Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

М. К. Досполова, Д. Н. Запорожец

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ КОНИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ШТЕЙНЕРА

§1. Введение

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – непустое выпуклое компактное множество, $\dim K$ – размерность K. Хорошо известная теорема Штейнера (см., например, [10, соотношение 14.5]) утверждает, что объем λ-окрестности компакта K представляется многочленом от λ с коэффициентами, зависящими от множества K:

$$\mathrm{Vol}_d(K + \lambda \mathbb{B}^d) = \sum_{k=0}^{d} \kappa_{d-k} \, V_k(K) \, \lambda^{d-k}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{1}$$

где через $\mathrm{Vol}_d(\,\cdot\,)$ обозначен объем (d-мерная мера Лебега), $\mathbb{B}^k$ – это k-мерный единичный шар и $\kappa_k := \mathrm{Vol}_k(\mathbb{B}^k) = \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2}+1)$ – его объем. Нормированные коэффициенты $V_0(K), \dots, V_d(K)$ называются *внутренними объемами* K и являются важными характеристиками компакта (см., например, [9]).

При всех $k > \dim K$, по определению, $V_k(K) = 0$. Легко видеть [10, раздел 6.2], что $V_d(\,\cdot\,)$ – это d-мерный объем, $V_{d-1}(\,\cdot\,)$ – половина площади поверхности для d-мерных выпуклых компактов, $V_1(\,\cdot\,)$ – средняя ширина, с точностью до постоянного множителя, а $V_0(\,\cdot\,) \equiv 1$.

Известен эквивалентный способ определения внутренних объемов с помощью формулы Куботы [10, раздел 6.2] через средний объем проекции множества:

$$V_k(K) = \binom{d}{k} \frac{\kappa_d}{\kappa_k \kappa_{d-k}} \mathbf{E}\, \mathrm{Vol}_k(K|W_k),$$

Ключевые слова: GB-множество, внутренние объемы, гауссовские процессы, грассманиан, изонормальный процесс, конические внутренние объемы, конусы, сферическая формула Штейнера, теорема Цирельсона, углы Грассмана, формула Штейнера.

Работа авторов выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Работа М. К. Досполовой выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2022-289 и при финансовой поддержке “Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса””.

где W_k обозначает k-мерное случайное линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, равномерно распределенное по мере Хаара на грассманиане всех таких подпространств, а $K|W_k$ – это ортогональная проекция K на W_k.

Нормировка в формуле (1) подобрана так, чтобы внутренние объемы не зависели от размерности объемлющего пространства. Это означает, что при вложении K в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant d$ внутренние объемы останутся неизменными. Воспользовавшись этим свойством, Судаков [14] и Шеве [2] предложили следующее обобщение понятия внутреннего объема на случай бесконечномерного множества K. Пусть H – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, $K \subset H$ – непустое выпуклое множество. Тогда *внутренние объемы* $V_k(K), k = 0, 1, \ldots,$ определяются формулой

$$V_k(K) = \sup_{K' \subset K} V_k(K') \in [0, \infty], \tag{2}$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым компактным подмножествам K' в K.

Класс бесконечномерных выпуклых компактов с конечными внутренними объемами имеет особую характеризацию, связанную с гауссовскими процессами. Будем называть центрированный случайный гауссовский процесс $(\xi(t))_{t\in H}$ на сепарабельном гильбертовом пространстве H *изонормальным*, если его функция ковариации имеет вид

$$\operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s)) = \langle t, s \rangle, \tag{3}$$

где $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение на H. Говорят, что подмножество K в H является *GB-множеством* (сокращение от английского "Gaussian Bounded"), если существует модификация изонормального процесса на K, имеющая ограниченные почти наверное реализации. Судаков показал [14, теорема 1], что GB-свойство для выпуклого K равносильно тому, что $V_1(K) < \infty$, что автоматически влечет $V_k(K) < \infty$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ (см., например, [2]).

В [16] Цирельсон представил бесконечномерную вероятностную версию формулы Штейнера в терминах изонормального процесса.

Теорема 1 ([16]). *Для выпуклого компактного GB-множества $K \subset H$*

$$\mathbf{E} \exp\left(\sup_{t\in K}\left[\lambda\xi(t) - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{D}\,\xi(t)\right]\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\right)^k V_k(K), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Замечание 1. Для конечномерного K последнее выражение имеет еще одну интерпретацию. *Функционал Уилса* выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ определяется как

$$W(K) := \sum_{k=0}^{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^k V_k(K).$$

Несложно понять (см., например, [5, 11]), что

$$W(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\operatorname{dist}^2(x,K)/2}\, dx,$$

где $\operatorname{dist}(x, K) = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}$ – расстояние между $x \in \mathbb{R}^d$ и K, $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Изонормальный процесс $\xi(t)$ на множестве $K \subset \mathbb{R}^d$ представляется следующим образом:

$$\xi(t) = \langle N, t \rangle = \sum_{i=1}^{d} N_i t_i.$$

Здесь $N = (N_1, \ldots, N_d)$ – стандартный гауссовский вектор в $\mathbb{R}^d$. Тем самым, при $\lambda = 1$ в теореме 1 имеем

$$\mathbf{E} \exp \left(\sup_{t \in K} \left[\langle N, t \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} t_i^2 \right] \right) = \sum_{k=0}^{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^k V_k(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, e^{-\operatorname{dist}^2(x,K)/2}\, dx.$$

Основная цель данной работы – получить коническую версию теоремы 1. Для этого мы в следующем параграфе рассмотрим конические аналоги внутренних объемов. В §3 мы сформулируем основной результат, доказательству которого посвящен заключительный §4.

§2. Конические внутренние объемы

Есть несколько объектов, которые можно рассматривать в качестве конических аналогов внутренних объемов. Нас будут интересовать два таких объекта. Начнем с *углов Грассмана*.

Множество $C \subseteq \mathbb{R}^d$ называется *выпуклым конусом*, если C замкнуто, выпукло и для всех $x \in C$ и $\lambda \geqslant 0$ выполнено $\lambda x \in C$. Будем обозначать размерность C через $\dim C$. Пусть W_k – это случайное k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, выбранное по мере Хаара на грассманиане всех таких подпространств. Следуя Грюнбауму [4], определим k-ый *угол Грассмана* выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$ как вероятность нетривиального пересечения C и W_{d-k}:

$$\gamma_k(C) := \mathbf{P}[C \cap W_{d-k} \neq \{0\}], \quad k = 0, 1, \dots, d.$$

Отметим, что углы Грассмана являются обобщением широко известного понятия *телесного угла*, который определяется следующим образом:

$$\alpha(C) := \mathbf{P}[U \in C].$$

Здесь U – это случайный вектор, выбранный согласно равномерному распределению на единичной сфере в линейной оболочке C в $\mathbb{R}^d$ ($U \in \operatorname{lin} C \cap \mathbb{S}^{d-1}$).

Для $C = \{0\}$ полагаем $\alpha(\{0\}) = 1$.

Если $C \subset \mathbb{R}^d$, $\dim C = d$, то телесный угол $\alpha(C)$ можно выразить через γ_{d-1}:

$$\alpha(C) := \frac{1}{2}\gamma_{d-1}(C) + \frac{1}{2}\mathbf{1}[C = \mathbb{R}^d] = \frac{1}{2}\mathbf{P}[C \cap W_1 \neq \{0\}] + \frac{1}{2}\mathbf{1}[C = \mathbb{R}^d].$$

В работе [4] Грюнбаум показал, что углы Грассмана γ_k, как и внутренние объемы, не зависят от размерности объемлющего пространства: если вложить $C \subseteq \mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^N$, где $N \geqslant d$, то значения γ_k не изменятся. При всех $k > d$ можем определить $\gamma_k(C) := 0$. Нетрудно показать, что для любого выпуклого конуса $C \subseteq \mathbb{R}^d$, $C \neq \{0\}$,

$$1 = \gamma_0(C) \geqslant \gamma_1(C) \geqslant \dots \geqslant \gamma_d(C) = 0. \tag{4}$$

Для $C = \{0\}$ имеем $\gamma_0(C) = \gamma_1(C) = \dots = 0$. В частности, для k-мерного линейного подпространства $L_k \subseteq \mathbb{R}^d$, $k = 1, \dots, d$, выполнено

$$\gamma_0(L_k) = \dots = \gamma_{k-1}(L_k) = 1, \quad \gamma_k(L_k) = \dots = \gamma_d(L_k) = 0. \tag{5}$$

Более того, очевидно, что углы Грассмана, как и внутренние объемы, монотонны относительно включения множеств.

Вторым объектом, претендующим на роль аналогов внутренних объемов для конусов, выступают *конические внутренние объемы.* В работах [1, 6, 8, 12] была исследована коническая версия формулы Штейнера: пусть $C \subseteq \mathbb{R}^d$ – выпуклый конус, тогда

$$\mathbf{P}[\mathrm{dist}^2(Z,C) \leqslant \lambda] = \sum_{k=0}^{d} \beta_{k,d}(\lambda)\, \upsilon_k(C), \qquad \lambda \in [0,1]. \tag{6}$$

Здесь Z – вектор, равномерно распределенный на $\mathbb{S}^{d-1}$, $\mathrm{dist}(Z,C) = \inf\{\|Z-y\| : y \in C\}$ – расстояние от Z до C, $\beta_{k,d}(\,\cdot\,)$ – функция распределения бета-распределения с параметрами $\frac{d-k}{2}$ и $\frac{d}{2}$.

Коэффициенты $\upsilon_k(C)$ определяются однозначно равенством (6) и называются *коническими внутренними объемами* C. При $k > d$ положим $\upsilon_k(C) = 0$. Конические внутренние объемы, как и обычные, не зависят от размерности объемлющего пространства, но, в отличие от углов Грассмана, не являются монотонными относительно включения множеств.

Известно, что $\upsilon_k(C)$ формируют вероятностное распределение на $\{0,1,\ldots,d\}$ для фиксированного конуса C (см., например, [10, теорема 6.5.5]):

$$\sum_{k=0}^{d} \upsilon_k(C) = 1.$$

В частности, для линейного подпространства $L_k \subseteq \mathbb{R}^d$ размерности k

$$\upsilon_j(L_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Связь между коническими внутренними объемами и углами Грассмана выражается через формулу Крофтона (см., например, [10, с. 261]): для всех $k = 0,1,\ldots,d$ имеем

$$\gamma_k(C) = 2\,(\upsilon_{k+1}(C) + \upsilon_{k+3}(C) + \upsilon_{k+5}(C) + \cdots) \tag{7}$$

при условии, что конус C не является линейным подпространством.

§3. Основной результат

Пусть всюду далее M обозначает борелевское множество, $\mathrm{pos}\,M$ – *коническую оболочку* M, то есть наименьший выпуклый конус, содержащий M, а $\mathrm{conv}\,M$ – *выпуклую оболочку* M, то есть наименьшее выпуклое множество, в котором содержится M (из контекста будет понятно, в каком пространстве рассматриваются приведенные характеристики). Также обозначим через $a_+ := \max(a, 0)$ для вещественного числа a.

В [3] была получена конечномерная коническая версия теоремы 1.

Теорема 2 ([3]). *Пусть $N = (N_1, \dots, N_d)$ – стандартный гауссовский вектор в $\mathbb{R}^d$ и $M \subset \mathbb{R}^d$. Тогда для всех $\lambda > 0$*

$$\mathbf{E}\exp\left(\frac{1-\lambda^{-2}}{2}\sup_{t\in(\operatorname{conv} M)\setminus\{0\}}\frac{\langle N, t\rangle_+^2}{\|t\|^2}\right) = \sum_{k=0}^{d}\lambda^k \upsilon_k(\operatorname{pos} M).$$

Данный результат можно считать конечномерной вероятностной версией конической формулы Штейнера (6). Наша задача состоит в обобщении теоремы 2 на бесконечномерные множества.

Будем называть *выпуклым конусом* или просто *конусом* непустое замкнутое выпуклое множество $C \subset H$, для которого $\lambda C \subseteq C$ при всех $\lambda \geqslant 0$ (здесь, как и прежде, H обозначает бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство).

Аналогично (2), для $k = 0, 1, \dots$, определим *k-ый угол Грассмана* конуса $C \subset H$ формулой

$$\gamma_k(C) := \sup_{C'\subset C}\gamma_k(C'), \tag{8}$$

где супремум берется по всем конечномерным выпуклым конусам $C' \subset C$.

Замечание 2. Определение $\gamma_k(C)$ корректно, так как углы Грассмана для конечномерных конусов монотонны относительно включения множеств и не зависят от размерности объемлющего пространства.

Замечание 3. Для любого бесконечномерного линейного пространства L выполнено

$$\gamma_k(L) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

в силу (5) и того факта, что любое бесконечномерное линейное пространство содержит конечномерное сколь угодно большой размерности.

Далее, для $k = 1, 2, \dots$ определим *k-ый конический внутренний объем* конуса $C \subset H$:

$$\upsilon_k(C) := \frac{\gamma_{k-1}(C) - \gamma_{k+1}(C)}{2}. \tag{9}$$

Для $k = 0$ положим

$$\upsilon_0(C) := 1 - \frac{\gamma_0(C) + \gamma_1(C)}{2}. \tag{10}$$

Замечание 4. В силу (4), (8), определенные таким образом конические внутренние объемы неотрицательны, удовлетворяют бесконечномерной версии соотношения Крофтона (7), а также

$$\sum_{k=0}^{\infty} \upsilon_k(C) = 1, \quad \text{если} \lim_{k\to\infty} \gamma_k(C) = 0.$$

Замечание 5. По замечанию 3, для любого бесконечномерного линейного пространства L выполнено

$$\upsilon_k(L) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы.

Теорема 3. *Пусть $\xi(t)$ – изонормальный процесс на H, а подмножество $M \subset H$ таково, что $\operatorname{conv} M$ – GB-множество. Тогда для любого $\lambda \in (0, 1)$*

$$\mathbf{E} \exp\left(\frac{1 - \lambda^{-2}}{2} \sup_{t \in (\operatorname{conv} M)\setminus\{0\}} \frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \, \upsilon_k(\operatorname{pos} M).$$

§4. Доказательство теоремы 3

Для конечномерных множеств M теорема доказана (см. теорему 2). Нам остается разобрать случай бесконечномерного M.

Рассмотрим последовательность выпуклых конечномерных множеств M_i, $i \in \mathbb{N}$, которая аппроксимирует $\operatorname{conv} M$ изнутри: $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M$, $\cup_{i=1}^{\infty} M_i$ плотно в $\operatorname{conv} M$.

Так как M_i конечномерны, их можно вложить в конечномерные подпространства H соответствующей размерности. Пусть $\dim M_i = d_i$, обозначим через H_i линейную оболочку M_i, $\dim H_i = d_i$. По теореме 2 для множеств M_i, рассматриваемых в H_i, верна формула:

$$\mathbf{E} \exp\left(\frac{1 - \lambda^{-2}}{2} \sup_{t \in M_i\setminus\{0\}} \frac{\langle N_{d_i}, t\rangle_+^2}{\|t\|^2} \right) = \sum_{k=0}^{d_i} \lambda^k \, \upsilon_k(\operatorname{pos} M_i), \tag{11}$$

где N_{d_i} – это стандартный d_i-мерный гауссовский вектор в H_i. В терминах изонормального процесса формула (11) переписывается следующим образом:

$$\mathbf{E}\exp\left(\frac{1-\lambda^{-2}}{2}\sup_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\right)=\sum_{k=0}^{d_i}\lambda^k\upsilon_k(\operatorname{pos}M_i). \qquad (12)$$

Для того чтобы проверить эквивалентность формул (11) и (12) для конечномерных множеств M_i, заметим, что совпадают все конечномерные распределения процессов $\langle N_{d_i},t\rangle$ и $\xi(t)$: при любом $n\in\mathbb{N}$ и при любых $t_1,\dots,t_n\in M_i$

$$\big(\langle N_{d_i},t_1\rangle,\dots,\langle N_{d_i},t_n\rangle\big) \quad \text{и} \quad \big(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n)\big)$$

равны по распределению. Действительно, оба вектора являются гауссовскими с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариаций $C_{lm}=\langle t_l,t_m\rangle,\ l,m=1,\dots,n$. Тогда для M_i совпадают распределения случайных величин

$$\sup_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\langle N_{d_i},t\rangle_+^2}{\|t\|^2} \quad \text{и} \quad \sup_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2},$$

а это означает, что формулы (11) и (12) эквивалентны.

Перейдем к пределу при $i\to\infty$ в равенстве (12). Сначала выясним, что получится в правой части. Нам понадобятся следующие две леммы для углов Грассмана.

Лемма 1. *Пусть конусы $C, C_i, i\in\mathbb{N}$, в $\mathbb{R}^d$ таковы, что при $i\to\infty$*

$$C_i\cap\mathbb{S}^{d-1}\to C\cap\mathbb{S}^{d-1}$$

в метрике Хаусдорфа d_H на подмножествах сферы $\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $k=0,1,\dots,d$ при $i\to\infty$ имеем

$$\gamma_k(C_i)\to\gamma_k(C).$$

Лемма 2. *Пусть конечномерные конусы $C_i\subset H,\ i\in\mathbb{N}$, аппроксимируют конус $C\subset H$ изнутри: $C_1\subset C_2\subset\dots\subset C$ и $\cup_{i=1}^\infty C_i$ плотно в C. Тогда*

$$\gamma_k(\operatorname{pos}(\cup_{i=1}^\infty C_i))=\gamma_k(C), \quad k=0,1,\dots.$$

Доказательства лемм 1, 2 можно найти в [13].

В силу (8), для конусов C_i, C, удовлетворяющих условиям леммы 2, выполнено
$$\lim_{i\to\infty} \gamma_k(C_i) = \gamma_k(\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{\infty} C_i)) = \gamma_k(C).$$
Тогда (9), (10) влекут
$$\lim_{i\to\infty} \upsilon_k(C_i) = \upsilon_k(\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{\infty} C_i)) = \upsilon_k(C).$$
Пусть $C_i = \mathrm{pos}\, M_i$. Так как $\upsilon_k(\mathrm{pos}\, M_i) \leqslant 1$,
$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \upsilon_k(\mathrm{pos}\, M_i) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k < \infty, \quad \lambda \in (0,1).$$
Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем
$$\sum_{k=0}^{d_i} \lambda^k \upsilon_k(\mathrm{pos}\, M_i) \to \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \upsilon_k(\mathrm{pos}\, M), \quad \lambda \in (0,1).$$

Теперь посмотрим на предел в левой части выражения (12) при $i \to \infty$. Достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть дано множество $M \subset H$, такое что $\mathrm{conv}\, M$ является GB-множеством, и последовательность его подмножеств M_i, аппроксимирующих $\mathrm{conv}\, M$ изнутри: $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset \mathrm{conv}\, M$, $\cup_{i=1}^{\infty} M_i$ плотно в $\mathrm{conv}\, M$. Тогда при всех $\lambda > 0$ выполнено*
$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{E}\, \exp\left(\frac{1-\lambda^{-2}}{2} \sup_{t\in M_i\setminus\{0\}} \frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\right) = \mathbf{E}\, \exp\left(\frac{1-\lambda^{-2}}{2} \sup_{t\in(\mathrm{conv}\, M)\setminus\{0\}} \frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\right).$$

Доказательство леммы 3. Ниже мы покажем, что
$$X_i := \sup_{t\in M_i\setminus\{0\}} \frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2} \xrightarrow{\mathbf{P}} X := \sup_{t\in \mathrm{conv}\, M\setminus\{0\}} \frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}, \tag{13}$$
где $\xrightarrow{\mathbf{P}}$ обозначает сходимость по вероятности. Отсюда последует заключение леммы 3, а значит, и теоремы 3. Действительно, достаточно выделить из X_i сходящуюся почти наверное подпоследовательность, воспользоваться монотонностью X_i по i и применить теорему Леви о монотонной сходимости. $\square$

Итак, нам остается показать сходимость (13). Пусть N – это некоторое счетное всюду плотное подмножество $\operatorname{conv} M\backslash\{0\}$. Сходимость (13) последует, если мы докажем два соотношения:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in\operatorname{conv} M\backslash\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}=\sup_{t\in N}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\right)=1; \tag{14}$$

$$\sup_{t\in M_i\backslash\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\xrightarrow{\mathbf{P}}\sup_{t\in N}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2},\quad i\to\infty. \tag{15}$$

Начнем с равенства (14). Нам потребуется лемма, доказанная в [16]. Прежде чем ее сформулировать, дадим одно определение, введенное Цирельсоном [15]. Пусть T – некоторое метрическое пространство, а $\widetilde{\xi}(t)$ – случайный процесс на T. Модификация $(\eta(t))_{t\in T}$ процесса $(\widetilde{\xi}(t))_{t\in T}$ называется *естественной*, если существует метрика ρ_1 на T, такая что (T,ρ_1) есть сепарабельное метрическое пространство и процесс $(\eta(t))_{t\in T}$ имеет почти наверное непрерывные на (T,ρ_1) реализации.

Лемма 4. *Пусть дана естественная модификация $\widetilde{\xi}(t,\omega)$ некоторого случайного процесса, $\omega\in\Omega$, $t\in T$, и $S\subset T$ плотно в следующем смысле: для любого $t\in T$ найдутся такие $s_i\in S$, $i=1,2,\dots,$ что $\widetilde{\xi}(s_i,\omega)\to\widetilde{\xi}(t,\omega)$ при $i\to\infty$ для почти всех ω (соответствующее множество вероятности 1, вообще говоря, зависит от t). Тогда существует множество $\Omega_0\subset\Omega$ вероятности 1, обладающее следующим свойством: для любого $t\in T$ найдутся такие $s_i'\in S$ (подпоследовательность s_i), $i=1,2,\dots,$ что $\widetilde{\xi}(s_i',\omega)\to\widetilde{\xi}(t,\omega)$ при $i\to\infty$ для всех $\omega\in\Omega_0$.*

Цирельсон показал [15, теорема 3], что изонормальный процесс $\xi(t)$ на множестве $\widetilde{M}\subset H$ имеет естественную модификацию тогда и только тогда, когда $\widetilde{M}$ является счетным объединением GB-множеств.

Вернемся к равенству (14).

Лемма 5. *Пусть N – счетное подмножество выпуклого GB-множества $\widetilde{M}$, не содержащее 0 и всюду плотное в $\widetilde{M}$. Тогда почти наверное*

$$\sup_{t\in N}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}=\sup_{t\in\widetilde{M}\backslash\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}.$$

Доказательство леммы 5. Понятно, что почти наверное

$$\sup_{t\in N}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\leqslant\sup_{t\in\widetilde{M}\setminus\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}.$$

Для проверки неравенства в обратную сторону воспользуемся леммой 4. По сказанному выше, у $\xi(t)$ на $\widetilde{M}$ существует естественная модификация. Зафиксируем $t_0\in\widetilde{M}$. Поскольку N плотно в $\widetilde{M}$, найдется последовательность $t_i\in N : t_i\to t_0$ при $i\to\infty$ по норме в H. Тогда при $i\to\infty$ имеем

$$\mathbf{E}\,(\xi(t_0)-\xi(t_i))^2=\mathbf{E}\,(\xi(t_0-t_i))^2=\|t_0-t_i\|^2\to 0.$$

Здесь первое равенство следует из линейности изонормального процесса (см., например, [7, раздел 1.1.1]), второе – из свойства (3). Таким образом, последовательность $\xi(t_i)$ сходится к $\xi(t_0)$ по вероятности. Тогда мы можем извлечь подпоследовательность (будем ее обозначать также t_i), такую что $\xi(t_i)$ сходится к $\xi(t_0)$ почти наверное (соответствующее множество вероятности 1 зависит от t_0). Тем самым, условия леммы 4 выполнены.

Докажем, что обратное неравенство справедливо при всех $\omega\in\Omega_0$, где Ω_0 – множество вероятности 1 из леммы 4. От противного: пусть найдутся $\omega'\in\Omega_0$ и $t_0\in\widetilde{M}\setminus\{0\}$, такие что

$$\frac{\xi(t_0,\omega')_+^2}{\|t_0\|^2}>\sup_{t\in N}\frac{\xi(t,\omega')_+^2}{\|t\|^2}.$$

По свойству Ω_0, найдутся $t_i'\in N$, такие что

$$\xi(t_i',\omega')\to\xi(t_0,\omega'),\quad i\to\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\xi(t_i',\omega')_+\to\xi(t_0,\omega')_+,\quad i\to\infty.$$

Так как $t_0\neq 0,\ t_i'\to t_0$, имеем

$$\frac{\xi(t_i',\omega')_+^2}{\|t_i'\|^2}\to\frac{\xi(t_0,\omega')_+^2}{\|t_0\|^2},\quad i\to\infty.$$

Получили противоречие. Тем самым, для всех $\omega\in\Omega_0$

$$\sup_{t\in N}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}=\sup_{t\in\widetilde{M}\setminus\{0\}}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}.\qquad\square$$

Справедливость (14) установлена. Теперь докажем сходимость в (15). Занумеруем элементы N произвольным образом, $N = \{t_k\}_{k\geqslant 0}$. Необходимо проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\mathbf{P}\left(\left|\sup_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}-\sup_{t\in N}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\right|>\varepsilon\right)\to 0,\quad i\to\infty. \tag{16}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множества

$$\widetilde{A}_{k,\varepsilon} := \left\{\omega\in\Omega\colon \frac{\xi(t_k,\omega)_+^2}{\|t_k\|^2}+\varepsilon>\sup_{t\in N}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}\right\},\quad k\geqslant 0,$$

$$A_{0,\varepsilon} := \widetilde{A}_{0,\varepsilon},$$

$$A_{k,\varepsilon} := \widetilde{A}_{k,\varepsilon}\setminus\bigcup_{n<k}\widetilde{A}_{n,\varepsilon},\quad k\geqslant 1.$$

Видно, что $A_{k,\varepsilon}$ дизъюнктны и в объединении дают все вероятностное пространство Ω. Из (14) и соображений монотонности следует, что соотношение (16) вытекает из сходимости:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}+3\varepsilon<\sup_{t\in N}\frac{\xi(t)_+^2}{\|t\|^2}\right)\to 0,\quad i\to\infty,$$

где параметр ε мы заменили на 3ε для удобства изложения. Пусть

$$B_i := \left\{\omega\in\Omega : \sup_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}+3\varepsilon<\sup_{t\in N}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}\right\},\quad i\geqslant 1.$$

Тогда

$$B_i = \bigcup_{k\geqslant 0}(B_i\cap A_{k,\varepsilon}),\quad i\geqslant 1.$$

Если $\omega\in B_i\cap A_{k,\varepsilon}$, то одновременно выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}+3\varepsilon<\sup\limits_{t\in N}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2},\\ \frac{\xi(t_k,\omega)_+^2}{\|t_k\|^2}+\varepsilon>\sup\limits_{t\in N}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in M_i\setminus\{0\}}\frac{\xi(t,\omega)_+^2}{\|t\|^2}+2\varepsilon<\frac{\xi(t_k,\omega)_+^2}{\|t_k\|^2}.$$

Поскольку $\cup_{i=1}^{\infty} M_i$ плотно в $\operatorname{conv} M$, то для каждого $t_k \in N \subset \operatorname{conv} M$ можно выбрать последовательность чисел $t_k^{(i)} \in M_i$, сходящуюся к t_k при $i \to \infty$. Тогда для $\omega \in B_i \cap A_{k,\varepsilon}$ имеем

$$\frac{\xi(t_k^{(i)}, \omega)_+^2}{\|t_k^{(i)}\|^2} + 2\varepsilon < \frac{\xi(t_k, \omega)_+^2}{\|t_k\|^2}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(B_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_i \cap A_{k,\varepsilon}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi(t_k^{(i)})_+^2}{\|t_k^{(i)}\|^2} + 2\varepsilon < \frac{\xi(t_k)_+^2}{\|t_k\|^2} \right).$$

Оценим следующую разность: почти наверное выполнено

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\xi(t_k^{(i)})_+^2}{\|t_k^{(i)}\|^2} - \frac{\xi(t_k)_+^2}{\|t_k\|^2} \right| &\leqslant \frac{1}{\|t_k\|^2} \left| \xi(t_k)_+^2 - \xi(t_k^{(i)})_+^2 \right| + \xi(t_k^{(i)})_+^2 \left| \frac{1}{\|t_k\|^2} - \frac{1}{\|t_k^{(i)}\|^2} \right| \\
&\leqslant \frac{2\,C}{\|t_k\|^2} \left| \xi(t_k)_+ - \xi(t_k^{(i)})_+ \right| + C^2 \frac{\left| \|t_k\|^2 - \|t_k^{(i)}\|^2 \right|}{\|t_k\|^2 \|t_k^{(i)}\|^2} \\
&\leqslant \frac{2\,C}{\|t_k\|^2} \left| \xi(t_k) - \xi(t_k^{(i)}) \right| + C^2 \frac{\left| \|t_k\|^2 - \|t_k^{(i)}\|^2 \right|}{\|t_k\|^2 \|t_k^{(i)}\|^2}, \qquad (17)
\end{aligned}$$

где $C < \infty$ – константа, такая что $\left| \sup\limits_{t \in \operatorname{conv} M} \xi(t) \right| < C$. Такая константа существует, поскольку $\operatorname{conv} M$ является GB-множеством. Второе слагаемое в правой части (17) стремится к 0 при $i \to \infty$, поэтому по неравенству Чебышёва

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} \mathbf{P} &\left(\frac{\xi(t_k^{(i)})_+^2}{\|t_k^{(i)}\|^2} + 2\,\varepsilon < \frac{\xi(t_k)_+^2}{\|t_k\|^2} \right) \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{2\,C}{\|t_k\|^2} \left| \xi(t_k) - \xi(t_k^{(i)}) \right| > \varepsilon \right) \\
&\leqslant \limsup_{i\to\infty} \frac{4\,C^2\, \mathbf{D}(\xi(t_k) - \xi(t_k^{(i)}))}{\varepsilon^2\, \|t_k\|^4} = \limsup_{i\to\infty} \frac{4\,C^2\, \|t_k - t_k^{(i)}\|^2}{\varepsilon^2\, \|t_k\|^4} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, все члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_i \cap A_{k,\varepsilon})$ стремятся к 0, а остатки этого ряда оцениваются равномерно по i:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(B_i \cap A_{k,\varepsilon}) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_{k,\varepsilon}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{P}(B_i) \to 0$ при $i \to \infty$ и (15) доказано.

Список литературы

1. C. B. Allendoerfer, *Steiner's formulae on a general S^{n+1}.* — Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 128–135.
2. S. Chevet, *Processus Gaussiens et volumes mixtes.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **36**, No. 1 (1976), 47–65.
3. F. Götze, Z. Kabluchko, D. N. Zaporozhets, *Grassmann angles and absorption probabilities of Gaussian convex hulls.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501** (2021), 126–148.
4. B. Grünbaum, *Grassmann angles of convex polytopes.* — Acta Math. **121** (1968), 293–302.
5. H. Hadwiger, *Das Wills'sche Funktional.* — Monatsh. Math. **79** (1975), 213–221.
6. G. Herglotz, *Über die Steinersche Formel für Parallelflächen.* — Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **15** (1943), 165–177.
7. D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Probab. Appl. Springer, Berlin, 2nd edition, 2006.
8. L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Vol. 1, Encyclopedia Math. Appl. Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Mass.–London–Amsterdam, 1976.
9. R. Schneider, *Convex Bodies: the Brunn–Minkowski Theory*, Vol. 151, Encyclopedia Math. Appl. Cambridge University Press, Cambridge, expanded edition, 2014.
10. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Probab. Appl. (N.Y.), Berlin, Springer, 2008.
11. R. A. Vitale, *Convex bodies and Gaussian processes.* — Image Anal. Stereol. **29**, No. 1 (2010), 13–18.
12. H. Weyl, *On the volume of tubes.* — Amer. J. Math. **61**, No. 2 (1939), 461–472.
13. М. К. Досполова, *Углы Грассмана бесконечномерных конусов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **525** (2023), 51–70.
14. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* — Труды МИАН **141** (1976), 3–191.
15. Б. С. Цирельсон, *Естественная модификация случайного процесса и ее приложение к случайным функциональным рядам и гауссовским мерам.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **55** (1976), 35–63.
16. Б. С. Цирельсон, *Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига.* II. — Теория вероятн. и ее примен. **30**, No. 4 (1985), 772–779.

Dospolova M. K., Zaporozhets D. N. Infinite-dimensional conic Steiner formula.

The classical Steiner formula expresses the volume of the neighborhood of a convex compact set in $\mathbb{R}^d$ as a polynomial in the radius of the neighborhood. In Tsirelson's work [16], this result was extended to the infinite-dimensional case. A spherical analogue of the Steiner formula for convex subsets of $\mathbb{S}^{d-1}$ is also well-known. The aim of this note is to obtain an infinite-dimensional version of this spherical analogue.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский международный
математический институт им. Леонарда Эйлера
(Математический центр), Россия
E-mail: `dospolova.maria@yandex.ru`

Поступило 6 ноября 2024 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `zap1979@gmail.com`