Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

**Ю. А. Давыдов, Д. С. Рахманкин**

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РАНДОМИЗИРОВАННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ И УСТОЙЧИВЫЕ ЗАКОНЫ

## §1. Введение

Для стационарных процессов традиционный путь для получения результатов типа центральной предельной теоремы состоит в выборе подходящего сочетания моментных условий с условиями на тот или иной вид слабой зависимости. Однако эти условия зачастую трудно проверяемы. В недавней работе Темпельмана [10] был предложен другой подход, основанный на процедуре рандомизации, сопоставляющей исходному процессу схему серий, в каждой из которых величины оказываются условно независимы и одинаково распределены. Это позволяет во многих случаях получать результаты при минимальном условии эргодичности исходного процесса, см., например, работу Темпельмана и Давыдова [4], где для эргодических стационарных процессов $X = (X_k, k \in \mathbf{Z})$ с конечным вторым моментом $\mathbf{E}\,(X_0^2) < \infty$ были получены рандомизированные версии центральной предельной теоремы, принципа инвариантности, а также функциональной предельной теоремы для эмпирических процессов.

Следующий естественный шаг в изучении рандомизированных стационарно связанных величин – рассмотреть вопрос об их притяжении к устойчивым законам. Для независимых величин хорошо известен критерий такой сходимости, имеющий специальное название “условие регулярного изменения хвостов” – $(RV)$. Для зависимых величин притяжение к устойчивым законам активно изучалось в последнее время. Barsak, Davis, Denker, Dabrowski, Jakubowski, Mikosch, Resnick – вот неполный список коллег, публиковавших статьи по этой теме. Ссылки на работы этих авторов и других можно найти в [1]. Однако предлагаемые условия, как правило, весьма громоздки и мало пригодны для статистических приложений.

*Ключевые слова*: стационарные процессы, предельные распределения, рандомизация, слабая сходимость, перемешивание, слабая зависимость, регулярное изменение.

Целью данной работы является изучить дополнительные условия, при которых условия регулярного изменения выполнены и для рандомизированной стационарной последовательности. Нами было найдено достаточное моментное условие, которое легко проверяется для конкретных типов зависимости.

**Структура работы.** После вводных замечаний и объяснения сути рандомизации, в §4 содержится теорема 4.1, предлагающая простое условие моментного типа, достаточное для выполнения условия $RV$ для рандомизированной схемы серий. В следующем параграфе приведены следствия для сходимости нормированных сумм, сходимости эмпирических точечных процессов и сходимости максимумов. В заключительном §6 приведены примеры выполнения упомянутого моментного условия для процессов с сильным или равномерно сильным перемешиванием.

**Обозначения.**
$S^{d-1}$ – единичная сфера в $\mathbf{R}^d$.
$\lambda^d$ – мера Лебега в $\mathbf{R}^d$.
$\lambda = \lambda^1$ – мера Лебега в $\mathbf{R}^1$.
$H = \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ с метрикой (4), $H$ отождествляется с полярным представлением $H := S^{d-1} \times (0, \infty)$.
$\sigma$ – вероятностная мера на $S^{d-1}$.
$\mathcal{A}_\sigma$ – совокупность всех $A \subset S^{d-1}$, для которых $\sigma(\partial A) = 0$.
$\mu_\alpha$ – мера на $(0, \infty)$, такая что $\mu_\alpha([r, \infty)) = r^{-\alpha}$ при всех $r > 0$.
$\Rightarrow$ слабая сходимость вероятностных и конечных мер.
$\xrightarrow{v}$ сходимость мер в *vague*-топологии.
$\mathrm{supp}(\mu)$ – носитель меры $\mu$.
$\Pi_\alpha$ – пуассоновский точечный процесс ($p.p.p$) в $H$ с мерой интенсивности $\sigma \times \mu_\alpha$.
$RV$ – условие регулярного изменения (см. (3) и (6)).
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ равенство по распределению.
$C$ – абсолютные константы, не обязательно одни и те же в разных местах.

## §2. Области притяжения

**Определение 1.** *Пусть $X$ – случайный вектор в $\mathbf{R}^d$ с распределением $\mathcal{P}$. Говорят, что $X$ строго устойчив (или что $\mathcal{P}$ строго устойчиво), с показателем $\alpha > 0$, если для любых $a, b > 0$*

$$a^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + b^{\frac{1}{\alpha}} X_2 \overset{\mathcal{D}}{=} (a+b)^{\frac{1}{\alpha}} X, \tag{1}$$

*где $X_1, X_2$ – независимые копии $X$.*

Известно (см. [6]), что показатель $\alpha$ должен лежать в $(0,2]$, при $\alpha > 2$ устойчивых распределений в $\mathbf{R}^d$ нет. Случай $\alpha = 2$ соответствует гауссовскому распределению.

Мы в дальнейшем рассматриваем только случай строго устойчивых распределений с показателем $0 < \alpha < 2$. Для краткости "строго" будем опускать.

**Определение 2.** *Говорят, что $X$ (или его распределение $\mathcal{P}$) принадлежит области притяжения устойчивого закона $Q$, если для последовательности $(X_k, k \in \mathbf{N})$ независимых копий $X$ при некотором выборе нормирующих констант $(b_n)$, $b_n > 0$, $b_n \to \infty$, выполняется соотношение*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{b_n} \Rightarrow Q, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Известно (см. [6]), что сходимость (2) эквивалентна при $0 < \alpha < 2$ так называемому условию регулярного изменения $(RV)$.

**Определение 3.** *Случайный вектор $X$ удовлетворяет условию $RV$, если найдется вероятностная мера $\sigma$ на единичной сфере $S^{d-1}$, такая что при всех $r > 0$ и для любого $A \in \mathcal{B}_{S^{d-1}}$ с $\sigma(\partial A) = 0$*

$$\lim_{n \to \infty} n\, \mathbf{P}\left\{ \frac{X}{|X|} \in A, |X| \geqslant r b_n \right\} = \sigma(A) \cdot r^{-\alpha}. \tag{3}$$

*При этом константы $b_n$ обязательно имеют вид $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$, где $h$ – медленно меняющаяся функция.*

Условие $RV$ нередко формулируется иначе. Пространство $H = \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ с помощью отображения $x \to (\frac{x}{|x|}, |x|)$ отождествим с $S^{d-1} \times (0, \infty)$, которое снабдим метрикой

$$\rho((\theta_1, t_1),\ (\theta_2, t_2)) = |\theta_1 - \theta_2| + \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|. \tag{4}$$

Подмножество $A \subset H$ будет компактным, если оно замкнуто и отделено от нуля. Пусть $\mathcal{P}_n$ – распределение вектора $\frac{X}{b_n}$, а $\mu_\alpha$ – мера на $\mathcal{B}_{(0,\infty]}$, такая что $\mu_\alpha([r, \infty)) = r^{-\alpha}$ для $r > 0$. Тогда (3) эквивалентно сходимости в *vague*-топологии

$$n\mathcal{P}_n \xrightarrow{v} \sigma \times \mu_\alpha. \tag{5}$$

Отметим, что в нашем случае (5) означает, что для пюбых $\delta > 0$ сужение мер $n\mathcal{P}_n$ на $S^{d-1} \times [\delta, \infty)$ сходится в смысле обычной слабой сходимости конечных мер к $\sigma \times \mu_\alpha|_\delta$, где $\mu_\alpha|_\delta$ – сужение $\mu_\alpha$ на $[\delta, \infty)$.

Обозначим через $\mathbf{X} = \{X_{n,j},\ j \leqslant n;\ n \in \mathbb{N}\}$ схему серий независимых и одинаково распределенных в каждой серии случайных величин. Пусть $\mathcal{P}_n$ – общее распределение векторов в $n$-й серии.

Условие $RV$ для схемы серий имеет тот же самый вид (5), или в эквивалентной форме:

для любого $r > 0$ и любого $A \in \mathcal{B}_{S^{d-1}}$ с $\sigma(\partial A) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbf{P}\left\{\frac{X_{n,1}}{|X_{n,1}|} \in A, |X_{n,1}| \geqslant r\right\} = \sigma(A) \cdot r^{-\alpha}. \tag{6}$$

Оно играет важную роль при характеризации сходимости точечных процессов. Хорошо известно (см. [7, Proposition 3.21]), что при выполнении (5) для последовательности точечных процессов $\Pi_n$ выполняется

$$\Pi_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_{n,k}} \Rightarrow \Pi_\alpha, \tag{7}$$

где $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость в пространстве локально конечных мер на $H$, снабженном *vague*-топологией. При этом предельный процесс $\Pi_\alpha$ будет пуассоновским с мерой интенсивности $\sigma \times \mu_\alpha$. Стоит отметить, что условие (5) является не только достаточным, но и необходимым для (7).

Процесс $\Pi_\alpha$ допускает представление:

$$\Pi_\alpha \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\{\varepsilon_k \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}\}}, \tag{8}$$

где $\{\Gamma_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ две независимые последовательности, $\{\varepsilon_k\}$ – $i.i.d$ с общим распределением $\sigma$, а $\{\Gamma_k\}$ – последовательность моментов скачков стационарного пуассоновского процесса на $\mathbf{R}_+$. Последнее, как известно, означает, что $\Gamma_k = \sum_1^k \gamma_j$, где $\gamma_j$ – $i.i.d$ случайные величины, имеющие стандартное экспоненциальное распределение.

Доказательство равенства (8) вытекает из того факта, что точечный процесс $(\varepsilon_k, \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}})$ получается преобразованием $(\theta, x) \to (\theta, x^{\frac{1}{\alpha}})$ из пуассоновского маркированного процесса $(\varepsilon_k, \Gamma_k)$, имеющего меру интенсивности $\sigma \times \lambda$.

## §3. Рандомизация

Пусть $X = (X_n)$ – стационарная эргодическая последовательность случайных $d$-мерных векторов. Пусть $T = \{\tau_{n,j},\ j = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbf{N}\}$ – схема серий независимых и одинаково распределенных в каждой серии случайных величин с общим равномерным распределением на $L_n = \{1, 2, \ldots, k_n\}$, $k_n \in \mathbf{N}$, $(k_n) \uparrow \infty$.

Мы предполагаем, что $X$ и $T$ независимы. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $X$ и $T$ заданы на произведении пространств $(\Omega_X, \mathcal{F}_X, \mathbf{P}_X)$ и $(\Omega_T, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}_T)$, т.е. на $(\Omega_X \times \Omega_T,\ \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_T,\ \mathbf{P}_X \times \mathbf{P}_T)$. При этом для $(\omega, \omega') \in \Omega_X \times \Omega_T$

$$X_n(\omega, \omega') = X_n(\omega) \ , \text{ а } \tau_{n,j}(\omega, \omega') = \tau_{n,j}(w').$$

**Определение 4.** *Последовательность серий*

$$\mathcal{A} = \{X(\tau_{n,j}), j = 1, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbf{N},$$

*будем называть рандомизацией последовательности* $X$.

Применение рандомизации к предельным теоремам основано, во-первых, на эргодической теореме, а во-вторых, на следующем простом факте.

**Лемма 1.** *Рассмотрим случайные элементы* $(Y_n)$ *полного сепарабельного пространства* $(\mathbf{E}, \mathcal{E})$, *заданные на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. *Пусть* $Q_n$ *– условное распределение* $Y_n$ *относительно* $\sigma$*-подалгебры* $\mathfrak{M} \subset \mathcal{F}$. *Тогда, если с вероятностью единица* $Q_n$ *сходятся слабо к одному и тому же вероятностному распределению* $Q$, *то и сходимость безусловных распределений*

$$\mathcal{P}_{Y_n} \Longrightarrow Q$$

*также имеет место.*

Для иллюстрации применения рандомизации рассмотрим следующий пример.

Будем считать, что размерность $d = 1$ и что случайные величины $X_n$ из нашей последовательности квадратично интегрируемы. Эргодичность последовательности позволяет сразу получить состоятельные оценки для неизвестных среднего и дисперсии (или для других параметров моментного характера). Однако для более точного статистического анализа нужна асимптотическая нормальность оценок, т.е. нужны результаты типа ЦПТ, а для этого, как хорошо известно, нужны дополнительные условия на $(X_n)$ типа слабой зависимости (такие как сильное и равномерно сильное перемешивание, ассоциированность и т.п.). Вариантов ЦПТ при этих условиях имеется великое множество (см. например, [2, 5, 8]). Тем не менее, применение их для задач оценивания затруднительно, т.к. проверка выполнения того или иного условия слабой зависимости сама по себе является достаточно сложной задачей. Процедура рандомизации, предложенная в [10] и развитая в [4], позволяет избежать указанных выше трудностей.

Действительно, при условии $\mathcal{F}_X$ случайные величины $\{X(\tau_{n,j}),\ j = 1, \ldots, n\}$ будут независимы и одинаково распределены. Их общим условным распределением будет мера

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} \delta_{\{X_j\}}.$$

Поэтому, если $\mathbf{E}\,|f(X_1)| < \infty$, то

$$\mathbf{E}_X f(X_{(\tau_{n,j})}) = \frac{1}{k_n} \sum_{1}^{k_n} f(X_j).$$

В частности, при $d = 1$

$$M_n := \mathbf{E}_X(X(\tau_{n,j})) = \frac{1}{k_n} \sum_{1}^{k_n} X_j;$$

$$V_n := \mathrm{Var}(X(\tau_{n,j})) = \frac{1}{k_n} \sum_{1}^{k_n} (X_j - M_n)^2.$$

В силу эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина с вероятностью единица

$$M_n \to \mathbf{E}\,X_1, \quad \text{а} \quad V_n \to \mathrm{Var}(X_1). \tag{9}$$

Оказывается (см. [4]), что для схемы серий $\{X(\tau_{n,j})\}$ с вероятностью единица условие Линдеберга выполняется без всяких дополнительных к эргодичности предположений. В сочетании с (9) это дает “безусловную” ЦПТ:

$$\frac{\sum_1^n (X(\tau_{n,j}) - M_n))}{n^{\frac{1}{2}} V_n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

В следующем разделе мы рассмотрим поведение рандомизированных сумм

$$\sum_{j=1}^{n} X(\tau_{n,j})$$

без предположения о квадратичной интегрируемости.

## §4. Условие регулярного изменения для рандомизированного процесса

В этом параграфе предполагается, что $X = (X_k,\ k \in \mathbf{Z})$ – такая строго стационарная последовательность, что $X_0$ лежит в зоне притяжения строго устойчивого закона Q с показателем $\alpha < 2$, спектральной мерой $\sigma$ и нормировочными коэффициентами $(b_k)$. Пусть $\tau = \{\tau_{n,j}, j = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbf{N}\}$ – рандомизирующая последовательность, не зависящая от $X$. Для $r > 0$ и $A \subset S^{d-1}$ с $\sigma(\partial A) = 0$ рассмотрим случайные величины

$$Z_k^{(n)} := \mathbf{1}_{\{\frac{X_k}{|X_k|} \in A,\ |X_k| > rb_n\}} - G(A, rb_n),$$

где

$$G(A, rb_n) = \mathbf{P}\left\{\frac{X_k}{|X_k|} \in A,\ |X_k| > rb_n\right\}.$$

Пусть

$$S_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} Z_j^{(n)}.$$

Отметим, что так как величины $Z_k^{(n)}$ ограничены, то у них существуют все моменты.

**Теорема 1.** *Предположим, что для некоторых $a, b$, $0 < b < a$, $C > 0$ и для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{E}\,|S_k^{(n)}|^a \leqslant Ck^b. \tag{10}$$

*Предположим также, что числа $k_n \geqslant n$ и растут достаточно быстро, а именно,*

$$\frac{n^a}{k_n^{a-b}} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{11}$$

*Тогда для схемы серий $\{\frac{X(\tau_{n,j})}{b_n},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ с вероятностью единица выполняется условие RV с теми же параметрами, что и для $X_0$.*

**Замечание 1.** Отметим, что в условиях теоремы не предполагается эргодичность. Однако, неявно она присутствует, так как для выполнения неравенства (10) приходится привлекать те или иные более сильные условия слабой зависимости последовательности $(X_k)$. В разделе 6 мы обсудим условия, обеспечивающие выполнение (10).

**Доказательство.** Так как при условии $\mathcal{F}_X$ случайные векторы $\{X(\tau_{n,j}),\ j=1,\dots,n\}$ независимы и одинаково распределены, то нам достаточно проверить, что при $n\to\infty$

$$n\,\mathbf{P}_T\left\{\frac{X(\tau_{n,1})}{|X(\tau_{n,1})|}\in A,\ |X(\tau_{n,1})|>rb_n\right\}\to\sigma(A)\cdot r^{-\alpha}. \tag{12}$$

Добавляя и вычитая $G(A,rb_n)$ в левой части (12), получим

$$n\,\mathbf{P}_T\{\dots\}=\frac{n}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n}[\mathbf{1}_{\left\{\frac{X_j}{|X_j|}\in A,\ |X_j|>rb_n\right\}}-G(A,rb_n)]+n\,G(A,rb_n).$$

Так как вектор $X_0$ лежит в области притяжения распределения $Q$, то для него выполнено условие $RV$, то есть,

$$n\,G(A,rb_n)\to\sigma(A)\,r^{-\alpha}.$$

Поэтому достаточно показать, что при $n\to\infty$

$$\Delta_n:=\frac{n}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n}[\mathbf{1}_{\left\{\frac{X_j}{|X_j|}\in A,\ |X_j|>rb_n\right\}}-G(A,rb_n)]\ \overset{\mathbf{P}}{\to}\ 0.$$

По неравенству Маркова, учитывая (10) и (11),

$$\mathbf{P}\{\Delta_n>t\}\leqslant\frac{\mathbf{E}\,|S_{k_n}^{(n)}|\cdot n^a}{t^a\cdot k_n^a}\leqslant\frac{C}{t^a}\cdot\frac{k_n^b\cdot n^a}{k_n^a}=\frac{C}{t^a}\cdot\frac{n^a}{k_n^{a-b}}\ \underset{n\to\infty}{\to}0. \qquad\square$$

## §5. Предельные теоремы

**5.1. Сходимость нормированных сумм.** Непосредственным следствием теоремы 1 является следующий результат.

**Теорема 2.** *Пусть $X=(X_k)$ – строго стационарная последовательность, такая что $X_0$ лежит в зоне притяжения строго устойчивого закона $Q$ с показателем $\alpha<2$, спектральной мерой $\sigma$ и нормировочными константами $(b_n)$.*

*Пусть $(\tau_{n,j},\ j=1,\dots,n)$ – рандомизирующая последовательность, не зависящая от $X$.*

*Если выполнены условия* (10) *и* (11), *то тогда*

$$U_n := \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} X(\tau_{n,j}) \ \Rightarrow\ Q.$$

**Доказательство.** В силу (12) для схемы серий $\{\frac{X(\tau_{n,j})}{b_n},\ j = 1, \dots, n\}$ с вероятностью единица выполняется условие $RV$, причем с одними и теми же характеристиками. Тогда с вероятностью единица условное распределение $U_n$ относительно $\mathcal{F}_X$ слабо сходится к $Q$, а это в соответствии с леммой 1 дает результат. □

**5.2. Сходимость точечных процессов.**

**Теорема 3.** *В условиях теоремы* 2 *имеет место слабая сходимость точечных процессов*

$$\mathcal{N}_n := \sum_{j=1}^{n} \delta_{\{\frac{X(\tau_{n,j})}{b_n}\}}$$

*к пуассоновскому точечному процессу* $\Pi_\alpha$ (*см.* (8)).

**Доказательство.** Так как для схемы серий $\{\frac{X(\tau_{n,j})}{b_n}\}$ с вероятностью единица выполнено условие $RV$, то в силу упомянутой выше теоремы Резника (см. [7, Proposition 3.21]) с вероятностью единица условное распределение процесса $\mathcal{N}_n$ относительно $\mathcal{F}_X$ слабо сходится к распределению $\Pi_\alpha$. Лемма 1 дает результат. □

**5.3. Сходимость максимумов.** Из доказанной теоремы о сходимости точечных процессов непосредственно выводится ряд следствий, мы остановимся на некоторых из них. Предположим, что $d = 1$. Пусть

$$M_n := \frac{1}{b_n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{X(\tau_{n,j})\};$$

$$m_n := \frac{1}{b_n} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \{X(\tau_{n,j})\}.$$

**Следствие 1.** *В условиях теоремы* 2 *имеет место сходимость:*

$$M_n \Rightarrow M := \max_{k>0} \{\varepsilon_k \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}\}; \tag{13}$$

$$m_n \Rightarrow m := \min_{k>0} \{\varepsilon_k \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}\}, \tag{14}$$

*где последовательности* $\{\varepsilon_k\}$ *и* $\{\Gamma_k\}$ *взяты из представления* (8) *для* $\Pi_\alpha$.

**Доказательство.** В силу [7, Proposition 3.13] отображения

$$f, g : \mathbf{K}_H \to \mathbf{R}^1,$$

$$f(\varkappa) = \max\{x \in \varkappa\}, \;\; g(\varkappa) = \min\{x \in \varkappa\},$$

являются непрерывными в *vague*-топологии. Поэтому применима теорема о сохранении слабой сходимости при отображениях. □

При $d \geqslant 1$ в качестве аналога экстремумов может рассматриваться выпуклая оболочка. Используя вышеприведенные аргументы, мы получим такой результат. Положим

$$V_n := \frac{1}{b_n} \operatorname{conv}\{X(\tau_{n,j}), \; j = 1, \ldots, n\}.$$

**Следствие 2.** *В условиях теоремы* 2

$$V_n \Rightarrow V := \operatorname{conv}\{\varepsilon_k \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}, k \in \mathbf{N}$$

*Отметим, что при* $d = 1$ *в пределе получаем сегмент* $[m, M]$. *При* $d > 1$, *если* $\operatorname{span}\{\operatorname{supp}\{\sigma\}\} = \mathbf{R}^d$, *то легко видеть, что* $V$ *будет с вероятностью единица политопом, содержащим* 0 *в своей внутренности.*

## §6. Достаточные условия для оценки моментов

Поскольку ростом последовательности $(k_n)$ мы можем управлять по своему произволу, то применение теоремы 1 сводится к проверке моментного неравенства (10). Неравенства такого типа широко исследуются в работах по предельным теоремам для процессов со слабой зависимостью – см., например, монографии [2, 5, 8]. Мы приведем здесь пару типичных примеров.

Пусть $\{Z_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ – строго стационарная последовательность случайных величин. Ее прошлое и будущее характеризуются $\sigma$-алгебрами

$$\mathcal{F}_{(-\infty,0]} = \sigma\{Z_j, j \leqslant 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_{[n,\infty)} = \sigma\{Z_j, j \geqslant n\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Напомним, что $\{\mathbf{Z}_j\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания (СП), если

$$\alpha(n) := \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_{(-\infty,0]} \\ B \in \mathcal{F}_{[n,\infty)}}} \bigl|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\bigr| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

и условию равномерно сильного перемешивания (РСП), если

$$\varphi(n) := \sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_{(-\infty,0]}\\ B\in\mathcal{F}_{[n,\infty)}}} |\mathbf{P}(B|A) - \mathbf{P}(B)| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

**Следствие 3.** *Предположим, что последовательность* $(X_k)$ *из* §4 *обладает свойством СП, причем*

$$\sum_1^\infty \alpha(k) < \infty. \tag{15}$$

*Тогда выполняется неравенство* (10) *с* $a = 2, b = 1$.

**Доказательство.** Случайные величины

$$Z_k^{(n)} = \mathbf{1}_{\{\frac{X_k}{|X_k|}\in A,\ |X_k|>rb_n\}} - G(rb_n).$$

ограничены, центрированы и имеют распределение бернуллиевского типа. Легко видеть, что

$$\operatorname{cov}(Z_0^n, Z_k^{(n)}) = \mathbf{P}\{X_0 \in K_r,\ X_k \in K_r\} - \mathbf{P}\{X_0 \in K_r\}\,\mathbf{P}\{X_k \in K_r\},$$

где $K_r \subset S^{d-1} \times (0,\infty)$, $K_r = A \times [r,\infty)$. Так что

$$|\operatorname{cov}(Z_0^{(n)}, Z_k^{(n)})| \leqslant \alpha(k).$$

В силу (15),

$$\sum_{k=1}^\infty |\operatorname{cov}(Z_0^{(n)}, Z_k^{(n)})| < \infty,$$

а это, как хорошо известно (см., например, [8, L.1.2]), дает неравенство

$$\mathbf{E}\,|\sum_{k=1}^n Z_k^{(n)}|^2 \leqslant \Delta n,$$

где $\Delta = \alpha(0) + 2\sum_{j=1}^\infty \alpha(j)$. □

При выполнении более сильного условия перемешивания необходимость оценки коэффициента перемешивания пропадает.

**Следствие 4.** *Если исходная последовательность* $(X_k)$ *обладает свойством РСП, то неравенство* (10) *выполняется с* $a = 2$ *и с* $b = 1+\varepsilon$ *при любом* $0 < \varepsilon < 1$.

**Доказательство.** Так как последовательность $(Z_k^n)_{k\in Z}$ строго стационарна, то для поведения дисперсии $\mathrm{Var}(S_k^{(n)})$ есть только две возможности (см. [5], Theorem 18.2.3):

(1) или $\limsup_k \mathrm{Var}(S_k^{(n)}) < \infty$

(2) или $\lim_k \mathrm{Var}(S_k^{(n)}) = \infty$.

В первом случае неравенство $\mathbf{E}\,(S_k^{(n)})^2 \leqslant Ck^b$ выполняется очевидным образом при любом $0 < b < 2$ (и это позволяет выбирать $(k_n)$ медленно растущей). Если выполнено второе соотношение, то по той же теореме 18.2.3 из [5] дисперсия имеет вид

$$\mathrm{Var}(S_k^{(n)}) = kh(k),$$

где $h$ – медленно меняющаяся функция. Поэтому $b = 1 + \varepsilon$ годится с любым $\varepsilon \in (0, 1)$. $\square$

## Список литературы


1. K. Bartkiewicz, A. Jakubowski, Th. Mikosch, O. Wintenberger, *Stable limits for sums of dependent infinite variance random variables.* - Probab. Theory Relat. Fields **150**, No. 3 (2011), 337–372.
2. R. C. Bradley, *Introduction to Strong Mixing Conditions, Volumes 1,2 and 3*, Kendrick Press, 2007.
3. A. V. Bulinsky, A. P. Shashkin, *Limit Theorems for Associated Random Fields and Related Systems.* World Scientific, 2007.
4. Yu. Davydov, A. Tempelman, *Randomized limit theorems for stationary ergodic processes and fields.* — Stoch. Processes Appl., **174** (2024).
5. I. A. Ibragimov, Y. V. Linnik, *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1971.
6. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, V. 2*, Wiley, 1957.
7. S. I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Berlin, Springer, 1987.
8. E. Rio, *Inequalities and limit theorems for weakly dependent sequences.* HAL Id: cel-00867106 https://cel.hal.science/cel-00867106v2, 2011.
9. G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, London, New York, Chapman and Hall, 1994.
10. A. Tempelman, *Randomized multivariate central limit theorems for ergodic homogeneous random fields.* — Stoch. Processes Appl. **143** (2022), 89–105.



Davydov Yu. A., Rahmankin D. S. Limit theorems for randomized stationary processes and stable laws.

The goal of this work is to find conditions under which partial sums of strictly stationary sequences are attracted to a non-Gaussian stable limit.

In contrast to the results available in the literature, we come away from the traditional methods and use a new approach based on randomization of the initial data. His effectiveness is confirmed by examples. Thus, it turned out that in the case of uniformly strong mixing, without any conditions on the mixing coefficient, the convergence of randomized sums occurs whenever when the marginal distribution lies in the area of attraction of a stable law.

St. Petersburg State University, Russia;
and Laboratoire Paul Painlevé
Université de Lille, France
*E-mail*: davydov.youri@gmail.com

St. Petersburg State University, Russia
*E-mail*: s.9166556309@yandex.ru

Поступило 17 октября 2024 г.