Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

М. С. Ермаков

О КРИТЕРИЯХ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ СЛОЖНЫХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§1. **Введение**

Задачи непараметрической проверки гипотез [2, 10, 12, 14, 15] занимают видное место в математической статистике. Однако какое-то окончательное заключение, как ведут себя непараметрические критерии, получено только при справедливости гипотез. Задача описания непараметрических множеств альтернатив, которые различаются традиционными непараметрическими критериями, изучалась до последнего времени только для множеств гладких альтернатив [11].

В работах [7, 8, 9] было дано исчерпывающее описание равномерно состоятельных множеств альтернатив для наиболее распространенных непараметрических критериев согласия. Равномерная состоятельность множеств альтернатив описывалась в терминах метода расстояний, когда множества альтернатив задавались в терминах функций распределения.

Тестовые статистики порождаются некоторыми функционалами, заданными на множестве функций распределения. В [7, 8, 9] было показано, что последовательность множеств альтернатив равномерно состоятельна тогда и только тогда, когда значения порождающих тестовые статистики функционалов на этих множествах альтернатив отделены от нуля некоторыми константами. Когда множества альтернатив задаются в терминах плотностей распределения, было показано. что эти множества равномерно состоятельны, если и только если простые альтернативы, принадлежащие этим множествам, допускают представление в виде суммы гладких функций, принадлежащих определенным телам в пространствах Бесова, и “быстро осциллирующих функций”. Критерии типа Неймана [1, 15] рассматривались в [8] для

Ключевые слова: критерий Неймана, равномерная состоятельность, непараметрические альтернативы, наибольшие множества.

Исследование было поддержано Министерством нвуки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500008-1) .

задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме. В [9] результаты для критериев типа Неймана были перенесены на задачу проверки гипотезы о функции распределения и плотности распределения.

В [4] для задачи проверки гипотез симметрии, однородности и независимости было показано, что заданные определенным образом критерии типа Неймана являются асимптотически минимаксными, когда множество альтернатив является шаром в пространстве Соболева и из него удаляется шар "малого радиуса" в $\mathbb{L}_2$. Радиус "малого шара" стремится к нулю определенным образом с ростом объема выборки. Возникающая тестовая статистика не зависит от плотности распределения гипотезы, если она удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma > 1/2$.

Таким образом возникает естественная задача переноса результатов работы [4] на случай более широких множеств альтернатив, исследуемых в [7, 8, 9], и получения для них результатов, аналогичных результатам этих работ. Это и является целью настоящей публикации.

Как уже говорилось, результаты работы допускают интерпретацию в рамках метода расстояний. Приведем такую постановку задачи в случае гипотезы однородности. Пусть даны две выборки независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$, имеющие соответственно вероятностные меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, заданные на σ-алгебре борелевских множеств на интервале $[0,1]$. Обозначим $\widehat{\mathbf{P}}_n$ и $\widehat{\mathbf{Q}}_m$ соответственно их эмпирические меры.

Обозначим $\mathfrak{P}$ множество всех мер, заданных на σ-алгебре борелевских множеств на интервале $[0,1]$. Определим подмножество $\mathfrak{P}_1$ всех вероятностных мер в $\mathfrak{P}$.

Зададим множества $\Lambda = \{R : R = G_1 - G_2,\ \ G_1, G_2 \in \mathfrak{P}\}$ и $\Lambda_1 = \{R : R = P - Q,\ \ P, Q \in \mathfrak{P}_1\}$.

Пусть $T_{nm}(\mathbf{R})$ – последовательность норм или полунорм, заданных на линейном пространстве Λ. Нас интересует задача проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0\ :\ \mathbf{P} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} \in \mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}_1$$

против альтернатив

$$\mathbb{H}_1\ :\ T_{nm}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) > \rho_{nm} > 0,\ \ \mathbf{P} - \mathbf{Q} \in \Lambda_{2mn} \subset \Lambda_1, \quad \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \in \mathfrak{P}_2,$$

где $\rho_{nm} \to 0$ при $n, m \to \infty$. Здесь $\mathfrak{P}_2$ – некоторое достаточно широкое непараметрическое подмножество $\mathfrak{P}$, определяемое в постановке задачи, и Λ_{2mn} – некоторые достаточно широкие непараметрические подмножества Λ.

В качестве тестовой статистики берется $T_{nm}(\widehat{\mathbf{P}}_n - \widehat{\mathbf{Q}}_m)$.

Наша задача состоит в том чтобы показать, что для для критериев типа Неймана равномерно состоятельными можно взять очень широкие множества $\mathfrak{P}_2$ и Λ_{2mn}. В частности окажется, что в качестве множеств $\mathfrak{P}_2$ можно взять вероятностные меры, имеющие плотности относительно меры Лебега, удовлетворяющие условию Гёльдера порядка больше $1/2$, а в качестве Λ_{2mn} – заряды, имеющие плотности, удовлетворяющие довольно слабым условиям убывания своих коэффициентов Фурье.

Работа организована следующим образом. В §2 дается описание равномерно состоятельных множеств альтернатив, заданных в терминах функций распределения. Показывается, что для равномерной состоятельности расстояние до гипотезы множеств альтернатив должно стремиться к нулю определенным образом с ростом объема выборки. Это расстояние задается функционалом, порождающим тестовую статистику. В §3 указываются условия равномерной состоятельности множеств альтернатив, заданных в терминах плотностей распределения. В §4 приведены доказательства теорем.

Введем ряд обозначений. Обозначим через $\mathbb{L}_2$ множество всех измеримых функций $f\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}^1$, таких что

$$\|f\|^2 \doteq \int\limits_0^1 f^2\,d\,x < \infty.$$

Определим ортонормированную систему функций

$$\phi_j(x) = \exp\{2\pi i j x\}, \quad x\in[0,1], \quad j = 0,\pm1,\pm2,\dots.$$

Здесь i – мнимая единица. Для всякого комплексного числа $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ будем обозначать $\bar\theta = \theta_1 - i\theta_2$–комплексно сопряженное.

Для любой функции $g\in\mathbb{L}_2$ обозначим

$$g_j = (g)_j = \int\limits_0^1 g(x)\phi_j(x)\,d\,x, \quad j = 0,\pm1,\pm2,\dots,$$

и

$$g_{jj_1} = (g)_{jj_1} = \int\limits_0^1 g(x)\phi_j(x)\,\phi_{j_1}(x)\,d\,x, \quad j, j_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Мы будем использовать буквы c и C, а также эти буквы с различными индексами для обозначения различных положительных постоянных. Обозначим через $\chi(A)$ индикатор события A, а через $[a]$ – целую часть вещественного числа a. Для любых двух последовательностей чисел a_n и b_n, $a_n = o(b_n)$ означает, что $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $a_n = O(b_n)$ означает, что найдется такое C, что $a_n/b_n < C$ для всех n.

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

функцию стандартного нормального распределения.

§2. Основные результаты о равномерной состоятельности в терминах метода расстояний

Сначала мы приведем все три постановки задачи проверки гипотез симметрии, однородности и независимости. После этого для них будет сформулирован общий результат.

2.1. Гипотеза о симметрии. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения на интервале $[0.1]$, и имеющих плотность распределения

$$\begin{aligned} f(x, \boldsymbol{\theta}) &= p(x) + 2^{1/2} q(x) \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \sin(2\pi j x) \\ &= p(x) - 2^{-1/2}\, i\, q(x) \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j (\phi_j(x) - \bar{\phi}_j(x)), \end{aligned}$$

относительно меры Лебега. Здесь $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\theta_j \in \mathbb{R}^1$, и функции $p(x)$, $q(x)$ –положительные, четные относительно точки $1/2$, то есть $p(x) = p(1-x) > 0$ и $q(x) = q(1-x) > 0$ для $x \in [0,1]$. Также имеет место $\int\limits_0^1 p(x)\,d\,x = 1$.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что функции $p(x)$, $q(x)$ и функции $p(x)$, $q(x)$ с индексами удовлетворяют условию Гёльдера порядка больше $1/2$, то есть $p \in \Omega(C,\gamma)$, $\gamma > 1/2$, и $q \in \Omega(C_1,\gamma_1)$, $\gamma_1 > 1/2$, где

$$\Omega(C,\gamma) = \{g : |g(x) - g(y)| < C|x-y|^{\gamma},\ x,y \in [0.1],\ g(0) = g(1)\}.$$

Отметим, что поскольку функции p и q положительны и непрерывны на $[0,1]$, то они отделены от нуля на $[0,1]$ положительной постоянной.

Обозначим $F_{\boldsymbol{\theta}}$ функцию распределения плотности $f(x,\boldsymbol{\theta})$.

Определим вектор $X^{(n)} = (X_1,\dots,X_n)^T$, где T обозначает знак транспонирования.

Мы проверяем гипотезу

$$\mathbb{H}_0\ :\ \theta_j = 0,\ \ p \in \Omega(C,\gamma), \quad 1 \leqslant j < \infty.$$

Если хотя бы одно из значений параметра θ_j, $1 \leqslant j < \infty$, будет отлично от нуля, то плотность распределения f не будет симметричной относительно точки $1/2$.

Множество альтернатив порождается тестовой статистикой

$$T_n(\widehat{F}_n) = T_{1n}(\widehat{F}_n) - R_n(\widehat{F}_n),$$

где

$$\begin{aligned} T_{1n}(\widehat{F}_n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{n,j}^2 \psi_j^2(X^{(n)}),\\ R_n(\widehat{F}_n) &= 2\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{n,j}^2 \sum_{s=1}^{n} \sin^2(2\pi j X_s)\, q^{-2}(X_s),\\ \psi_j(X^{(n)}) &= 2^{1/2}\sum_{s=1}^{n} \sin(2\pi j X_s)\, q^{-1}(X_s). \end{aligned}$$

Здесь $\kappa_{n,j}^2$, $1 \leqslant j < \infty$, – заданные постоянные.

В дальнейшем, для простоты символики, условимся опускать запятые между индексами там, где это не вызывает неоднозначности. Так, например, вместо $\kappa_{n,j}$ мы будем писать κ_{nj}.

Как мы покажем в дальнейшем,

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} T_n(\widehat{F}_n) = T_{2n}(\boldsymbol{\theta}) + o(T_{2n}(\boldsymbol{\theta})),$$

где

$$T_{2n}(\boldsymbol{\theta}) = n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2$$
$$= 2n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \Big(\int\limits_0^1 \sin(2\pi j x)\, q^{-1}(x)\, d\,F_{\boldsymbol{\theta}}(x) \Big)^2.$$

Коэффициенты κ_{nj}^2 стремятся к нулю при $j \to \infty$. Поэтому коэффициенты θ_j при очень больших j вносят малый вклад в значение функционала $T_{2n}(\boldsymbol{\theta})$ и обычно имеется априорная информация, что они малы. Мы введем такую априорную информацию в следующем виде. Найдутся такие C_1 и C_2, что

$$\boldsymbol{\theta} \in \Upsilon_n(C_1, C_2) = \Big\{ \boldsymbol{\theta} : \|\boldsymbol{\theta}\| < C_1, \quad \sum_{j=k_n}^{\infty} |\theta_{nj}|^2 \leqslant C_2 \sum_{j=1}^{k_n} |\theta_{nj}|^2 \Big\}, \tag{2.1}$$

где числа k_n, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$, будут определены в ограничениях на коэффициенты κ_{nj} статистики T_n.

Таким образом мы проверяем гипотезу против альтернатив

$$\mathbb{H}_n : \boldsymbol{\theta} \in \Psi_n(a, C_1, C_2), \quad a > 0,$$

где

$$\Psi_n(a, C_1, C_2) = \{ \boldsymbol{\theta} : T_{2n}(\boldsymbol{\theta}) > a, \boldsymbol{\theta} \in \Upsilon_n(C_1, C_2), p \in \Omega(\gamma, C) \}. \tag{2.2}$$

Введем условия.

K1. Существуют такие C_1 и C_2, что для любого n выполнено

$$C_1 < A_n \doteq n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^4 < C_2.$$

Зададим k_n уравнением

$$k_n = \sup \Big\{ k : \sum_{j=1}^{k} \kappa_{nj}^2 < \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \Big\}.$$

K2. Имеет место

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \; n^2 \sum_{j=1}^{[\delta k_n]} \kappa_{nj}^4 = 0.$$

K3. Для любого C выполнено

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to 0}\frac{2\delta k_n \sup_{(C-\delta)k_n<j<(C+\delta)k_n}|\kappa_{nj}^2-\kappa_{n,[Ck_n]}^2|}{\sum_{j=[(C-\delta)k_n]}^{[(C+\delta)k_n]}\kappa_{nj}^2}=0.$$

K4. Найдутся такие C и $\lambda>1$, что для любого $\delta>0$ коэффициенты κ_{nj}^2 убывают следующим образом

$$\sup_{j>(1+\delta)k_n}\kappa_{nj}^2<C(1+\delta)^{-\lambda}\kappa_n^2,$$

где $\kappa_n^2=\sup_j\kappa_{nj}^2$.

K5. Имеет место $k_n=o(n^{2/3})$ при $n\to\infty$.

Определим критерии

$$L_n=\chi(T_n(\widehat{F}_n)>x_\alpha(2A_nV_n(X^{(n)}))^{1/2}),$$

где $0<\alpha<1$ и x_α, здесь и в дальнейшем, задается уравнением $\alpha=1-\Phi(x_\alpha)$.

Статистика V_n является состоятельной оценкой $\|p(x)q^{-2}(x)\|^2$. Например, в качестве такой статистики можно взять

$$V_n(X^{(n)})=\sum_{j=1}^{l_n}\xi_{nj}^2(X^{(n)}),$$

где

$$\xi_{nj}(X^{(n)})=2^{1/2}n^{-1}\sum_{s=1}^{n}\cos(2\pi jX_s)q^{-2}(X_s)$$

и $l_n=o(n^{1/2})$.

Как мы покажем, для вероятности ошибки первого рода $\alpha(L_n,p)=\mathbf{E}_0L_n$ критерия L_n имеет место $\alpha(L_n,p)=\alpha+o(1)$ при $n\to\infty$.

2.2. Критерии однородности. Мы наблюдаем реализации независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1,\dots,X_n$ и $Y_1,\dots,Y_m$, $m=m(n)$, имеющих соответственно плотности распределения

$$f_{1n}(x,\boldsymbol{\theta})=p(x)+\sum_{j=1}^{\infty}(\theta_j(\phi_j(x)\,q(x)-q_j)+\bar\theta_j(\bar\phi_j(x)\,q(x)-\bar q_j)),$$

и

$$f_{2m}(y,\boldsymbol{\theta}) = p(y) - \sum_{j=1}^{\infty}(\theta_j(\phi_j(y)\,q(y) - q_j) + \bar{\theta}_j(\bar{\phi}_j(y)\,q(y) - \bar{q}_j))$$

относительно меры Лебега для $x \in [0,1]$ и $y \in [0,1]$ соответственно.

Параметры θ_j здесь и в гипотезе независимости принимают комплексные значения.

Известно, что p является плотностью распределения и положительные функции p и q принадлежат $\Omega(\gamma, C)$, $\gamma > 1/2$.

Мы будем предполагать, что $c < \frac{m(n)}{n} < C$ для некоторых положительных постоянных c и C.

Определим вектор $Y^{(m)} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$

Стоит задача проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0\,:\,\theta_j = 0, \quad 1 \leqslant j < \infty, \quad p_1, p_2 \in \Omega(\gamma, C),$$

против непараметрического множества альтернатив

$$\mathbb{H}_n\,:\,\boldsymbol{\theta} \in \Psi_n(a, C_1, C_2),$$

где

$$\Psi_n(a, C_1, C_2) \doteq \Big\{\boldsymbol{\theta}\,:\,T_{2nm}(\boldsymbol{\theta}) > a,\, \boldsymbol{\theta} \in \Upsilon_n(C_1, C_2),\ p_1, p_2 \in \Omega(\gamma, C)\Big\}$$

а функционал $T_{2nm}(\boldsymbol{\theta})$, порождающий множество альтернатив, имеет вид

$$\begin{aligned} T_{2nm}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n^2m^2}{(n+m)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{nj}^2|\theta_j|^2 \\ &= \frac{n^2m^2}{(4n+4m)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{nj}^2\Big(\int_0^1(\phi_j+\bar{\phi}_j)q^{-1}\,d\,F_{1n} - \int_0^1(\phi_j+\bar{\phi}_j)q^{-1}\,d\,F_{2m}\Big)^2, \end{aligned}$$

где F_{1n} и F_{2m} – функции распределения случайных величин X_1 и Y_1 соответственно.

Предположим, что весовые коэффициенты κ_{nj}^2, $1 \leqslant j < \infty$, задающие тестовую статистику, удовлетворяют тем же условиям **K1**–**K5**, что и в случае гипотезы симметрии.

Определим статистики

$$\psi_{nj}(X^{(n)},Y^{(m)}) = n^{-1}\sum_{s=1}^{n}\phi_j(X_s)q^{-1}(X_s) - m^{-1}\sum_{s=1}^{m}\phi_j(Y_s)q^{-1}(Y_s),$$

$$T_{1nm}(X^{(n)},Y^{(m)}) = \frac{m^2n^2}{(m+n)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{nj}^2|\psi_{nj}(X^{(n)},Y^{(m)})|^2,$$

$$R_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)}) = \frac{m^2n^2}{(n+m)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{nj}^2\Big(n^{-2}\sum_{s=1}^{n}q^{-2}(X_s)+m^{-2}\sum_{s=1}^{m}q^{-2}(Y_s)\Big).$$

Зададим статистику

$$T_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)}) = T_{1nm}(X^{(n)},Y^{(m)}) - R_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)}).$$

Рассуждая аналогично [3, 4], можно показать, что при $n\to\infty$

$$\mathbf{E}_\theta[T_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)})] = T_{2nm}(\boldsymbol{\theta}) + o(T_{2nm}(\boldsymbol{\theta})).$$

Положим

$$A_{nm} = \frac{16m^2n^2}{(m+n)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_{nj}^4.$$

Зададим критерии

$$L_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)}) = \chi(T_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)}) > x_\alpha(A_{nm}V_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)})/8)^{1/2}),$$

где $0<\alpha<1$, а $V_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)})$ – состоятельная оценка $\|pq^{-2}\|^2$. В качестве $V_{nm}(X^{(n)},Y^{(m)})$ можно взять, например,

$$(m+n)^{-2}\sum_{j=1}^{l_n}\Big(\sum_{s=1}^{n}(\phi_j(X_s)+\bar\phi_j(X_s))\,q^{-2}(X_s)+\sum_{s=1}^{m}(\phi_j(Y_s)+\bar\phi_j(Y_s))\,q^{-2}(Y_s)\Big)^2,$$

где $l_n = o(n^{1/2})$.

2.3. Проверка гипотезы независимости. Пусть $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ – выборка независимых одинаково распределенных векторов на $[0,1]^2$, имеющих неизвестную плотность распределения

$$\begin{aligned} f(x,y,\boldsymbol{\theta}) = p(x,y) + \sum_{r,j=1}^{\infty}&(\theta_{rj}(\phi_r(x)\phi_j(y)+\bar\phi_r(x)\bar\phi_j(y)) \\ &+\bar\theta_{rj}(\phi_r(x)\bar\phi_j(y)+\bar\phi_r(x)\phi_j(y))) \end{aligned}$$

относительно меры Лебега, $x, y \in [0.1]$. Здесь $p(x,y) = p_1(x)p_2(y) > 0$ и $p_1, p_2 \in \Omega(\gamma, C)$, $\gamma > 1/2$, $\int\limits_0^1 p_l(t)dt = 1$, $l = 1, 2$.

Мы проверяем гипотезу

$$\mathbb{H}_0 \,:\, \theta_{rj} = 0, \quad 1 \leqslant r, j < \infty.$$

Предположим, что у нас есть априорная информация о параметре, что при некоторых постоянных C_1 и C_2

$$\boldsymbol{\theta} \in \Upsilon_n(C_1, C_2) = \Big\{ \boldsymbol{\theta} \,:\, \|\boldsymbol{\theta}\|^2 = \sum_{r,j=1}^{\infty} |\theta_{rj}|^2 < C_1,$$

$$\|\boldsymbol{\theta}\|^2 - \sum_{r,j=1}^{k_n} |\theta_{rj}|^2 \leqslant C_2 \sum_{r,j=1}^{k_n} |\theta_{rj}|^2 \Big\}.$$

где числа k_n заданы равенством

$$k_n = \sup\Big\{ k \,:\, \sum_{r,j=1}^{k} \kappa_{nrj}^2 < \frac{1}{2} \sum_{r,j=1}^{\infty} \kappa_{nrj}^2 \Big\}.$$

Гипотеза проверяется против альтернатив

$$\mathbb{H}_n \,:\, \boldsymbol{\theta} \in \Psi_n(a, C_1, C_2),$$

где

$$\Psi_n(a, C_1, C_2) = \{ \boldsymbol{\theta} \,:\, T_{2n}(\boldsymbol{\theta}) > a > 0,\, \boldsymbol{\theta} \in \Upsilon_n(C_1, C_2),\, p_1, p_2 \in \Omega(\gamma, C) \}$$

и

$$T_{2n}(\boldsymbol{\theta}) \doteq \sum_{r,j=1}^{\infty} \kappa_{nrj}^2 |\theta_{rj}|^2.$$

Коэффициенты κ_{nrj}^2 удовлетворяют следующим условиям.

C1. Существуют такие C_1 и C_2, что для любого n выполнены следующие неравенства

$$C_1 < A_n \doteq n^2 \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nrj}^4 < C_2.$$

C2. Имеет место

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} n^2 \sum_{r=1}^{[\delta k_n]} \sum_{j=1}^{[\delta k_n]} \kappa_{nrj}^4 = 0.$$

C3. Для любых C_1 и C_2 выполнено

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\sup_{C_1k_n<r<(C_1+\delta)k_n, C_2k_n<j<(C_2+\delta)k_n}\kappa^2_{nrj}-\kappa^2_{n,[C_1k_n],[C_2k_n]}}{\delta^{-2}k_n^{-2}\sum_{r=[C_1k_n]}^{[(C_1+\delta)k_n]}\sum_{j=[C_2k_n]}^{[(C_2+\delta)k_n]}\kappa^2_{nrj}}=0.$$

C4. Найдутся такие C и $\lambda_1>1$, $\lambda_2>1$, что для любых r,j справедливо

$$\kappa^2_{nrj}<Cr^{-\lambda_1}j^{-\lambda_2}\sup_{r,j}\kappa^2_{nrj},$$

C5. Имеет место $k_n=o(n^{2/3})$ при $n\to\infty$.

Определим статистики

$$\psi_{rj}(X^{(n)},Y^{(n)})=n^{-1}\sum_{s=1}^{n}\phi_r(X_s)\phi_j(Y_s)-n^{-2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\phi_r(X_s)\phi_j(Y_t),$$

$$T_{1n}(X^{(n)},Y^{(n)})=\sum_{r,j=1}^{\infty}\kappa^2_{nrj}|\psi_{rj}(X^{(n)},Y^{(n)})|^2,$$

$$R_n(X^{(n)},Y^{(n)})=\sum_{r,j=1}^{\infty}\kappa^2_{rj}\sum_{s=1}^{n}\Big|\phi_r(X_s)-n^{-1}\sum_{t=1}^{\infty}\phi_r(X_t)\Big|^2 \times\Big|\phi_j(Y_s)-n^{-1}\sum_{t=1}^{\infty}\phi_j(Y_t)\Big|^2.$$

Зададим статистику

$$T_n(X^{(n)},Y^{(n)})=T_{1n}(X^{(n)},Y^{(n)})-R_n(X^{(n)},Y^{(n)})$$

Определим критерии

$$L_n=\chi\big(T_n(X^{(n)},Y^{(n)})>x_\alpha(2A_nV_n(X^{(n)},Y^{(n)}))^{1/2}\big),$$

где $0<\alpha<1$, а $V_n(X^{(n)},Y^{(n)})$ – произвольная состоятельная оценка $\|p_1\|^2\|p_2\|^2$.

2.4. Основной результат. Поскольку утверждения для всех трех постановок задач аналогичны, они даны в одной теореме 2.1, которую надо просто применить к соответствующей постановке задачи. При этом индекс n в случае проверки гипотезы об однородности нужно заменить на два индекса n и m.

Зафиксируем в дальнейшем произвольную плотность p из множества плотностей гипотезы. Для критерия K_n обозначим $\alpha(K_n,p)=\mathbf{E}_0K_n$ – вероятность ошибки первого рода критерия K_n и $\beta(K_n,p,\boldsymbol{\theta})=$

$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}}(1 - K_n)$– его вероятность ошибки второго рода при альтернативе $\boldsymbol{\theta} \in \Upsilon_n(C_1, C_2)$.

Для множества альтернатив $\Theta_n \subset \Upsilon_n(C_1, C_2)$ обозначим

$$\beta(K_n, p, \Theta_m) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_n} \beta(K_n, p, \boldsymbol{\theta}).$$

Скажем, что последовательность множеств $\Theta_n \subset \Upsilon_n(C_1, C_2)$ альтернатив является равномерно состоятельной для последовательности критериев K_n, $\alpha(K_n, p) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, если

$$\limsup_{n \to \infty} \beta(K_n, p, \Theta_n) < 1 - \alpha.$$

Скажем, что последовательность критериев M_n, $\alpha(M_n, p) = \alpha(1+o(1))$, $0 < \alpha < 1$, асимптотически минимаксна, если для любой последовательности критериев K_n, $\alpha(K_n, p) \leqslant \alpha(M_n, p)$, имеет место

$$\limsup_{n \to \infty}(\beta(K_n, p, \Psi_n(a, C_1, C_2)) - \beta(M_n, p, \Psi_n(a, C_1, C_2))) \geqslant 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия, приведенные выше. Тогда последовательность критериев L_n асимптотически минимаксна при любом $p \in \Omega(\gamma, C)$ ($p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$, $p_1, p_2 \in \Omega(\gamma, C)$ для гипотезы независимости).*

При этом $\alpha(L_n, p) = \alpha(1 + o(1))$ и

$$\beta(K_n, p, \Psi_n(a, C_1, C_2)) = \Phi(x_\alpha - \|pq^{-2}\|^{-1}(A_n/2)^{1/2}) + o(1) \qquad (2.3)$$

при $n \to \infty$.

Равномерно по всем последовательностям $\boldsymbol{\theta}_n \in \Psi_n(a, C_1, C_2)$ имеет место

$$\beta(L_n, p, \boldsymbol{\theta}_n) = \Phi(x_\alpha - \|pq^{-2}\|^{-1} T_{2n}(\boldsymbol{\theta}_n)(2A_n)^{-1/2}) + o(1) \qquad (2.4)$$

при $n \to \infty$.

В случае гипотезы однородности функционал T_{2n} в (2.4) заменяется на T_{2nm}.

Из теоремы 2.1 следует, что последовательность множеств альтернатив $\Theta_n \subset \Upsilon_n(C_1, C_2)$ равномерно состоятельна тогда и только тогда, когда найдется такое $a > 0$, что $\Theta_n \subset \Psi_n(a, C_1, C_2)$.

§3. Условия состоятельности альтернатив, заданных в терминах плотностей распределения

Обозначим $g(x,\boldsymbol{\theta}) = f(x,\boldsymbol{\theta}) - p(x)$. Плотность распределения $p \in \Omega(\gamma, C)$ является по существу мешающим параметром.

Нас будет интересовать задача проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0 \,:\, g(x,\boldsymbol{\theta}) \equiv 0,$$

когда последовательностями альтернатив является последовательность простых альтернатив

$$\mathbb{H}_n \,:\, g = g(x,\boldsymbol{\theta}_n), \quad cn^{-r} < \|g_n(x,\boldsymbol{\theta}_n)\| < Cn^{-r},\ 1/3 < r < 1/2,$$

где $\boldsymbol{\theta}_n \in \Upsilon(C_1, C_2)$.

Последовательность простых альтернатив $\boldsymbol{\theta}_n \in \Upsilon_n(C_1, C_2)$ состоятельна для последовательности критериев K_n, $\alpha(K_n, p) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, если

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(K_n, p, \boldsymbol{\theta}_n) < 1 - \alpha.$$

Ясно, что если стоит задача проверки гипотезы $\mathbb{H}_0$ против последовательности множеств альтернатив Θ_n, сближающихся с гипотезой, и нужно показать равномерную состоятельность множеств альтернатив Θ_n, то достаточно показать состоятельность всех последовательностей простых альтернатив $\boldsymbol{\theta}_n \in \Theta_n$. Таким образом, описав состоятельные последовательности простых альтернатив, мы получаем описание равномерно состоятельных непараметрических множеств альтернатив, сближающихся с гипотезой.

Описание состоятельных последовательностей простых альтернатив базируется на построении наибольших множеств. Для данной последовательности критериев наибольшее множество – это, грубо говоря, наибольшее ограниченное выпуклое центральносимметричное множество U, такое что последовательность множеств альтернатив

$$V_n = \{\, g \,:\, \|g\| > n^{-r},\ g \in U \,\}$$

равномерно состоятельна.

3.1. Определение наибольших множеств. Пусть $\Xi \subset \mathbb{L}_2(0,1)$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_\Xi$. Пусть $U = \{g \,:\, \|g\|_\Xi < P_0,\ g \in \Xi\}$ – шар в Ξ с центром в нуле. Мы будем предполагать, что множество U компактно в $\mathbb{L}_2(0,1)$. Для дальнейшего нам придется использовать подпространства Π_i, $1 \leqslant i < \infty$, порождающие поперечники по Колмогорову множества U. Приведем их определение по индукции (см. [7, 9]).

Обозначим $d_1 = \max\{\, \|g\|,\, g \in U\}$. Пусть $e_1 \in U$ таково, что $\|e_1\| = d_1$. Определим подпространство Π_1, порожденное вектором e_1.

Пусть мы построили подпространства $\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}$. Построим подпространство Π_i. Для этого для любого вектора $g \in \mathbb{L}_2(0,1)$ обозначим $\rho(g, \Pi_{i-1}) = \inf\{\|g - h\|\,,\, h \in \Pi_{i-1}\}$.

Обозначим $d_i = \max\{\, \rho(g, \Pi_{i-1}),\, g \in U\,\}$. Пусть вектор $e_i \in U$ таков, что $d_i = \rho(e_i, \Pi_{i-1})$. Обозначим через Π_i подпространство, порожденное вектором e_i и векторами подпространства Π_{i-1}.

Для $g \in \mathbb{L}_2(0,1)$ обозначим g_{Π_i} проекцию g на Π_i и положим $\tilde{g}_i = g - g_{\Pi_i}$.

Скажем, что множество U является наибольшим множеством для последовательности тестовых статистик T_n и функциональное пространство Ξ является наибольшим функциональным пространством, если

i. любая подпоследовательность простых альтернатив $g_{n_j} \in U$, $cn_j^{-r} < \|g_{n_j}\| < Cn_j^{-r}$, $n_j \to \infty$ при $j \to \infty$, является состоятельной,

ii. для любого $g \in \mathbb{L}_2(0,1)$, $g \notin \Xi$, найдутся последовательности i_n, j_{i_n}, $i_n \to \infty$, $j_{i_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, такие что $cj_{i_n}^{-r} < \|\tilde{g}_{i_n}\| < Cj_{i_n}^{-r}$ и подпоследовательность простых альтернатив $\tilde{g}_{i_n}$ несостоятельна для подпоследовательности выборок $X_1, \dots, X_{j_{i_n}}$.

Условие *ii* проверяется только для тех функций g_i, для которых $p + \tilde{g}_i$ являются плотностями распределения для всех $i > i_0$.

Для проверки гипотезы о независимости в условии *ii* вместо подпоследовательности выборок $X_1, \dots, X_{j_{i_n}}$ берется подпоследовательность $(X_1, Y_1) \dots, (X_{j_{i_n}}, Y_{j_{i_n}})$.

Отметим, что если $g \in \Xi$, то $\tilde{g}_{i_n} \in \Xi$.

3.2. Структура состоятельных последовательностей простых альтернатив. Мы покажем, что наибольшими множествами являются в случае гипотез симметрии множества

$$\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0) = \Big\{ g : g(x) = -2^{-1/2}\, i\, q(x) \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j (\phi_j(x) - \bar{\phi}_j(x))), \\ \sup_{\lambda > 0} \lambda^{2s} \sum_{j > \lambda} \theta_j^2 \leqslant P_0 \ \Big\}$$

и для однородности множества

$$\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0) = \Big\{ g : g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\theta_j(\phi_j(x)q(x) - q_j) + \bar\theta_j(\bar\phi_j(x)q(x) - \bar q_j)),$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^{2s} \sum_{j>\lambda} |\theta_j|^2 \leqslant P_0 \Big\},$$

а в случае проверки гипотезы независимости такими множествами являются при $d = 2$ множества

$$\mathbb{B}^{sd}_{2\infty}(P_0) = \Big\{ g : g = \sum_{r,j=1}^{\infty} (\theta_{rj}(\phi_r(x)\phi_j(y) + \bar\phi_r(x)\bar\phi_j(y))$$

$$+\bar\theta_{rj}(\phi_r(x)\bar\phi_j(y) + \bar\phi_r(x)\phi_j(y))), \quad \sup_{\lambda>0} \lambda^{2sd} \sum_{r^2+j^2>\lambda^2} |\theta_{rj}|^2 \leqslant P_0 \Big\}.$$

Для проверки гипотез симметрии и однородности утверждения теорем полностью совпадают с теоремами 2–5 в [9] и их аналогами в [7] за исключением того, что надо заменить условие **B** на следующие его аналоги:

B. Существует c_0, такое что для всех $c > c_0$ являются плотностями распределения функции

$$p(x) + g_{cn}(x, \boldsymbol\theta) = p(x) + 2^{-1/2} q(x)\, i \sum_{j>ck_n} \theta_j(\phi_j(x) - \bar\phi_j(x)))$$

и $p(x) + g_n(x, \boldsymbol\theta) - g_{cn}(x, \boldsymbol\theta)$

для гипотезы симметрии, а для гипотезы однородности

B. Существует c_0, такое что для всех $c > c_0$ являются плотностями распределения функции

$$p(x) \pm g_{cn} = p(x) \pm q(x) \sum_{|j|>ck_n} (\theta_j(\phi_j(x)q(x) - q_j) + \bar\theta_j(\bar\phi_j(x)q(x) - \bar q_j))$$

и $p(x) \pm (g_n(x) - g_{cn}(x))$.

Доказательства этих утверждений также по существу совпадают с доказательствами в [7] и опускаются.

Приведем соответствующие утверждения для гипотезы независимости.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* **C1**–**C5**. *Последовательность простых альтернатив* $f_n(x, y, \boldsymbol\theta_n) = p(x, y) + g_n(x, y.\boldsymbol\theta_n)$,

$cn^{-r} \leqslant \|g_n\| \leqslant Cn^{-r}$, состоятельна, если и только если найдутся c_1, c_2 и n_0, такие что имеет место

$$\sum_{r^2+j^2<c_2k_n^2} |\theta_{nrj}|^2 > c_1 n^{-2r} \tag{3.1}$$

для всех $n > n_0$.

Обозначим $sd = \frac{r}{2-4r}$. Тогда $r = \frac{2sd}{1+4sd}$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* **C1**–**C5**. *Тогда тела Бесова $\mathbb{B}^{sd}_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$, являются наибольшими множествами для тестовых статистик $T_n(X^{(n)}, Y^{(n)})$.*

Последовательность простых альтернатив $f_n(x,y,\boldsymbol{\theta}_n) = p(x,y) + g_n(x,y.\boldsymbol{\theta}_n)$, $cn^{-r} \leqslant \|g_n\| \leqslant Cn^{-r}$, $\boldsymbol{\theta}_n \in \Upsilon(C_1, C_2)$, состоятельна, если и только если найдется наибольшее множество $\mathbb{B}^{sd}_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$, и последовательность $g_{1n} \in \mathbb{B}^{sd}_{2\infty}(P_0)$, $c_1 n^{-r} \leqslant \|g_{1n}\| \leqslant C_1 n^{-r}$, такие что g_{1n} и $g_n - g_{1n}$ ортогональны, т.е. имеет место

$$\|g_n\|^2 = \|g_{1n}\|^2 + \|g_n - g_{1n}\|^2. \tag{3.2}$$

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* **C1**–**C5**. *Тогда на данную постановку задачи переносятся утверждения теорем* 4.6–4.10 *в* [7], *когда в качестве наибольших множеств берутся тела Бесова $\mathbb{B}^{sd}_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$.*

При этом в аналоге теоремы 4.6 *мы рассматриваем только последовательности функций g_n, удовлетворяющие условию* **B.**

Мы применяем определение чисто состоятельных последовательностей только для последовательностей g_n удовлетворяющих следующему условию.

B. *Существует такое c_0, что для всех $c > c_0$ являются плотностями распределения функции*

$$p(x,y) + g_{cn}(x,y) = p(x,y) + \sum_{r^2+j^2>ck_n^2} (\theta_{rj}(\phi_r(x)\phi_j(y) + \bar\phi_r(x)\bar\phi_j(y)) + \bar\theta_{rj}(\phi_r(x)\bar\phi_j(y) + \bar\phi_r(x)\phi_j(y)))$$

и

$$p(x,y) + (g_n(x,y) - g_{cn}(x,y)) = p(x,y) + \sum_{r^2+j^2<ck_n^2} (\theta_{rj}(\phi_r(x)\phi_j(y) + \bar\phi_r(x)\bar\phi_j(y)) + \bar\theta_{rj}(\phi_r(x)\bar\phi_j(y) + \bar\phi_r(x)\phi_j(y))).$$

Доказательство теорем 3.1–3.3 отличается от соответствующих теорем в [7] только тем, что k_n заменяется везде на k_n^d и s на sd. Также области суммирования $j > ck_n$ и $j < ck_n$ надо заменить на $r^2+j^2 > ck_n^2$ и $r^2+j^2 < ck_n^2$ соответственно, поменяв также везде θ_{nj}^2 на $|\theta_{nrj}|^2$. Мы опустим соответствующие рассуждения.

§4. Доказательство теоремы 2.1

Рассуждения проведем для самой простой постановки задачи проверки гипотезы о симметрии. Для остальных постановок задач они аналогичны и техника оценок та же самая.

Возьмем $b > 0$ и положим $\kappa_{nj}^2(b) = \kappa_{nj}^2$ для $j < bk_n$ и $\kappa_{nj}^2(b) = 0$ для $j > bk_n$.

Определим тестовую статистику

$$T_n^{(b)}(X^{(n)}) = T_{1n}^{(b)}(X^{(n)}) - R_n^{(b)}(X^{(n)}),$$

где

$$T_{1n}^{(b)}(X^{(n)}) = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2(b)\psi_j^2(X^{(n)}),$$

$$R_n^{(b)}(X^{(n}) = 2\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2(b) \sum_{s=1}^{n} \sin^2(2\pi j X_s) q^{-2}(X_s).$$

Определим множества альтернатив

$$Q_n(a,b) = \{\, \boldsymbol{\theta} \,:\, T_{2n}^{(b)}(\theta) > a > 0,\, \boldsymbol{\theta} = \{\theta_{nj}\}_{j=1}^{\infty},\, \theta_{nj} \in \mathbb{R}^1\},$$

где

$$T_{2n}^{(b)}(\boldsymbol{\theta}) = n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2(b)\, \theta_{nj}^2.$$

Обозначим

$$A_n^{(b)} = n^2 \sum_{j=1}^{[bk_n]} \kappa_{nj}^4.$$

Определим критерии

$$L_n^{(b)}(X^{(n)}) = \chi\big(T_n^{(b)}(X^{(n)}) > x_\alpha\, (2A_n^{(b)} V_n(X^{(n)}))^{1/2}\big).$$

Для множеств альтернатив $Q_n(a,b)$ доказательство асимптотической минимаксности критериев $L_n^{(b)}(X^{(n)})$, как и аналогичных критериев в задачах проверки гипотез однородности и независимости, остается тем же, что и в работе [3]. Поэтому мы их опустим. Приведем соответствующее утверждение.

Теорема 4.1. *Последовательность критериев* $L_n^{(b)}(X^{(n)})$ *асимптотически минимаксна на последовательности множеств альтернатив* $Q_n(a,b)$.

При $n \to \infty$ *имеет место* $\alpha(L_n) = \alpha + o(1)$ *и*

$$\beta(L_n, p, Q_n(a,b)) = \Phi(x_\alpha - \|pq^{-2}\|^{-1}(A_n^{(b)}/2)^{1/2}) + o(1) \qquad (4.1)$$

Равномерно по всем последовательностям $\boldsymbol{\theta}_n \in Q_n(a,b)$ *имеет место*

$$\beta(L_n, p) = \Phi(x_\alpha - \|pq^{-2}\|^{-1}T_{2n}^{(b)}(\boldsymbol{\theta}_n)(2A_n^{(b)})^{-1/2}) + o(1) \qquad (4.2)$$

при $n \to \infty$.

Устремляя b к бесконечности в (4.1), получаем нижнюю границу в (2.3).

Таким образом, чтобы доказать верхнюю границу в (2.3) и (2.4), нам достаточно показать, что для всех $\theta_n \in \Psi_n(a, C_1, C_2)$ имеет место

$$\lim_{b\to\infty}\lim_{n\to\infty} T_{2n}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_n)|\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}T_n^{(b)}(X^{(n)}) - \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}T_n(X^{(n)})| = 0 \qquad (4.3)$$

и

$$\lim_{b\to\infty}\lim_{n\to\infty} T_{2n}^{-2}(\boldsymbol{\theta}_n)|\mathbf{Var}_{\theta_n}T_n^{(b)}(X^{(n)}) - \mathbf{Var}_{\theta_n}T_n(X^{(n)})| = 0. \qquad (4.4)$$

Доказательство (4.3) состоит по существу из тех же оценок, что и при доказательстве (26) в [3], и мы его опустим.

Для доказательства (4.4) достаточно показать, что

$$\mathbf{Var}_{\boldsymbol{\theta}_n}(T_n(X^{(n)}) - T_n^{(b)}(X^{(n)})) = o(T_{2n}^2(\boldsymbol{\theta}_n)) \qquad (4.5)$$

при $b \to \infty$ равномерно по $n > c$.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}_{\boldsymbol{\theta}_n}(T_n(X^{(n)}) - T_n^{(b)}(X^{(n)})) = \mathbf{Var}_{\boldsymbol{\theta}_n}\Big(\sum_{j=[bk_n]}^{\infty}\kappa_{nj}^2\psi_{nj}^2(X^{(n)}) \\ - \sum_{j=[bk_n]}^{\infty}\kappa_{nj}^2\sum_{s=1}^{n}\sin^2(2\pi jX_s)q^{-2}(X_s)\Big).\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Мы не будем расписывать все слагаемые, возникающие при вычислении правой части (4.6). Они аналогичны слагаемым, возникающим при оценках $\mathbf{Var}_{\boldsymbol{\theta}_n}(T_n(X^{(n)}))$ в [3], с той разницей, что пределы суммирования от 1 до k_n меняются на от $[bk_n]$ до бесконечности. Так же как и в [3], основная трудность при оценке правой части (4.6) возникает при оценке слагаемых, аналогичных слагаемым, оцениваемым в (45) и (51) в [3]. Приведем эти оценки.

Аналогом оценки (45) в [3] является оценка дисперсии

$$J_{2n} = (n-1) \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj} (\psi_j(X^{(n)}) - n\theta_{nj}),$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}_{\boldsymbol{\theta}_n}(J_{2n}) = n(n-1)^2 \sum_{j,j_1=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \kappa_{nj_1}^2 \theta_{nj} \theta_{nj_1} \\ \times \Big((pq^{-1})_{jj_1} + \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl} ((q^{-1})_{jj_1 l} - (q^{-1})_{jj_1} q_l) \Big). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Используя (2.1) и **K3–K5**, получаем

$$\|\theta\|^2 \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 |\theta_{nj}|^2. \tag{4.8}$$

Применяя (4.8), оценим только слагаемое

$$\begin{aligned} & n(n-1)^2 \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \sum_{j_1=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \kappa_{nj_1}^2 \theta_{nj} \theta_{nj_1} \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl} (q^{-1})_{jj_1 l} \\ & \leqslant Cn^3 \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \sum_{j_1=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \kappa_{nj_1}^2 \theta_{nj} \theta_{nj_1} \|\theta_n\| \, \|q^{-1} \phi_j \phi_{j_1}\| \\ & \leqslant Cn^3 \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \, \theta_{nj}^2 \sum_{j_1=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \, \|\theta_n\| \\ & \leqslant ck_n \kappa_n n^2 \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \, \theta_{nj}^2 \left(n \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \, \theta_{nj}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Если $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} T_n(X^{(n)}) = O(1)$, то правая часть (4.9) есть $o(1)$ при $b \to \infty$.

Оценка остальных слагаемых дисперсии J_{2n} проводится аналогично [3].

Другим слагаемым дисперсии статистики T_n, которая требует несколько иного метода оценивания, является оценка слагаемого (50) в [3] и его версии (35) в [4]. Мы не будем вдаваться в детали, как оно возникает.

Имеем

$$
\begin{aligned}
&n^2 \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \sum_{j_1=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \kappa_{nj_1}^2 \Big| \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl} (q^{-1})_{jj_1 l} \Big|^2 \\
&\leqslant n^2 \sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \sum_{j_1=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \kappa_{nj_1}^2 \|\theta\|^2 \|q^{-1} \phi_j \phi_{j_1}\|^2 \qquad (4.10)\\
&\leqslant \Big(\sum_{j=[bk_n]}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \Big)^2 \kappa^{-2} T_{2n}(\theta) \leqslant b^{-2} k_n^2 \kappa^2 T_{2n}(\theta) = o(b^{-2} T_{2n}(\theta)).
\end{aligned}
$$

Автор глубоко признателен рецензенту за глубокие содержательные замечания.

Список литературы

1. A. K. Bera, A. Ghosh, *Neyman's smooth test and its applications in Econometrics.* — Statistics Textbooks and Monographs. **165** (2002), 177–230.
2. J. Durbin, *Distribution theory for tests based on the sample distribution function.* SIAM (1973).
3. М. С. Ермаков, *Минимаксная непараметрическая проверка гипотез о плотности распределения.* — Теория вероятн. и ее примен. **39** (1994), 488–512.
4. М. С. Ермаков, *Асимптотически минимаксные критерии проверки сложных непараметрических гипотез.* — Пробл. передачи информ. **32**, No. 2 (1996), 54–67.
5. М. С. Ермаков, *Асимптотическая минимаксность критериев хи-квадрат.* — Теория вероятн. и ее примен. **42**, No. 4 (1997), 668–695.
6. М. С. Ермаков, *Об асимптотически минимаксном обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 124–138.
7. М. С. Ермаков, *О равномерной состоятельности непараметрических критериев. I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 98–147.
8. М. С. Ермаков, *О равномерной состоятельности непараметрических критериев. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 147–176.
9. М. С. Ермаков, Д. Ю. Капаца, *О равномерной состоятельности непараметрических критериев типа Неймана.* — Вестник Санкт-Петербургского университета, сер. 1. Математика, механика, астрономия **10(68)**, вып. 2 (2023), 212–225.
10. E. Giné, R. Nickl, *Mathematical Foundations of Infinite-dimensional Statistical Models.* Cambridge university press, 2021.
11. Y. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric goodness-of-fit testing under Gaussian models.* — Lect. Notes Statist. **169** (2003).

12. M. G. Kendall, A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics, vol. 2. Inference and Relationship*. 3rd ed. Hafner Publishing Company, 1961.
13. G. Kerkyacharian, D. Picard, *Density estimation by kernel and wavelets methods: optimality of Besov spaces*. — Statist. Probab. Lett. **18** (1993), 327–336.
14. E. L. Lehmann, J. P. Romano, G. Casella, *Testing Statistical Hypotheses*. Springer, 2005.
15. J. Neyman, *Smooth test for goodness of fit*.– Scand. Actuarial J. **20**, Nos. 3–4 (1937), 149–199.
16. A. Zygmund, *Trigonometric series*. Cambridge Univ. Press, London (2002).

Ermakov M. S. On tests of Neyman type for testing composite nonparametric hypothesis.

For nonparametric hypothesis testing of symmetry, homogeneity and independency we describe uniformly consistent nonparametric sets for tests of Neyman type. The description is exhaustive except for those cases where the bulk of the coefficients of the Fourier series expansion of alternative densities lie far in the tail of the expansion. The desciptions do not depend on hypothesis.

Институт проблем
машиноведения РАН
Большой пр. В.О., 61
Санкт-Петербург, Россия
С.-Петербургский
государственный Университет
Университетский пр., 28, Петродворец
198504 Санкт-Петербург,Россия
E-mail: erm2512@gmail.com

Поступило 10 октября 2024 г.