Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

А. А. Котова, А. С. Лотников

УСЛОВИЯ КРИТИЧНОСТИ В МОДЕЛИ ДЕРРИДА–РЕТО СО СЛУЧАЙНЫМ ЧИСЛОМ СЛАГАЕМЫХ

§1. Введение и основные результаты

1.1. Модель Деррида–Рето. Теория флуктуаций в хаотических системах – это раздел физики, который изучает поведение систем, в которых присутствуют хаос и случайность. Цель теории – понять, как флуктуации или небольшие изменения свойств системы могут привести к глобальным изменениям её общего поведения.

В частности, в системе выделяются два состояния, и изучаются переходы между ними. Модель Деррида–Рето [3] в упрощённом виде описывает такие переходы (depinning transition) между некими состояниями "pinned" и "unpinned", описывать которые нам нет необходимости. Схожие соотношения изучались также в контексте физических [4] и математических [1] исследований.

Модель Деррида–Рето со случайным числом слагаемых, которая изучается в данной работе, формулируется следующим образом. Параметрами модели являются целое число $a > 0$ и две целочисленные случайные величины: $X_0 \geqslant 0$ – начальная величина, и $N \geqslant 1$ — число слагаемых. Предполагается, что X_0 имеет конечный первый момент и не является константой, а также $\mathbf{P}(N > 1) > 0$. Функционирование системы определяется рекуррентным соотношением:

$$X_{n+1} = (X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + \cdots + X_n^{(N_{n+1})} - a)^+, \tag{1}$$

где $X_n^{(i)}$ – независимые копии X_n, N_{n+1} – не зависящая от них и всех предыдущих N_i копия N, и для любого $x \in \mathbf{R}$ $x^+ := \max(x, 0)$ – положительная часть x. Верны неравенства:

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{j=1}^{N_{n+1}} X_n^{(j)} - a\Big) \leqslant \mathbf{E}\Big(\sum_{j=1}^{N_{n+1}} X_n^{(j)} - a\Big)^+ \leqslant \mathbf{E}\sum_{j=1}^{N_{n+1}} X_n^{(j)}.$$

Ключевые слова: иерархические схемы суммирования, рекурсивная модель Деррида–Рето, случайное число слагаемых, асимптотика энергии.

Заметим, что $\mathbf{E}\sum_{j=1}^{N_{n+1}} X_n^{(j)} = \mathbf{E}N_{n+1}\cdot\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}N\cdot\mathbf{E}X_n$, откуда следует

$$\mathbf{E}\,N\cdot\mathbf{E}X_n - a \leqslant \mathbf{E}X_{n+1} \leqslant \mathbf{E}\,N\cdot\mathbf{E}X_n,$$

$$\frac{\mathbf{E}(X_{n+1})}{(\mathbf{E}\,N)^{n+1}} \leqslant \frac{\mathbf{E}(X_n)}{(\mathbf{E}\,N)^n} \quad \text{и} \quad \frac{\mathbf{E}(X_n) - \dfrac{a}{\mathbf{E}\,N-1}}{(\mathbf{E}\,N)^n} \leqslant \frac{\mathbf{E}(X_{n+1}) - \dfrac{a}{\mathbf{E}\,N-1}}{(\mathbf{E}\,N)^{n+1}}.$$

Таким образом, определен предел

$$Q = \lim_{n\to\infty}\downarrow \frac{\mathbf{E}(X_n)}{(\mathbf{E}\,N)^n} = \lim_{n\to\infty}\uparrow \frac{\mathbf{E}(X_n) - \dfrac{a}{\mathbf{E}\,N-1}}{(\mathbf{E}\,N)^n}. \tag{2}$$

Величина Q называется энергией. В зависимости от значения Q выделяют два режима: суперкритический $Q > 0$ и субкритический $Q = 0$. Особый интерес представляет критический режим, который, по сути, разделяет эти режимы. Самые интересные вопросы относительно данной модели возникают именно в критических случаях или случаях, близких к ним.

Рекуррентное соотношение [1] с параметром $a = 1$ и фиксированным числом слагаемых, т.е. $\mathbf{P}(N = n) = 1$ для некоторого $n > 1$, рассматривалось в статье [2]. В ней получены необходимые и достаточные условия в терминах распределения X_0, при которых возникают суперкритический, критический и субкритический режимы.

В данной работе мы обобщаем результаты [2] на случай произвольного a и N с невырожденным распределением. Найдены *достаточные* условия в терминах распределений X_0 и N, гарантирующие суперкритичность или субкритичность режима.

1.2. Основной результат. Основным результатом работы является следующая теорема. Пусть F_0, G – производящие функции случайных величин X_0 и N соответсвенно.

Теорема 1. *Положим* $D_0(s,m) = (m-1)\,s\,F_0'(s) - aF_0(s)$. *Тогда*
1) *Если* $D_0(\mathbf{E}\,N^{\frac{1}{a}}, \mathbf{E}\,N) > 0$, *то* $Q > 0$.
2) *Пусть* $\exists M : \mathbf{P}(N \leqslant M) = 1$. *Если* $D_0(1 + \frac{M-1}{a}, M) < 0$, *то* $Q = 0$.

Подчеркнем, что первый пункт верен без предположения о том, что случайная величина N ограничена.

Результат теоремы 1 представляет интерес даже в том случае, когда число слагаемых фиксировано, т.е. $\mathbf{P}(N = n) = 1$ для некоторого n. В этом случае теорема 1 сводится к следующему результату.

Теорема 2. *Положим* $D_0(s) = (n-1)\, s\, F_0'(s) - aF_0(s)$. *Тогда*
1) *Если* $D_0(n^{\frac{1}{a}}) > 0$, *то* $Q > 0$.
2) *Если* $D_0(1 + \frac{n-1}{a}) < 0$, *то* $Q = 0$.

Если $a = 1$, то условия пунктов 1 и 2 смыкаются, и мы получаем результат из [2]. Если $a > 1$, то теорема 2 является новым результатом.

§2. Доказательство основного результата

2.1. Эволюция производящих функций. Через $F_n(s)$ обозначим производящую функцию случайной величины X_n.

Запишем рекуррентное соотношение (1) через производящие функции:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(s) &= \frac{G(F_n(s)) - \sum\limits_{p=0}^{a-1} \frac{s^p}{p!}(G(F_n)^{(p)}(0))}{s^a} + \sum_{p=0}^{a-1} \frac{G(F_n)^{(p)}(0)}{p!} \\ &= \frac{G(F_n(s))}{s^a} + \sum_{p=0}^{a-1} (G(F_n))^{(p)}(0) \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{s^{a-p}}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3)

$$\begin{aligned} F_{n+1}'(s) &= \frac{G'(F_n(s))F_n'(s)}{s^a} - a\frac{G(F_n(s))}{s^{a+1}} \\ &\quad + \sum_{p=0}^{a-1} G(F_n)^{(p)}(0) \cdot \frac{a-p}{p!} \cdot \frac{1}{s^{a-p+1}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Этими формулами мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

2.2. Доказательство первого пункта теоремы 1.

Доказательство опирается на две леммы. Сперва мы выведем результат из них, а доказательство самих лемм будет представлено ниже.

Лемма 1. *Пусть верна посылка первого пункта теоремы, тогда существует* $1 < s < (\mathbf{E}\, N)^{\frac{1}{a}}$, *такое что*

$$(\mathbf{E}\, N - 1)\, \mathbf{E}(X_n s^{X_n}) - a\, \mathbf{E}(s^{X_n}) \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

В терминах производящих функций лемма 1 гарантирует существование $1 < s < (\mathbf{E}\, N)^{\frac{1}{a}}$, такого что

$$(\mathbf{E}\, N - 1)\, sF_n'(s) - a\, F_n(s) \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Лемма 2. *Если $Q = 0$, то справедливо $\sup\limits_{n \geqslant 0} \mathbf{E}(X_n s^{X_n}) < \infty$ для любого $0 < s < (\mathbf{E}\, N)^{\frac{1}{a}}$.*

Докажем требуемое, используя леммы 1 и 2.

Пусть $a\, \mathbf{E}(((\mathbf{E}\, N)^{\frac{1}{a}})^{X_0}) < (\mathbf{E}\, N - 1)\, \mathbf{E}(X_0((\mathbf{E}\, N)^{\frac{1}{a}})^{X_0})$, покажем, что $Q > 0$.

Из леммы 1 следует, что существует такое $1 < s < (\mathbf{E}\, N)^{\frac{1}{a}}$, что $(\mathbf{E}\, N - 1)\, \mathbf{E}(X_n s^{X_n}) - a\mathbf{E}(s^{X_n}) \to \infty$ при $n \to \infty$, откуда

$$(\mathbf{E}\, N - 1)\, \mathbf{E}(X_n s^{X_n}) \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Если $Q = 0$, то по лемме 2 было бы $\sup\limits_{n \geqslant 0} \mathbf{E}(X_n s^{X_n}) < \infty$. Поэтому $Q > 0$.

Доказательство леммы 1. Из (4) следует

$$\begin{aligned} s(\mathbf{E}\, N - 1)\, F_{n+1}'(s) &= \frac{(\mathbf{E}\, N - 1)\, s\, G'(F_n(s))\, F_n'(s)}{s^a} \\ &- a\, (\mathbf{E}\, N - 1)\, \frac{G(F_n(s))}{s^a} + \sum_{p=0}^{a-1} (\mathbf{E}\, N - 1)\, G(F_n)^{(p)}(0) \cdot \frac{a-p}{p!} \cdot \frac{1}{s^{a-p}}. \end{aligned}$$

Оценим снизу $G'(F_n(s))$.

Для этого докажем вспомогательное неравенство: для любого $v \geqslant 1$, верно $v\, G'(v) \geqslant \mathbf{E}\, N \cdot G(v)$. В терминах математических ожиданий это означает: $\mathbf{E}(Nv^N) \geqslant \mathbf{E}\, N \cdot \mathbf{E}(v^N)$.

Для любых независимых копий N_1, N_2 случайной величины N выполнено:

Если $(N_1 - N_2)(v^{N_1} - v^{N_2}) \geqslant 0$, то $0 \leqslant \mathbf{E}\left[(N_1 - N_2)(v^{N_1} - v^{N_2})\right] = 2\left(\mathbf{E}(Nv^N) - \mathbf{E}\, N\, \mathbf{E}\, v^N\right)$.

Остается заметить, что при $v \geqslant 1$ верно $(N_1 - N_2)(v^{N_1} - v^{N_2}) \geqslant 0$. $\square$

Значит для любого $v \geqslant 1$ верно $v\,G'(v) \geqslant \mathbf{E}\,N \cdot G(v)$. То есть, $F_n(s)\,G'(F_n(s)) \geqslant \mathbf{E}\,N \cdot G(F_n(s))$. Подставив в предыдущее неравенство, получим:

$$s(\mathbf{E}\,N-1)F'_{n+1}(s) \geqslant \frac{\mathbf{E}\,N(\mathbf{E}\,N-1)\,s\,G(F_n(s))F'_n(s)}{F_n(s)s^a} - a(\mathbf{E}\,N-1)\frac{G(F_n(s))}{s^a} + \sum_{p=0}^{a-1}(\mathbf{E}\,N-1)\,G(F_n)^{(p)}(0)\cdot\frac{a-p}{p!}\cdot\frac{1}{s^{a-p}}.$$

Поэтому

$$s(\mathbf{E}\,N-1)F'_{n+1}(s) - aF_{n+1}(s) \geqslant \frac{\mathbf{E}\,N\cdot G(F_n(s))}{F_n(s)s^a} \times (s(\mathbf{E}(N)-1)F'_n(s) - aF_n(s)) + \sum_{p=0}^{a-1} G(F_n)^{(p)}(0) \times \frac{1}{p!}\cdot\frac{(a-p)(\mathbf{E}\,N-1)+a-as^{a-p}}{s^{a-p}}. \tag{5}$$

Теперь разберемся с последней суммой, докажем, что $(a-p)(\mathbf{E}\,N-1)+a-as^{a-p} \geqslant 0$ при $p=0,1,\dots,a-1$ и $s \leqslant \mathbf{E}\,N^{\frac{1}{a}}$. Перепишем требуемое в другом виде:

$$y(\mathbf{E}\,N-1)+a \geqslant as^y, \quad \text{где } y=a-p>0. \tag{6}$$

Введем две функции $f_1(y)=a(\mathbf{E}\,N)^{\frac{y}{a}}$ и $f_2(y)=y(\mathbf{E}(N)-1)+a$.

Данные функции совпадают при $y=0$ и при $y=a$, причем функция f_1 выпукла вниз, а функция f_2 линейна. Поэтому

$$f_2(y) \geqslant f_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant a,$$

то есть $y(\mathbf{E}\,N-1)+a \geqslant a(\mathbf{E}\,N)^{\frac{y}{a}} \geqslant as^y$. Мы доказали неравенство (6), а значит, сумма из соотношения (5) всегда неотрицательна. Таким образом,

$$(\mathbf{E}\,N-1)\,s\,F'_{n+1}(s) - a\,F_{n+1}(s) \geqslant \frac{\mathbf{E}\,N\cdot G(F_n(s))}{F_n(s)\,s^a}[(\mathbf{E}\,N-1)\,s\,F'_n(s) - a\,F_n(s)].$$

Пусть $G(v) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k v^k$, где $a_k \geqslant 0$ (считаем, что $N>0$). Тогда $\frac{G(v)}{v} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k v^{k-1} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 1^k = 1$.

Значит:

$$(\mathbf{E}\, N-1)\, s\, F'_{n+1}(s) - aF_{n+1}(s) \geqslant \left(\frac{\mathbf{E}\, N}{s^a}\right)^n [(\mathbf{E}\, N-1)\, s\, F'_0(s) - aF_0(s)].$$

Обозначим $p = \frac{\mathbf{E}\, N}{s^a} > 1$, $C_1 = (\mathbf{E}\, N-1)\, s\, F'_0(s) - aF_0(s)$. Тогда

$$(\mathbf{E}\, N-1)\, s\, F'_{n+1}(s) - aF_{n+1}(s) \geqslant p^n C_1,$$

что стремится к $+\infty$, если $C_1 > 0$. Поскольку $D_0(\mathbf{E}(N)^{\frac{1}{a}}, \mathbf{E}\, N) > 0$ в силу предположения, то для s, близких к $\mathbf{E}\, N^{\frac{1}{a}}$, выполнено $D_0(s, \mathbf{E}\, N) > 0$.

Доказательство леммы 2. Возьмем $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$. Справедливо неравенство

$$X_{n+k} \geqslant \sum_{i=1}^{T_k} \mathbf{1}_{X_n^{(i)} \geqslant ak+1},$$

где $X_n^{(i)}, i \geqslant 1$, – независимые копии X_n, а T_k – случайная величина, равная количеству предков, при построении нашего дерева подсчета, на глубине k. Соответственно, из независимости и свойств математического ожидания, $\mathbf{E}\, T_k = (\mathbf{E}\, N)^k$. Значит

$$\mathbf{E}(X_{n+k}) \geqslant (\mathbf{E}\, N)^k \mathbf{P}(X_n \geqslant ak+1).$$

С другой стороны, так как $Q = 0$, то по (2) $\mathbf{E}(X_{n+k}) \leqslant \frac{a}{\mathbf{E}\, N-1}$ для любых $n \geqslant 0, k \geqslant 1$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(X_n \geqslant ak+1) \leqslant \frac{a}{(\mathbf{E}\, N)^k (\mathbf{E}\, N-1)}.$$

Просуммируем и получим желаемое:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n s^{X_n}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = k)\, ks^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big(ak+1 \\
&\qquad \geqslant X_n > a(k-1)+1\Big)\, (ak+1)\, s^{ak+1} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n \geqslant a(k-1)+1)\, (ak+1)\, s^{ak+1} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(\mathbf{E}\, N)^{k-1}(\mathbf{E}\, N-1)} (ak+1)\, s^{ak+1} \\
&= s\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(\mathbf{E}\, N)^{k-1}(\mathbf{E}\, N-1)}\, s^{ak+1}\right)' = C_{s,a,\mathbf{E}\, N} < \infty,
\end{aligned}$$

где $C_{s,a,\mathbf{E}\,N}$ – какая-то константа, зависящая от $s, \mathbf{E}\,N$ и от a.

Таким образом,
$$\mathbf{E}(X_n s^{X_n}) \leqslant C_{s,a,\mathbf{E}\,N}. \qquad \square$$

2.3. Доказательство второго пункта теоремы 1.

Определим последовательность функций D_n:
$$D_n(s) = (M-1)\,s\,F_n'(s) - aF_n(s).$$

Как и в разделе 3, сформулируем две леммы, которые будут доказаны ниже.

Лемма 3. *Для любого $s \geqslant 1 + \frac{M-1}{a}$ и любого $n \geqslant 0$ верно $D_{n+1}(s) \leqslant \frac{MG(F_n(s))}{F_n(s)s^a} D_n(s)$.*

Лемма 4. *При $s > 1$ выполнено:*
$$\mathbf{E}(X_n s^{X_n}) \geqslant \mathbf{E}(X_n)\,\mathbf{E}(s^{X_n}).$$

Из леммы 3 следует, что если $D_0(s_0) < 0$ при некотором $s_0 \geqslant 1 + \frac{M-1}{a}$, то и для любого $n > 0$ верно $D_n(s_0) < 0$.

Выразим D_n в терминах математического ожидания:
$$D_n(s) = (M-1)\,s\,F_n'(s) - aF_n(s) = (M-1)\,\mathbf{E}(X_n s^{X_n}) - a\,\mathbf{E}(s^{X_n}) \leqslant 0,$$
откуда
$$a\,\mathbf{E}(s^{X_n}) \geqslant (M-1)\,\mathbf{E}(X_n s^{X_n}).$$
По лемме 4 имеем:
$$a\,\mathbf{E}(s^{X_n}) \geqslant (M-1)\,\mathbf{E}(X_n)\,\mathbf{E}(s^{X_n}).$$
Получаем, что $\mathbf{E}(X_n) \leqslant \frac{a}{M-1}$, что означает, что $Q = 0$.

Доказательство леммы 3. Для $p = 0, 1, \ldots, a-1$ и $s \geqslant 1 + \frac{M-1}{a}$ докажем неравенство:
$$(a-p)(M-1) + a - as^{a-p} \leqslant 0.$$
Обозначим $y = a - p \geqslant 1$. Перепишем требуемое в виде
$$y(M-1) + a \leqslant as^y.$$
Воспользуемся неравенством Бернулли:
$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \ \text{для любого } n \in \mathbf{N}, x > 0.$$
Заметим, что $as^y = a(1 + (s-1))^y$.

По предположению, $y \geqslant 1, s \geqslant 1 + \frac{1}{a}$, то есть $s - 1 \geqslant \frac{M-1}{a} > 0$. Значит, можно применить неравенство Бернулли для $x = s-1$ и $n = y$. Получим:

$$(1 + (s-1))^y \geqslant 1 + (s-1)y \geqslant 1 + \frac{y(M-1)}{a}.$$

Таким образом,

$$as^y \geqslant a\left(1 + \frac{y(M-1)}{a}\right) = (M-1)y + a.$$

Докажем вспомогательное неравенство:

$$vG'(v) \leqslant MG(v), \qquad \text{то есть } F_n(s)\, G'(F_n(s)) \leqslant M\, G(F_n(s)).$$

Так как $\mathbf{E}\, N \leqslant M$, то $vG'(v) \leqslant \mathbf{E}(Nv^N) \leqslant \mathbf{E}\, N \mathbf{E} v^N \leqslant M \mathbf{E} v^N = M\, G(v)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} s(\mathbf{E}(N) - 1)F'_{n+1}(s) &- a\, F_{n+1}(s) \\ &\leqslant \frac{MG(F_n(s))}{F_n(s)\, s^a} \cdot (s(M-1)F'_n(s) - a\, F_n(s)) \\ &+ \sum_{p=0}^{a-1} G(F_n)^{(p)}(0) \cdot \frac{1}{p!} \cdot \frac{(a-p)(M-1) + a - as^{a-p}}{s^{a-p}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Все слагаемые из суммы неположительные, так как по доказанному в наших условиях $(a-p)(M-1) + a - as^{a-p} \leqslant 0$. Следовательно,

$$D_{n+1}(s) \leqslant \frac{MG(F_n(s))}{F_n(s)\, s^a} D_n(s). \qquad \square$$

Доказательство леммы 4. Пусть Y_1, Y_2 – независимые копии X_n. Заметим, что при $s \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$(Y_1 - Y_2)(s^{Y_1} - s^{Y_2}) \geqslant 0.$$

Отсюда:

$$\mathbf{E}\left[(Y_1 - Y_2)(s^{Y_1} - s^{Y_2})\right] \geqslant 0.$$

Но так как Y_1 и Y_2 независимы, то и Y_1 с s^{Y_2} тоже независимы. Раскрывая скобки, получаем:

$$\mathbf{E}\,(Y_1 s^{Y_1}) + \mathbf{E}\,(Y_2 s^{Y_2}) - \mathbf{E}\, Y_1\, \mathbf{E}\, s^{Y_2} - \mathbf{E}\, Y_2\, \mathbf{E}\, s^{Y_1} \geqslant 0.$$

Так как Y_1, Y_2 – независимые копии X_n, то

$$2\mathbf{E}\,(X_n s^{X_n}) - 2\mathbf{E}\, X_n\, \mathbf{E}\, s^{X_n} \geqslant 0,$$

$$\mathbf{E}\,(X_n s^{X_n}) - \mathbf{E}\,X_n\,\mathbf{E}\,s^{X_n} \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. □

Авторы признательны М. А. Лифшицу за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы

1. P. Collet, J. P. Eckmann, V. Glaser, A. Martin, *Study of the iterations of a mapping associated to a spin-glass model.* — Commun. Math. Phys. **94** (1984), 353–370.
2. X. Chen, B. Hu Y. Derrida, M. Lifshits, Z. Shi, *A hierarchical renormalization model: some properties and open questions.* — In: Sojourns in Probability Theory and Statistical Physics. III. Interacting Particle Systems and Random Walks, A Festschrift for Ch. M. Newman. Ser.: Springer Proc. Math. & Statist., V. Sidoravičius (Ed.), pp. 166–186, Springer, 2019.
3. B. Derrida, M. Retaux, *The depinning transition in presence of disorder: a toy model.* — J. Statist. Phys. **156** (2014), 268–290.
4. B. Derrida, V. Hakim, J. Vannimenus, *Effect of disorder on two-dimensional wetting.* — J. Statist. Phys. **66** (1992), 1189–1213.
5. G. Giacomin, H. Lacoin, F. L. Toninelli, *Hierarchical pinning models, quadratic maps and quenched disorder.* — Probab. Theory Relat. Fields **147** (2010), 185–216.
6. Y. Hu, Z. Shi, *The free energy in the Derrida–Retaux recursive model.* — J. Statist. Phys. **172** (2018), 718–741.
7. H. Lacoin, *Hierarchical pinning model with site disorder: disorder is marginally relevant.* — Probab. Theory Relat. Fields **148** (2010), 159–175.

Kotova A. A., Lotnikov A. S. Criticality conditions in the Derrida–Retaux model with a random number of terms.

The article considers the Derrida–Retaux model with a random number of terms, i.e. a sequence of integer random variables defined by the relations $X_{n+1} = (X_n^{(1)} + \cdots + X_n^{(N_n)} - a)^+$, $n \geqslant 0$, where $X_n^{(j)}$ are independent copies of X_n, the values of N_j are independent and identically distributed, a is a positive integer. The energy in the model is defined as $Q := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}\,(X_n)}{(\mathbf{E}\;N_1)^n}$. We present sufficient conditions (in terms of distributions of X_0 and N_1) for subcritical ($Q = 0$) and supercritical ($Q > 0$) regimes of model behavior.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9, 191023,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Kotann2710@mail.ru
E-mail: alex.lotnikov@gmail.com

Поступило 17 октября 2024 г.