsilon}\Big(6\alpha_{d,\varepsilon}^2+6c_\omega^{-1}\alpha_{d,\varepsilon}+c_\omega^{-2}-3c_\omega^{-2}(1+2c_\omega\alpha_{d,\varepsilon})\{\ldots\}$$
$$+3c_\omega^{-2}\{\ldots\}^2+c_\omega^{-2}\frac{\{\ldots\}^3}{1+c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}}\Big)-\alpha_{d,\varepsilon}\Big(2\alpha_{d,\varepsilon}^2+\frac{3\alpha_{d,\varepsilon}}{c_\omega}+\frac{1}{c_\omega^2}\Big).$$

Откуда итоговое представление величины $\beta_d=\mathbf{E}\,|U_{d,1}-\mathbf{E}\,U_{d,1}|^3$ имеет вид:

$$\beta_d = \alpha_{d,\varepsilon}\Bigg(2\alpha_{d,\varepsilon}^2(6t_{d,\varepsilon}-1)+3c_\omega^{-1}\alpha_{d,\varepsilon}(4t_{d,\varepsilon}-4\{\ldots\}-1)$$
$$+c_\omega^{-2}\Big(2t_{d,\varepsilon}\big(1-3\{\ldots\}+3\{\ldots\}^2+\tfrac{\{\ldots\}^3}{1+c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}}\big)-1\Big)\Bigg)$$

Далее воспользуемся оценкой Берри–Эссеена и получим

$$\Delta_{d,\varepsilon} = \sup_{x\in\mathbb{R}}|F_d(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{\tilde{B}\,\mathbf{E}\,|U_{d,1}-\mathbf{E}\,U_{d,1}|^3}{\sqrt{d\big(\operatorname{Var}U_{d,1}\big)^3}},$$

где $\tilde{B}\in(0.41;0.468)$ – абсолютная константа (нижняя оценка абсолютной константы получена Эссееном в [3], в качестве верхней границы – результат Шевцовой [17]). Подставим полученные выше выражения для третьего абсолютного момента и дисперсии (см. соотношение (27)):

$$\Delta_{d,\varepsilon} \leqslant \tilde{B}\cdot\frac{2\alpha_{d,\varepsilon}^3(6t_{d,\varepsilon}-1)+\frac{3\alpha_{d,\varepsilon}^2}{c_\omega}\big(4t_{d,\varepsilon}(1-\{c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}\})-1\big)}{\sqrt{\frac{d\alpha_{d,\varepsilon}^3}{c_\omega^3}\big(1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big)^3}}$$
$$+\tilde{B}\cdot\frac{\frac{\alpha_{d,\varepsilon}}{c_\omega^2}\Big(2t_{d,\varepsilon}\big(1-3\{c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}\}+3\{c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}\}^2+\frac{\{c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}\}^3}{1+c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}}\big)-1\Big)}{\sqrt{\frac{d\alpha_{d,\varepsilon}^3}{c_\omega^3}\big(1+c_\omega\alpha_{d,\varepsilon}\big)^3}},$$

откуда, учитывая, что $d\alpha_{d,\varepsilon}=|\ln\varepsilon^2|$, получается искомое соотношение (23). □

Для доказательства основной теоремы понадобится еще одна вспомогательная лемма.

Лемма 5. *Для любого $a>0$ справедлива оценка*

$$\int_{-\infty}^{0}\exp(ax)\,d\Phi(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}.$$

Доказательство леммы 5. Преобразуем интеграл, выделив полный квадрат в показателе экспоненты:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(ax)\,d\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\Big(ax - \frac{x^2}{2}\Big)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2 - 2ax + a^2 - a^2)\Big)\,dx$$

Продолжим преобразования:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(ax)\,d\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(\frac{a^2}{2}\Big) \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\Big(-\frac{(x-a)^2}{2}\Big)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(\frac{a^2}{2}\Big) \int\limits_{-\infty}^{-a} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,dx.$$

Проинтегрируем по частям и напишем оценку сверху:

$$\int\limits_{-\infty}^{-a} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x}\,d\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)$$

$$= \frac{\exp\big(-\frac{a^2}{2}\big)}{a} - \int\limits_{-\infty}^{-a} \frac{\exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{x^2}\,dx \leqslant \frac{\exp\big(-\frac{a^2}{2}\big)}{a},$$

откуда получается искомая оценка. □

§4. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1. Сначала для удобства введем обозначения (см. равенства (25) и (27)):

$$\mu_\varepsilon := d\,\mathbf{E}\,U_{d,1} = d \cdot \frac{|\ln\varepsilon^2|}{d} = |\ln\varepsilon^2|,$$

$$b_{d,\varepsilon} := \sqrt{d\operatorname{Var} U_{d,1}} = \sqrt{d \cdot \frac{|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega d}\Big(1 + \frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big)} = \sqrt{\frac{\mu_\varepsilon}{c_\omega}\Big(1 + \frac{c_\omega\mu_\varepsilon}{d}\Big)}.$$

В соотношении (22) мы получили представление информационной сложности $n(d,\varepsilon)$:

$$n(d,\varepsilon) = C_{d,\varepsilon}\, E_{d,\varepsilon},$$

где величины $C_{d,\varepsilon}$ и $E_{d,\varepsilon}$ задаются равенствами (20) и (21). Запишем величину $C_{d,\varepsilon}$:

$$C_{d,\varepsilon} = \Big(1+\frac{c_\omega \mu_\varepsilon}{d}\Big)^d \exp\Big(c_\omega \mu_\varepsilon \ln\Big(1+\frac{d}{c_\omega \mu_e}\Big)\Big).$$

Заметим, что $C_{d,\varepsilon}$ в точности совпадает со вторым и третьим множителями искомой оценки (8)

Величину $E_{d,\varepsilon}$ преобразуем следующим образом с учетом введенных выше обозначений:

$$\begin{aligned} E_{d,\varepsilon} &= \mathbf{E}\,\Big(\exp\Big(c_\omega \ln\big(1+\tfrac{d}{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}\big)(S_d - |\ln\varepsilon^2|)\Big)\mathbf{1}(S_d < |\ln\varepsilon^2|)\Big) \\ &= \mathbf{E}\,\Big(\exp\Big(c_\omega \ln\big(1+\tfrac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\big)(S_d - \mu_e)\Big)\mathbf{1}(S_d - \mu_\varepsilon < 0)\Big) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\Big(c_\omega \ln\Big(1+\frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\, dF_d(x), \end{aligned}$$

где F_d – функция распределения центрированных и нормированных сумм S_d:

$$F_d(x) = \mathbf{P}\Big(\frac{S_d - \mu_\varepsilon}{b_d} \leqslant x\Big).$$

Далее проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} J_d &:= \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\Big(c_\omega \ln\Big(1+\frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\, dF_d(x) \\ &= F_d(0) - \int\limits_{-\infty}^{0} F_d(x)\, d\Big(\exp\Big(c_\omega \ln\Big(1+\frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\Big) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} \big(F_d(0) - F_d(x)\big)\, d\Big(\exp\Big(c_\omega \ln\Big(1+\frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\Big). \end{aligned}$$

Оценим интеграл J_d сверху:

$$J_d \leqslant J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 := \int\limits_{-\infty}^{0} \big(\Phi(0) - \Phi(x)\big)\, d\bigg(\exp\Big(c_\omega \ln\Big(1 + \frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\bigg),$$

$$J_2 := \int\limits_{-\infty}^{0} \big|\Phi(x) - F_d(x)\big|\, d\bigg(\exp\Big(c_\omega \ln\Big(1 + \frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\bigg),$$

$$J_3 := \int\limits_{-\infty}^{0} \big|\Phi(0) - F_d(0)\big|\, d\bigg(\exp\Big(c_\omega \ln\Big(1 + \frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\bigg).$$

С помощью равномерной оценки (23) для $|F_d(x) - \Phi(x)|$ интегралы J_2 и J_3 можно сверху оценить величиной $r_{d,\varepsilon}$ – правой частью неравенства (23).

Преобразуем интеграл J_1 и с помощью леммы 5 оценим сверху его при $a = c_\omega \ln\big(1 + \frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\big) b_d$:

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \big(\Phi(0) - \Phi(x)\big)\, d\bigg(\exp\Big(c_\omega \ln\Big(1 + \frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\bigg)$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\Big(c_\omega \ln\Big(1 + \frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\Big) b_d x\Big)\, d\Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi} c_\omega \ln\big(1 + \frac{d}{c_\omega \mu_\varepsilon}\big) b_d}.$$

Далее оценим $r_{d,\varepsilon}$. Для этого заметим, что величину $t_{d,\varepsilon}$, заданную в (24), можно преобразовать следующим образом:

$$t_{d,\varepsilon} = \left(\frac{\frac{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}{d}}{1 + \frac{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}{d}}\right)^{\left\lfloor \frac{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}{d} \right\rfloor} = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}{d}}\right)^{\frac{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}{d} - \left\{\frac{c_\omega |\ln \varepsilon^2|}{d}\right\}},$$

откуда несложно заметить, что $t_{d,\varepsilon} \in (e^{-1}, 1]$ (для этого, например, можно рассмотреть функцию $x \mapsto \big(1 - \frac{1}{1+x}\big)^{x - \{x\}}$ при $x \geqslant 0$). Далее оценим числитель $r_{d,\varepsilon}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2|\ln\varepsilon^2|^2}{d^2}(6t_{d,\varepsilon}-1)+\frac{3|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega d}\Big(4t_{d,\varepsilon}\Big(1-\Big\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big\}\Big)\Big)\\
&+\frac{1}{c_\omega^2}\left(2t_{d,\varepsilon}\left(1-3\Big\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big\}+3\Big\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\Big\}^2+\frac{\big\{\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big\}^3}{1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}}\right)-1\right)\\
&\qquad\qquad\leqslant\frac{10|\ln\varepsilon^2|}{d^2}+\frac{12|\ln\varepsilon^2|}{c_\omega d}+\frac{3}{c_\omega^2}\leqslant 10\Big(\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}+\frac{1}{c_\omega}\Big)^2,
\end{aligned}
$$

и заключаем, что

$$
r_{d,\varepsilon}\leqslant 10\tilde{B}\frac{\big(\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}+\frac{1}{c_\omega}\big)^2}{\sqrt{\big(\frac{|\ln\varepsilon^2|}{d}+\frac{1}{c_\omega}\big)^3|\ln\varepsilon^2|}}=10\tilde{B}\sqrt{\frac{1}{d}+\frac{1}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}}.
$$

С учетом полученных выше неравенств запишем итоговую оценку для J_d, положив $B=20\tilde{B}$:

$$
J_d\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}c_\omega\ln\big(1+\frac{d}{c_\omega\mu_\varepsilon}\big)b_d}+B\sqrt{\frac{1}{d}+\frac{1}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}}
$$

Преобразуем полученную оценку:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{d,\varepsilon}&:=\frac{1}{\ln\big(1+\frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\big)\sqrt{2\pi c_\omega|\ln\varepsilon^2|\big(1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big)}}+B\sqrt{\frac{1}{d}+\frac{1}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}}\\
&=\frac{\sqrt{d}+B\ln\big(1+\frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\big)\sqrt{2\pi\big(1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big)(d+c_\omega|\ln\varepsilon^2|)}}{\ln\big(1+\frac{d}{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}\big)\sqrt{2\pi c_\omega d|\ln\varepsilon^2|\big(1+\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big)}}\\
&=\frac{h\big(\frac{c_\omega|\ln\varepsilon^2|}{d}\big)}{\sqrt{2\pi c_\omega|\ln\varepsilon^2|}}=A_{d,\varepsilon},
\end{aligned}
$$

где $h(\,\cdot\,)$ и $A_{d,\varepsilon}$ определены в (9). Таким образом, теорема доказана. $\square$

§5. Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность Алексею Андреевичу Хартову за ценные советы и рекомендации, данные при подготовке текста.

Список литературы

1. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels.* — Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.
2. J. Chen, H. Wang, *Average case tractability of multivariate approximation with Gaussian kernels.* — J. Approx. Theory **239** (2019), 51–71.
3. C.-G. Esseen, *A moment inequality with an application to the central limit theorem.* — Scand. Aktuarietidskr. J. **39** (1956), 160–170.
4. G. E. Fasshauer, F. J. Hickernell, H. Woźniakowski, *Average case approximation: convergence and tractability of Gaussian kernels.* — In: L. Plaskota, H. Woźniakowski (Eds.), Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo 2010, pp. 329–345, Springer, 2012,.
5. G. E. Fasshauer, F. J. Hickernell, H. Woźniakowski, *On dimension-independent rates of convergence for function approximation with Gaussian kernels.* — SIAM J. Numer. Analysis **50** (2012), 247–271.
6. A. I. J. Forrester, A. Sóbester, A. J. Keane, *Engineering Design via Surrogate Modelling: a Practical Guide*, Chichester, Wiley, 2008.
7. T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman, *Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, second ed., in: Springer Series in Statistics, New York, Springer, 2009.
8. A. A. Khartov, *A simplified criterion for quasi-polynomial tractability of approximation of random elements and its applications.* — J. Complexity **34** (2016), 30–41.
9. A. A. Khartov, I. A. Limar, *Asymptotic analysis in multivariate average case approximation with Gaussian kernels.* — J. Complexity **70** (2022), 101631.
10. A. A. Khartov, I. A. Limar, *Asymptotic analysis in worst case approximation with Gaussian kernels.* — J. Complexity **82** (2024), 101838.
11. E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information*, EMS Tracts Math. 6, Zürich, EMS, 2008.
12. E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals*, EMS Tracts Math. 12, Zürich, EMS, 2010.
13. E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators*, EMS Tracts Math. 18, Zürich, EMS, 2012.
14. C. E. Rasmussen, C. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*, MIT Press, 2006.
15. S. Pereverzyev, *An Introduction to Artificial Intelligence Based on Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Birkhäuser, 2022.
16. B. Schölkopf, A. J. Smola, *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*, Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 2002.
17. I. Shevtsova, *On the absolute constants in the Berry–Esseen type inequalities for identically distributed summands*, Preprint, arxiv1111.6554, 2011.
18. I. H. Sloan, H. Woźniakowski, *Multivariate approximation for analytic functions with Gaussian kernels.* — J. Complexity **45** (2018), 1–21.
19. H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, in: Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, 2005.

20. H. Zhu, C. K. I. Williams, R. J. Rohwer, M. Morciniec, *Gaussian Regression and Optimal Finite Dimensional Linear Models*, in: C. M. Bishop (Ed.), Neural Networks and Machine Learning, pp. 1–20, Berlin, Springer, 1998.
21. А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, М., URSS, 2009.
22. М. Ш. Бирман, М. З Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* СПб., Лань, 2010.
23. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустырник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* М., Наука, 1966.
24. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, М., Наука, 1972.
25. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, М., Физматлит, 2007.

Limar I. A. Probabilistic approach to analysis of information complexity of concrete multivariate approximation problem.

Information complexity in the worst-case setting of multivariate approximation problem of functions from reproducing kernel Hilbert space with Gaussian kernel is considered. In the paper we obtain an upper estimate of information complexity for arbitrary error threshold and parametric dimension via probabilistic methods. The main result refines the logarithmic asymptotics of Khartov and Limar and complements the estimates by Fasshauer, Hickernell, and Woźniakowski.

Научно-образовательный
центр математики,
Университет ИТМО,
Кронверкский пр., д. 49, лит. А.,
197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ivan.limar95@gmail.com

Поступило 11 октября 2024 г.