Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев

УЛУЧШЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ АРАКА К ПРОБЛЕМЕ ЛИТТЛВУДА–ОФФОРДА

§1. Введение

Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. В данной работе изучается поведение функций концентрации взвешенных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$ относительно арифметической структуры коэффициентов $a_k \in \mathbf{R}^d$ в контексте проблемы Литтлвуда–Оффорда. Обсуждается связь между обратными принципами, предложенными Нгуеном, Тао и Ву, и аналогичными принципами, сформулированными Араком в его работах 1980-х годов. Мы приводим некоторые усовершенствованные (более общие и более точные) следствия неравенств Арака. Используя наши недавние результаты [15], мы показываем, что зависимость констант от задействованных распределений X_k может быть уточнена. Кроме того, мы также улучшаем оценки, используемые в методе наименьшего общего знаменателя Рудельсона и Вершинина.

Функция концентрации $\mathbf{R}^d$-значного случайного вектора Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ определяется как

$$Q(F, \tau) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y \in x + \tau B), \quad \tau \geqslant 0,$$

где через $B = \{x \in \mathbf{R}^d : \|x\| \leqslant 1/2\}$ обозначен центрированный евклидов шар радиуса $1/2$.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$, где $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, n$. Начиная с основополагающих работ Литтлвуда и Оффорда [20] и Эрдёша [9], активно изучается поведение функций концентрации взвешенных сумм $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$. Мы будем обозначать через $F_a = \mathcal{L}(S_a)$ распределение S_a. Историю первых шагов решения проблемы можно найти в работах [13] и [22] (см. также [4, 5, 12, 19, 21, 24, 25, 28, 29, 31, 32]).

Ключевые слова: функции концентрации, неравенства, проблема Литтлвуда–Оффорда, суммы независимых случайных векторов.

Недавние достижения по оцениванию вероятностей сингулярности случайных матриц [4, 5, 19, 31] основаны на методе Рудельсона и Вершинина [24, 25, 32] *наименьшего общего знаменателя.* Заметим, что результаты [12, 25, 32] (касающиеся проблемы Литтлвуда–Оффорда) были уточнены и улучшены в работах [6, 7, 8].

Сравнительно недавно Тао и Ву [28], а также Нгуен и Ву [21] предложили так называемые *обратные принципы* в задаче Литтлвуда–Оффорда. В статьях [13] и [14] мы обсуждали связи между этими обратными принципами и аналогичными принципами, сформулированными Араком (см. [1, 2, 3]). В одномерном случае Арак нашел связь функции концентрации суммы с арифметической структурой носителей распределений независимых случайных величин для *произвольных* распределений слагаемых. Используя эти результаты, он решил в работе [2] старую задачу, поставленную А. Н. Колмогоровым [18].

В работе [14] мы показали, что следствие неравенств Арака дает результаты в задаче Литтлвуда–Оффорда большей общности и большей точности по сравнению с теми, которые были доказаны в [13]. В настоящей статье, используя наши недавние результаты [15], мы показываем, что зависимость констант от распределений $\mathcal{L}(X)$ может быть уточнена. Более того, в разделе 3 мы улучшаем оценки, полученные в рамках метода наименьшего общего знаменателя.

Сначала введем необходимые обозначения. Ниже $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$ будут обозначать множества всех положительных и неотрицательных целых чисел соответственно. Символ c будет использоваться для абсолютных положительных констант. Заметим, что c может быть разным в разных (или даже в одних и тех же) формулах. Будем писать $A \ll B$, если $A \leqslant cB$. Кроме того, мы будем использовать обозначение $A \asymp B$, если $A \ll B$ и $B \ll A$. Если соответствующая константа зависит, скажем, от r, будем писать $A \ll_r B$ и $A \asymp_r B$. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ – случайный вектор с распределением $F = \mathcal{L}(\xi)$, обозначим $F^{(j)} = \mathcal{L}(\xi_j)$, $j = 1, \dots, d$. Пусть $\widehat{F}(t) = \mathbf{E} \exp\big(\, i\,\langle t, \xi\rangle\big)$, $t \in \mathbf{R}^d$, – характеристическая функция распределения F. Здесь $\langle \,\cdot\,, \,\cdot\, \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.

Для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ обозначим $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = x_1^2 + \dots + x_d^2$ и $|x| = \max_j |x_j|$. Обозначим через $[K]_\tau$ замкнутую τ-окрестность множества K по норме $|\cdot|$. Пусть E_y — распределение, сосредоточенное в точке $y \in \mathbf{R}^d$. Произведения и степени мер будут пониматься в смысле свертки. Таким образом, мы пишем W^k для k-кратной свертки меры W, $W^0 = E_0$. Для распределения W мы будем также обозначать

$$e(\alpha\, W) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k\, W^k}{k!}, \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

Хорошо известно, что распределение $D = e(\alpha\, W)$ безгранично делиио со спектральной мерой Леви $\alpha\, W$ и $\widehat{D}(t) = \exp\bigl(\alpha\,\bigl(\widehat{W}(t) - 1\bigr)\bigr)$. Если распределение D безгранично делимо, то D^{λ}, $\lambda \geqslant 0$, – безгранично делимое распределение с характеристической функцией $\widehat{D}^{\lambda}(t)$. Заметим, что $(e(\alpha\, W))^{\lambda} = e(\alpha\,\lambda\, W)$.

Для конечного множества K мы обозначаем через $|K|$ количество элементов $x \in K$. Символ $\times$ используется для обозначения прямого произведения множеств. Мы пишем $O(\,\cdot\,)$, если соответствующие константы зависят от параметров, названных “константами” в формулировках, но не от n.

Элементарные свойства функций концентрации хорошо известны (см., например, [3, 17, 23]). В частности, ясно, что

$$Q(F, \mu) \ll_d \bigl(1 + \lfloor \mu/\lambda \rfloor\bigr)^d\, Q(F, \lambda), \quad \text{для любых } \mu, \lambda > 0, \tag{2}$$

где $\lfloor x \rfloor$ – наибольшее целое число k, такое что $k \leqslant x$. Следовательно,

$$Q(F, c\,\lambda) \asymp_d\, Q(F, \lambda). \tag{3}$$

Пусть $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$ фиксированы, $h \in \mathbf{R}^r$ – произвольный r-мерный вектор и пусть V – произвольное замкнутое симметричное выпуклое подмножество в $\mathbf{R}^r$, содержащее не более m точек с целочисленными координатами. Определим $\mathcal{K}_{r,m}$ как совокупность всех множеств вида

$$K = \bigl\{\langle \nu, h\rangle : \nu \in \mathbf{Z}^r \cap V\bigr\} \subset \mathbf{R}. \tag{4}$$

Мы называем такие иножества ВОАП (выпуклыми обобщенными арифметическими прогрессиями, см. [16]) по аналогии с обобщенными арифметическими прогрессиями (ОАП), использованными в недавних исследованиях по проблеме Литтлвуда–Оффорда. Определение ОАП приведено ниже. В случае $r = 0$ класс $\mathcal{K}_{r,m} = \mathcal{K}_{0,m}$ состоит из единственного множества $\{0\}$, имеющего нуль единственным элементом.

Для любой борелевской меры W на $\mathbf{R}$ и $\tau \geqslant 0$ определим $\beta_{r,m}(W, \tau)$ соотношением

$$\beta_{r,m}(W, \tau) = \inf_{K \in \mathcal{K}_{r,m}} W\{\mathbf{R} \setminus [K]_\tau\}, \tag{5}$$

где $[K]_\tau$ – замкнутая τ-окрестность множества K.

Следующее определение дано в [27] (см. также [26]).

Пусть $r \in \mathbf{N}_0$ – целое неотрицательное число, $L = (L_1, \dots, L_r)$ – набор из r положительных вещественных чисел, а $g = (g_1, \dots, g_r)$ – набор из r векторов пространства $\mathbf{R}^d$. Тройка $P = (L, g, r)$ называется симметричной обобщенной арифметической прогрессией (ОАП) в $\mathbf{R}^d$. Здесь r — ранг, $L_1, \dots, L_r$ — размерности, а $g_1, \dots, g_r$ – образующие ОАП P. Мы определяем образ $\mathrm{Image}\,(P) \subset \mathbf{R}^d$ ОАП P как множество

$$\mathrm{Image}(P) = \big\{m_1 g_1 + \dots + m_r g_r : -L_j \leqslant m_j \leqslant L_j,\ m_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \dots, r\big\}.$$

Для $t > 0$ введем t-расширение P^t ОАП P как симметричную ОАП $P^t = (tL, g, r)$ с образом $\mathrm{Image}(P^t)$ равным

$$\big\{m_1 g_1 + \dots + m_r g_r : -tL_j \leqslant m_j \leqslant tL_j,\ m_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \dots, r\big\}.$$

Определим размер P равенством $\mathrm{size}(P) = |\,\mathrm{Image}(P)|$.

Фактически $\mathrm{Image}(P)$ – это образ целочисленного параллелепипеда

$$B = \big\{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbf{Z}^r : -L_j \leqslant m_j \leqslant L_j\big\}$$

при линейном отображении

$$\Phi : (m_1, \dots m_r) \in \mathbf{Z}^r \to m_1 g_1 + \dots + m_r g_r.$$

Мы говорим, что ОАП P *собственная*, если это отображение взаимно однозначно, или (что эквивалентно) если

$$\mathrm{size}(P) = \prod_{j=1}^{r} \big(2\,\lfloor L_j \rfloor + 1\big). \tag{6}$$

Для несобственных ОАП мы, конечно, имеем:

$$\mathrm{size}(P) < \prod_{j=1}^{r} \big(2\,\lfloor L_j \rfloor + 1\big). \tag{7}$$

В случае $r = 0$ векторы L и g не имеют элементов и образ ОАП P состоит только из нулевого вектора $0 \in \mathbf{R}^d$.

Напомним, что выпуклое тело в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^r$ – это выпуклое компактное множество с непустой внутренностью. Следующая лемма 1 содержится в теореме 1.6 книги [27].

Лемма 1. *Пусть V – выпуклое симметричное тело в $\mathbf{R}^r$, и пусть Λ – решетка в $\mathbf{R}^r$. Тогда существует симметричная собственная ОАП*

P в Λ ранга $l \leqslant r$, такая что

$$\mathrm{Image}(P) \subset V \cap \Lambda \subset \mathrm{Image}\big(P^{(c_1 r)^{3r/2}}\big) \tag{8}$$

с некоторой абсолютной постоянной $c_1 \geqslant 1$.

Следствие 1. *В условиях леммы 1 справедливо неравенство*

$$\mathrm{size}(P^{(c_1 r)^{3r/2}}) \leqslant \big(2\,(c_1\,r)^{3r/2}+1\big)^r\,|\,V\cap\Lambda\,|\,. \tag{9}$$

Оценивая функции концентрации $Q(F_a,\tau)$ в проблеме Литтлвуда–Оффорда, можно свести задачу к оцениванию функций концентрации некоторых симметричных безгранично делимых распределений. Соответствующие утверждения содержатся ниже в леммах 2 и 3.

Введем распределение H в пространстве $\mathbf{R}^d$ с характеристической функцией

$$\widehat{H}(t)=\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos\langle\,t,a_k\rangle\,\big)\Big),\quad t\in\mathbf{R}^d. \tag{10}$$

Ясно, что H – симметричное безгранично делимое распределение.

Пусть $\widetilde{X}=X_1-X_2$ – симметризованная случайная величина, где X_1 и X_2 – независимые одинаково распределеннные величины, участвующие в определении S_a. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $G=\mathcal{L}(\widetilde{X})$. Для $\delta\geqslant 0$ положим

$$p(\delta)=G\big\{\{z:|z|>\delta\}\big\}. \tag{11}$$

Лемма 2. *Для любых $\varkappa,\tau>0$ мы имеем*

$$Q(F_a,\tau)\ll_d Q(H^{p(\tau/\varkappa)},\varkappa). \tag{12}$$

Лемма 2 была основным орудием исследования в наших недавних работах о применении неравенств Арака к проблеме Литтлвуда–Оффорда (см. [13] и [14]).

Следует отметить, что H^b, $b\geqslant 0$, – симметричное безгранично делимое распределение со спектральной мерой Леви $\frac{nb}{2}\,M^*$, где

$$M^*=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\big(E_{a_k}+E_{-a_k}\big). \tag{13}$$

На самом деле

$$H^b=e\Big(\frac{nb}{2}\,M^*\Big). \tag{14}$$

Арак [1, 2] обнаружил связь величины функции концентрации безгранично делимого распределения с арифметической структурой носителя его спектральной меры. Что касается леммы 2, то из этой связи следует, что если функция концентрации безгранично делимого распределения не мала, то его спектральная мера сосредоточена вблизи ВОАП K, имеющей некоторую простую арифметическую структуру. Согласно лемме 1 и следствию 1, эта ВОАП K содержится в образе ОАП, ранг и размер которой сравнимы с рангом и размером K. Доказательство леммы 2 приведено в [13]. Оно довольно элементарно и основано на известных свойствах функций концентрации.

Согласно (2), из леммы 2 вытекает следствие 2.

Следствие 2. *Для любых $\varkappa, \tau, \delta > 0$ мы имеем*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \big(1 + \lfloor \varkappa/\delta \rfloor\big)^d \, Q(H^{p(\tau/\varkappa)}, \delta). \tag{15}$$

Полезно быть свободным в выборе δ в (15). В нашей недавней статье [15] получено более точное утверждение, чем лемма 2, см. лемму 3 ниже. Оно дает содержательные оценки, если $p(\tau/\varkappa)$ мало, даже если $p(\tau/\varkappa) = 0$.

Лемма 3. *Для любых $\varkappa, \tau > 0$ мы имеем*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \lambda^{-1} \, Q(H^{\lambda}, \varkappa), \tag{16}$$

где

$$\lambda = \lambda_d(\tau/\varkappa) = \int\limits_{z \in \mathbf{R}} \big(1 + \lfloor \tau(\varkappa|z|)^{-1} \rfloor\big)^{-d} \, G\{dz\}. \tag{17}$$

Ясно, что $\lfloor \tau(\varkappa|z|)^{-1} \rfloor = 0$, если $|z| > \tau/\varkappa$. Поэтому $\lambda = \lambda_d(\tau/\varkappa) \geqslant p(\tau/\varkappa)$ и, следовательно, $Q(H^{\lambda}, \varkappa) \leqslant Q(H^{p(\tau/\varkappa)}, \varkappa)$. Таким образом, если $\lambda \gg_d 1$ существенно больше, чем $p(\tau/\varkappa)$, то неравенство (16) из леммы 3 сильнее неравенства (12) из леммы 2. Следовательно, использование неравенства (16) влечет более точные оценки, чем те, которые были получены ранее на основе неравенства (12).

Леммы 2 и 3 представляют собой весьма общие утверждения, поскольку $\varkappa, \tau > 0$ произвольны. Кроме того, в правых частях неравенств (12) и (16) зависимость F_a от $\mathcal{L}(X)$ сводится к зависимости от $p(\tau/\varkappa)$ или $\lambda_d(\tau/\varkappa)$, при этом зависимость от a сводится к зависимости от H. Заметим, что распределение H также можно записать в виде

$H = F_a = \mathcal{L}(S_a)$, где

$$\mathcal{L}(X) = e\Big(\frac{1}{4}\, E_1\Big) * e\Big(\frac{1}{4}\, E_{-1}\Big) \tag{18}$$

представляет собой симметризованное распределение Пуассона с параметром $1/4$.

Теперь сформулируем теорему 1, которая является одним из вариантов результата Арака, см. [2, 3]. Это частный случай теоремы 4.3 главы II книги [3].

Теорема 1. *Пусть $D = e(\alpha\, W)$, где $\alpha > 0$, а W – вероятностное распределение на вещественной прямой. Пусть $\tau > 0$, $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда*

$$Q(D,\tau) \leqslant c_2^{r+1}\bigg(\frac{1}{m\sqrt{\alpha\,\beta_{r,m}(W,\tau)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(\alpha\,\beta_{r,m}(W,\tau))^{(r+1)/2}}\bigg), \tag{19}$$

где c_2 – некоторая абсолютная постоянная.

Из следствия 2 и теоремы 1 вытекает следующая теорема 2.

Теорема 2. *Пусть $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $d = 1$, $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда*

$$Q(F_a,\tau) \ll_d c_3^{r+1}\big(1 + \lfloor \varkappa/\delta \rfloor\big)\bigg(\frac{1}{m\sqrt{n\,p(\tau/\varkappa)\,\beta_{r,m}(M^*,\delta)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(n\,p(\tau/\varkappa)\,\beta_{r,m}(M^*,\delta))^{(r+1)/2}}\bigg), \tag{20}$$

где M^* определено в (13), а c_3 – некоторая абсолютная постоянная.

Чтобы доказать теорему 2, достаточно применить следствие 2 и теорему 1, учитывая, что $H^{p(\tau/\varkappa)}$ — безгранично делимое распределение, спектральная мера Леви которого равна $n\,p(\tau/\varkappa)\,M^*/2$ (см. (14)). Введем также $M = \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n} E_{a_k}$. Очевидно, что $M \leqslant M^*$ и $\beta_{r,m}(M,\delta) \leqslant \beta_{r,m}(M^*,\delta)$. Ясно, что значение меры $\sum\limits_{k=1}^{n} E_{a_k}$ на множестве K – это количество a_k, принадлежащих множеству K. Поэтому, грубо говоря, $\beta_{r,m}(M,\delta)$ – это $\frac{1}{2n}$, умноженное на количество a_k, не принадлежащих δ-окрестности ВОАП $K \in \mathcal{K}_{r,m}$.

Аналогично, из леммы 3 и теоремы 1 вытекает следующая теорема 3.

Теорема 3. *Пусть* $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $d = 1$, $r \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{N}$. *Предположим, что* $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$. *Тогда*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d c_4^{r+1}\big(1 + \lfloor \varkappa/\delta \rfloor\big) \left(\frac{1}{m\sqrt{n\,\beta_{r,m}(M^*, \delta)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(n\,\beta_{r,m}(M^*, \delta))^{(r+1)/2}} \right), \quad (21)$$

где M^* *определено в* (13), *а* c_4 *– некоторая абсолютная постоянная.*

Пусть $d = 1$ и $q = Q(F_a, \tau)$, $\varkappa, \tau > 0$. Если q относительно велико (например, если $q \geqslant n^{-A}$, как в работах Тао и Ву [28], а также Нгуена и Ву [21]), то из теоремы 3 следует, что $n\,\beta_{r,m}(M^*, \delta)$ и, следовательно, $n\,\beta_{r,m}(M, \delta)$ малы. Поэтому, напоминая, что $M = \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n} E_{a_k}$, мы видим, что набор весов $\{a_k\}$ хорошо аппроксимируется δ-окрестностью $[K]_\delta$ некоторой ВОАП $K \in \mathcal{K}_{r,m}$.

Пусть фиксированы целые числа $r \in \mathbf{N}_0$ и $s \in \mathbf{N}$, пусть h – произвольный r-мерный вектор, и пусть P – симметричная ОАП с образом $\mathrm{Image}(P) \subset \mathbf{Z}^r$, содержащим не более s точек с целочисленными координатами. Определим $\mathcal{P}_{r,s}$ как совокупность всех множеств вида

$$K = \big\{\langle \nu, h \rangle : \nu \in \mathrm{Image}(P)\big\} \subset \mathbf{R}. \quad (22)$$

Для любой борелевской меры W на $\mathbf{R}$ и $\tau \geqslant 0$ определим $\gamma_{r,s}(W, \tau)$ соотношением

$$\gamma_{r,s}(W, \tau) = \inf_{K \in \mathcal{P}_{r,s}} W\{\mathbf{R} \setminus [K]_\tau\}. \quad (23)$$

Основным результатом работы А. Ю. Зайцева [33] является следующая теорема 4. Теорема 4 сформулирована в терминах симметричных ОАП. Она следует из теоремы 1 и леммы 1.

Теорема 4. *Пусть* $D = e(\alpha W)$, *где* $\alpha > 0$, *а* W *– вероятностное распределение на вещественной прямой. Пусть* $\tau \geqslant 0$, $r \in \mathbf{N}_0$, $s \in \mathbf{N}$. *Тогда*

$$Q(D, \tau) \leqslant c_5^{r+1} \left(\frac{(c_6\, r + 1)^{3r^2/2}}{s\sqrt{\alpha\,\gamma_{r,s}(W, \tau)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(\alpha\,\gamma_{r,s}(W, \tau))^{(r+1)/2}} \right), \quad (24)$$

где c_5, c_6 *– некоторые абсолютные постоянные.*

Аналогично, из леммы 3 и теоремы 4 вытекает следующая теорема 5. Мы могли бы использовать теорему 5 для получения более прямого доказательства теорем 7 и 8.

Теорема 5. *Пусть* $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $d = 1$, $r \in \mathbf{N}_0$, $s \in \mathbf{N}$. *Предположим, что* $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$. *Тогда*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d c_7^{r+1}\big(1 + \lfloor \varkappa/\delta \rfloor\big) \left(\frac{(c_8\, r + 1)^{3r^2/2}}{s\sqrt{n\, \gamma_{r,s}(M^*, \delta)}} + \frac{(r+1)^{5r/2}}{(n\, \gamma_{r,s}(M^*, \delta))^{(r+1)/2}} \right), \tag{25}$$

где M^* *определено в* (13), *а* c_7, c_8 *– некоторые абсолютные постоянные.*

§2. Обратные принципы

В работах [13] и [14] мы сравнили наши результаты с результатами Нгуена, Тао и Ву [21, 22, 28, 30].

Некоторое время назад Тао и Ву [28] сформулировали в дискретном случае (с $\tau = 0$) так называемый «обратный принцип» в проблеме Литтлвуда–Оффорда, состоящий в том, что

Множество $a = (a_1, \dots, a_n)$ *с большой вероятностью малого шара должно обладать сильной аддитивной структурой.* (26)

Здесь “большая вероятность малого шара” означает, что

$$Q(F_a, 0) = \max_x \mathbf{P}\{S_a = x\} \geqslant n^{-A}$$

с некоторой постоянной $A > 0$. “Сильная аддитивная структура” означает, что большая часть векторов $a_1, \dots, a_n$ принадлежит ОАП ограниченного размера.

Нгуен и Ву [21] распространили этот обратный принцип на непрерывный случай (со строго положительным аргументом функции концентрации $\tau_n > 0$), получив, в частности, следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* X *– вещественная случайная величина, удовлетворяющая условию*

$$G\{\{x \in \mathbf{R} \colon C_1 < |x| < C_2\}\} \geqslant C_3, \tag{27}$$

с некоторыми постоянными C_1, C_2, C_3. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$, $A > 0$ – *постоянные, а* $\tau = \tau_n > 0$ – *параметр, который может зависеть от* n. *Предположим, что* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ — *мультиподмножество* $\mathbf{R}^d$, *такое что* $q = Q(F_a, \tau) \geqslant n^{-A}$. *Тогда для любого числа* n' *между* n^ε *и* n *существует симметричная собственная ОАП* P *с образом* K, *такая что*

1. *По крайней мере* $n - n'$ *элементов* a τ*-близки к* K.
2. P *имеет небольшой ранг* $r = O(1)$ *и небольшой размер*

$$|K| \leqslant \max\bigl\{O\bigl(q^{-1}(n')^{-1/2}\bigr), 1\bigr\}. \tag{28}$$

Теорема 6 утверждает, что большая часть векторов $a_1, \ldots, a_n$ принадлежит τ-окрестности образа ОАП ограниченного размера.

Теорема 3 из [14] (представленная далее как теорема 7) имеет аналогичную формулировку в случае $d = 1$. Она выводится с использованием теоремы 2 настоящей статьи и также содержит положительные параметры $\tau, \varkappa, \delta$, такие что $\delta \leqslant \min\{\varkappa, \tau\}$. Величина δ отвечает за размер окрестности образа ОАП, которая покрывает бóльшую часть векторов $a_1, \ldots, a_n$. Число n' — это снова количество тех a_j, которые могут быть не аппроксимированы. Условие $n^\varepsilon \leqslant n' \leqslant n$ заменяется для *произвольного* фиксированного $r \in \mathbf{N}_0$ на (29). Число r здесь является рангом аппроксимирующей ОАП. Ее размер оценивается сверху в (30). Сравнивая (30) с (28), мы видим, что в (30) зависимость констант от $\mathcal{L}(X)$ задана в явном виде через зависимость от $p(\tau/\varkappa)$. То же самое можно сказать и об условии (29). Это связано с использованием теоремы 2. Наша теорема 3 сильнее теоремы 2 при условии, что $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$, поскольку $p(\tau/\varkappa) \leqslant \lambda_1(\tau/\varkappa)$. Отметим также, что в случае, когда $\varkappa = \delta = \tau$ в теореме 7, можно выбрать $r = O(1)$ так, что условия $q \geqslant n^{-A}$ и $n^\varepsilon \leqslant n' \leqslant n$ влекут (29) для достаточно больших n. Тем самым, одномерный вариант теоремы 6 вытекает из теоремы 7. Следует также отметить, что некоторые результаты Нгуена и Ву [21] нельзя вывести из теоремы 7.

Наши основные результаты – это теоремы 8 и 16. Они являются усилениями теорем 3 и 9 из [14], которые были доказаны с помощью леммы 2 настоящей статьи. Теперь мы можем использовать более точную лемму 3, заменив в утверждениях [14] $p(\tau/\varkappa)$ на $\lambda_1(\tau/\varkappa)$. Заметим, что $p(\tau/\varkappa)$ может быть малым, даже равным нулю, в то время как $\lambda_1(\tau/\varkappa)$ всегда строго положительно, если распределение G не вырождено.

Теорема 7. *Пусть* $d = 1$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $\delta \leqslant \min\{\varkappa, \tau\}$, *и* $q = Q(F_a, \tau)$. *Существуют положительные абсолютные константы* c_9–c_{12}, *такие что для любого фиксированного* $r \in \mathbf{N}_0$, *и любого* $n' \in \mathbf{N}$, *удовлетворяющего неравенствам*

$$\left(2\, c_9^{r+1}\, (r+1)^{5r/2}\, \varkappa / q\, \delta\right)^{2/(r+1)} / p(\tau/\varkappa) < n' \leqslant n, \tag{29}$$

существуют $m \in \mathbf{N}$ *и ВОАП* $K^*, K^{**} \subset \mathbf{R}$, *имеющие ранги* $\leqslant r$ *и размеры* $\ll m$ *и* $\ll c(r)\, m$ *соответственно и такие, что*

1. *По крайней мере* $n - 2\,n'$ *координат* a_k *вектора* a δ-*близки к* K^*, *то есть* $a_k \in [K^*]_\delta$ (*это означает, что для этих координат* a_k *существуют* $y_k \in K^*$, *такие что* $|a_k - y_k| \leqslant \delta$).

2. *Число* m *удовлетворяет неравенству*

$$m \leqslant \frac{2\, c_9^{r+1}\, \varkappa}{q\, \delta\, \sqrt{p(\tau/\varkappa)\, n'}} + 1, \tag{30}$$

3. *Множество* K^* *содержится в образе* $\overline{K}$ *симметричной ОАП* $\overline{P}$, *имеющей ранг* $\bar{l} \leqslant r$, *размер* $\ll (c_{10}\, r)^{3r^2/2} m$ *и генераторы* $\overline{g}_j$, $j = 1, \dots, \bar{l}$, *удовлетворяющие неравенству* $\left|\overline{g}_j\right| \leqslant 2\, r\, \|a\| / \sqrt{n'}$.

4. *Множество* K^* *содержится в образе* $\overline{\overline{K}}$ *собственной симметричной ОАП* $\overline{\overline{P}}$, *имеющей ранг* $\bar{\bar{l}} \leqslant r$ *и размер* $\ll (c_{11}\, r)^{15r^2/2} m$.

5. *По крайней мере* $n - 2\,n'$ *координат вектора* a δ-*близки к* K^{**}.

6. *Множество* K^{**} *содержится в образе* $\widetilde{K}$ *собственной симметричной ОАП* $\widetilde{P}$, *имеющей ранг* $\widetilde{l} \leqslant r$, *размер* $\ll (c_{12}\, r)^{21r^2/2} m$ *и генераторы* $\widetilde{g}_j$, $j = 1, \dots, \widetilde{l}$, *удовлетворяющие оценке* $\left|\widetilde{g}_j\right| \leqslant 2\, r\, \|a\| / \sqrt{n'}$.

Теорема 8. *Утверждение теоремы* 7 *остается верным после замены* $p(\tau/\varkappa)$ *на* $\lambda_1(\tau/\varkappa)$ *при условии, что* $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$.

Формулировки теорем 7 и 8 довольно громоздки, но это плата за их общность. В частных случаях утверждения могут быть упрощены, например, при $\varkappa = \delta$ или при $\varkappa = \tau$.

Утверждения теорем 7 и 8 нетривиальны для каждого фиксированного r, начиная с $r = 0$. В этом случае $m = 1$ и теоремы 7 и 8 дают оценки для числа координат a_k вектора a, которые находятся вне интервала $[-\delta, \delta]$.

Теорема 7 и, следовательно, теорема 8 сформулированы для одномерных a_k, $k = 1, \dots, n$. Однако можно показать, что теоремы 7 и 8 обеспечивают достаточно богатые арифметические свойства для множества $a = (a_1, \dots, a_n) \in \left(\mathbf{R}^d\right)^n$ и в многомерном случае (см. теоремы 9 и 10 ниже). Достаточно применить теоремы 7 и 8 к распределениям $F_a^{(j)}$, $j=1,\dots,d$, координат вектора S_a.

Введем векторы $a^{(j)}=(a_{1j},\dots,a_{nj})$, $j=1,\dots,d$. Очевидно, что $F_a^{(j)}=F_{a^{(j)}}$.

Теорема 9. *Пусть $d>1$, $q_j=Q(F_a^{(j)},\tau_j)$, $\varkappa_j,\delta_j,\tau_j>0$, причем $\delta_j\leqslant\min\{\varkappa_j,\tau_j\}$, $j=1,\dots,d$. Ниже c_9–c_{12} – положительные абсолютные константы из теоремы 7. Предположим, что $a=(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbf{R}^d)^n$ – это мультиподмножество $\mathbf{R}^d$. Пусть $r_j\in\mathbf{N}_0$, и $n_j'\in\mathbf{N}$, $j=1,\dots,d$, удовлетворяют неравенствам*

$$\big(2\,c_9^{r_j+1}\,(r_j+1)^{5r_j/2}\,\varkappa_j\big/q_j\,\delta_j\,\big)^{2/(r_j+1)}\big/p(\tau_j/\varkappa_j)\leqslant n_j'\leqslant n,\tag{31}$$

Тогда для каждого $j=1,\dots,d$ существуют $m_j\in\mathbf{N}$ и ВОАП K_j^*, $K_j^{**}\subset\mathbf{R}$, имеющие ранги $\leqslant r_j$ и размеры $\ll m_j$ и $\ll c(r_j)\,m_j$ соответственно и такие, что

1. *По крайней мере $n-2\,n_j'$ элементов a_{kj} из $a^{(j)}$ δ_j-близки к K_j^*, то есть $a_{kj}\in[K_j^*]_{\delta_j}$ (это означает, что для этих элементов a_{kj} существуют $y_{kj}\in K_j^*$, такие что $|a_{kj}-y_{kj}|\leqslant\delta_j$).*

2. *m_j удовлетворяют неравенствам $m_j\leqslant w_j$, где*

$$w_j=\frac{2\,c_9^{r_j+1}\,\varkappa_j}{q_j\,\delta_j\,\sqrt{p(\tau_j/\varkappa_j)\,n_j'}}+1,\tag{32}$$

3. *Множества K_j^* содержатся в образах $\overline{K}_j$ симметричных ОАП $\overline{P}_j$, имеющих ранги $\bar{l}_j\leqslant r_j$, размеры $\ll(c_{10}\,r_j)^{3r_j^2/2}m_j$ и генераторы $\overline{g}_p^{(j)}$, $p=1,\dots,\bar{l}_j$, удовлетворяющие оценкам $\big|\overline{g}_p^{(j)}\big|\leqslant 2\,r_j\,\big\|a^{(j)}\big\|\big/\sqrt{n_j'}$.*

4. *Множества K_j^* содержатся в образах $\overline{\overline{K}}_j$ собственных симметричных ОАП $\overline{\overline{P}}_j$, имеющих ранги $\bar{\bar{l}}_j\leqslant r_j$ и размеры $\ll(c_6\,r_j)^{15r_j^2/2}m_j$.*

5. *По крайней мере $n-2\,n_j'$ элементов $a^{(j)}$ δ_j-близки к K_j^{**}.*

6. *ВОАП K_j^{**} содержатся в образах $\widetilde{K}_j$ собственных симметричных ОАП $\widetilde{P}_j$, имеющих ранги $\widetilde{l}_j\leqslant r_j$, размеры $\ll(c_{12}\,r_j)^{21r_j^2/2}m_j$ и генераторы $\widetilde{g}_p^{(j)}$, $p=1,\dots,\widetilde{l}_j$, удовлетворяющие оценкам $\big|\widetilde{g}_p^{(j)}\big|\leqslant 2\,r_j\,\big\|a^{(j)}\big\|\big/\sqrt{n_j'}$.*

Многомерный вариант теоремы 6 следует из теоремы 9. Это установлено в [14, теорема 5]. Мы использовали, что условие $q \geqslant n^{-A}$ теоремы 6 влечет условие $Q(F_a^{(j)}, \tau) \geqslant n^{-A}$, $j = 1, \ldots, d$, [14, теорема 5], поскольку $Q(F_a^{(j)}, \tau) \geqslant Q(F_a, \tau)$.

В теореме 9 аппроксимирующие ОАП для a являются прямыми произведениями ОАП, аппроксимирующих для $a^{(j)}$.

Теорема 10. *Утверждение теоремы* 9 *остается верным после замены* $p(\tau_j/\varkappa_j)$ *на* $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j)$ *при условии, что* $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j) \gg 1$, $j = 1, \ldots, d$.

Теоремы 7–10 имеют неасимптотический характер. Они дают информацию об арифметической структуре $a = (a_1, \ldots, a_n)$ без предположений типа $q \geqslant n^{-A}$, наложенных в теореме 6. Теоремы 7–10 сформулированы для *фиксированного* n, причем зависимость констант от параметров и от $\mathcal{L}(X)$ указана явно.

Следующая теорема 11 – это [14, теорема 7]. Она вытекает из теоремы 7.

Теорема 11. *Пусть* $\theta, A, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ *и* $B, D \geqslant 0$ *– некоторые константы, причем* $\theta > D$. *Пусть* $b_n, \varkappa_n, \delta_n, \tau_n, \rho_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *– зависящие от* n *неслучайные параметры, удовлетворяющие соотношениям* $p(\tau_n/\varkappa_n) \geqslant \varepsilon_3\, b_n^{-D}$, $\varepsilon_4\, b_n^{-B} \leqslant \rho_n = \delta_n/\varkappa_n \leqslant 1$, $\delta_n \leqslant \tau_n$, *для всех* $n \in \mathbf{N}$, *и* $b_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Предположим, что* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n$ *— это мультиподмножество* $\mathbf{R}^d$, *такое что* $q_j = Q(F_a^{(j)}, \tau_n) \geqslant \varepsilon_1\, b_n^{-A}$, $j = 1, \ldots, d$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любых чисел* n'_j, *таких что* $\varepsilon_2\, b_n^{\theta} \leqslant n'_j \leqslant n$, $j = 1, \ldots, d$, *существует собственная симметричная ОАП* P, *такая что*

1. *По крайней мере* $n - 2\sum\limits_{j=1}^{d} n'_j$ *элементов* a δ_n*-близки к образу* K *ОАП* P *по норме* $|\cdot|$.
2. P *имеет малый ранг* $L = O(1)$ *и малый размер*

$$|K| \leqslant \prod_{j=1}^{d} \max\Big\{O\Big(q_j^{-1}\,\rho_n^{-1}\,(n'_j\, p(\tau_n/\varkappa_n))^{-1/2}\Big), 1\Big\}. \tag{33}$$

Теорема 11 – более общая по сравнению с теоремой 6, в которой мы ограничились случаем $b_n = n$, $\varkappa_n = \tau_n = \delta_n$, $n'_j = n'$. Теорема 12 является уточнением теоремы 11.

Теорема 12. *Утверждение теоремы* 11 *остается верным после замены* $p(\tau_n/\varkappa_n)$ *на* $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n)$ *при условии, что* $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n) \gg 1$.

По аналогии с [13, 14], далее мы сформулируем аналоги теорем 7–12 для ОАП логарифмического ранга и со специальными размерностями, равными единице. Следующие ниже теоремы 13–15 являются теоремами 9–11 из [14]. Они обобщают теоремы 5–7 из [13].

Теорема 13. *Пусть* $d = 1$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\varkappa, \delta, \tau > 0$, $\delta \leqslant \min\{\varkappa, \tau\}$, *и* $q = Q(F_a, \tau)$. *Тогда существует ОАП* P *ранга* $r \in \mathbf{N}$, *размера* $\leqslant 3^r$, *с генераторами* $g_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, r$, *и такая, что ее образ* $K \subset \mathbf{R}$ *имеет вид*

$$K = \Big\{ \sum_{k=1}^{r} m_k \, g_k : m_k \in \{-1, 0, 1\}, \text{ при } k = 1, \dots, r \Big\}. \tag{34}$$

Кроме того,

$$r \ll |\log q| + \log(\varkappa/\delta) + 1, \tag{35}$$

и по крайней мере $n - n'$ *элементов* a δ*-близки к* K, *где* $n' \in \mathbf{N}$ *и*

$$n' \ll \big(p(\tau/\varkappa)\big)^{-1} \big(|\log q| + \log(\varkappa/\delta) + 1\big)^3. \tag{36}$$

Теорема 14. *Пусть* $d > 1$, $q_j = Q(F_a^{(j)}, \tau_j)$, $\varkappa_j, \delta_j, \tau_j > 0$, $\delta_j \leqslant \min\{\varkappa_j, \tau_j\}$, $j = 1, \dots, d$. *Тогда для каждого* $j = 1, \dots, d$ *существует ОАП* P_j *ранга* $r_j \in \mathbf{N}$, *размера* $\leqslant 3^{r_j}$, *с генераторами* $g_k^{(j)} \in \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, r_j$, *и такая, что ее образ* $K_j \subset \mathbf{R}$ *имеет вид*

$$K_j = \Big\{ \sum_{k=1}^{r_j} m_k \, g_k^{(j)} : m_k \in \{-1, 0, 1\}, \text{ при } k = 1, \dots, r_j \Big\}. \tag{37}$$

Кроме того,

$$r_j \ll |\log q_j| + \log(\varkappa_j/\delta_j) + 1, \tag{38}$$

и по крайней мере $n - n'_j$ *элементов* $a^{(j)}$ δ_j*-близки к* K_j, *где* $n'_j \in \mathbf{N}$ *удовлетворяют неравенству*

$$n'_j \ll \big(p(\tau_j/\varkappa_j)\big)^{-1} \big(|\log q_j| + \log(\varkappa_j/\delta_j) + 1\big)^3. \tag{39}$$

Определим $K = \times_{j=1}^{d} K_j$. *Тогда множество* K *является образом* d*-мерной ОАП* P *с рангом*

$$R = \sum_{j=1}^{d} r_j \ll \sum_{j=1}^{d} \big(|\log q_j| + \log(\varkappa_j/\delta_j) + 1\big), \tag{40}$$

и такой, что по крайней мере $n-\sum\limits_{j=1}^{d}n_j'$ *элементов* a *принадлежат множеству* $\times_{j=1}^{d}[K_j]_{\delta_j}$. *Здесь*

$$\sum_{j=1}^{d}n_j' \ll \sum_{j=1}^{d}\bigl(p(\tau_j/\varkappa_j)\bigr)^{-1}\bigl(|\log q_j|+\log(\varkappa_j/\delta_j)+1\bigr)^3. \tag{41}$$

Кроме того, множество K *можно представить в виде*

$$K=\Bigl\{\sum_{k=1}^{R}m_s\,g_s : m_s\in\{-1,0,1\},\ \text{при } s=1,\dots,R\Bigr\}. \tag{42}$$

При этом каждый вектор $g_s\in\mathbf{R}^d$, $s=1,\dots,R$, *имеет только одну ненулевую координату. Обозначим*

$$s_0=0 \quad \text{и} \quad s_j=\sum_{m=1}^{j}r_m, \quad j=1,\dots,d.$$

Для $s_{j-1}<s\leqslant s_j$ *векторы* g_s *отличны от нуля только в* j*-ых координатах, причем эти координаты равны элементам последовательности* $g_1^{(j)},\dots,g_{r_j}^{(j)}$ *из* (37).

Теорема 15. *Пусть* $A>0$ *and* $B\geqslant 0$ *– некоторые постоянные. Пусть* $b_n,\varkappa_n,\delta_n,\tau_n>0$, $n=1,2,\dots$, *– зависящие от* n *неслучайные параметры, удовлетворяющие соотношениям* $b_n^{-B}\leqslant\delta_n/\varkappa_n\leqslant 1$, $\delta_n\leqslant\tau_n$, *для всех* $n\in\mathbf{N}$, *и* $b_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Пусть* $q_j=Q(F_a^{(j)},\tau_n)\geqslant b_n^{-A}$, *for* $j=1,\dots,d$. *Тогда для каждого* $j=1,\dots,d$ *существует ОАП* P_j *ранга* $r_j\in\mathbf{N}$, *размера* $\leqslant 3^{r_j}$, *с генераторами* $g_k^{(j)}\in\mathbf{R}$, $k=1,\dots,r_j$, *и такая, что ее образ* $K_j\subset\mathbf{R}$ *имеет вид*

$$K_j=\Bigl\{\sum_{k=1}^{r_j}m_k\,g_k^{(j)} : m_k\in\{-1,0,1\},\ \text{при } k=1,\dots,r_j\Bigr\}. \tag{43}$$

Кроме того, множество $K=\times_{j=1}^{d}K_j$ *является образом* d*-мерной ОАП* P *с рангом*

$$R=\sum_{j=1}^{d}r_j \ll d\bigl((A+B)\,\log b_n+1\bigr), \tag{44}$$

и такой, что по крайней мере $n - n'$ *элементов* a *принадлежат множеству* $\times_{j=1}^{d}[K_j]_{\delta_n}$. *Здесь* $n' \in \mathbf{N}$ *и*

$$n' \ll d\,\big(p(\tau_n/\varkappa_n)\big)^{-1}\big((A+B)\,\log b_n + 1\big)^3. \tag{45}$$

При этом остается верным описание множества K, *данное в конце формулировки теоремы* 14.

В теоремах 5–7 работы [13] мы получили частные случаи теорем 13–15, где $b_n = n$ и $\tau = \varkappa$, $\tau_j = \varkappa_j$, $j = 1, \ldots, d$ или $\tau_n = \varkappa_n$, $n \in \mathbf{N}$. Теоремы 13–15 были доказаны в [14] с использованием леммы 2 и теоремы 3.3 главы II в [3], полученных Араком [1]. В теоремах 13–15 аппроксимирующая ОАП может быть не собственной. Заменив в доказательствах лемму 2 на лемму 3, мы снова заменяем $p(\,\cdot\,)$ на $\lambda_1(\,\cdot\,)$ в формулировках теорем 13–15 и получаем следующие теоремы 16–18.

Теорема 16. *Утверждение теоремы* 13 *остается верным после замены* $p(\tau/\varkappa)$ *на* $\lambda_1(\tau/\varkappa)$ *при условии, что* $\lambda_1(\tau/\varkappa) \gg 1$.

Теорема 17. *Утверждение теоремы* 14 *остается верным после замены* $p(\tau_j/\varkappa_j)$ *на* $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j)$ *при условии, что* $\lambda_1(\tau_j/\varkappa_j) \gg 1$, $j = 1, \ldots, d$.

Теорема 18. *Утверждение теоремы* 15 *остается верным после замены* $p(\tau_n/\varkappa_n)$ *на* $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n)$ *при условии, что* $\lambda_1(\tau_n/\varkappa_n) \gg 1$.

В формулировках теорем 16–18 мы могли бы заменить $p(\,\cdot\,)$ не на $\lambda_1(\,\cdot\,)$, а просто на 1, при условии, что $\lambda_1(\,\cdot\,) \gg 1$.

§3. Метод наименьшего общего знаменателя

В этом разделе мы продолжим оценивание $Q(F_a, \tau)$, где $\tau > 0$, $F_a = \mathcal{L}(S_a)$, $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$, $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, а $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, где $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \ldots, n$.

Мы применим нашу лемму 3 для получения более точных оценок в рамках метода наименьшего общего знаменателя Рудельсона и Вершинина [24, 25, 32].

Введем матрицы

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_k, \quad \mathbb{A}_k = \begin{pmatrix} a_{k1}^2 & a_{k1}a_{k2} & \dots & a_{k1}a_{kd} \\ a_{k2}a_{k1} & a_{k2}^2 & \dots & a_{k2}a_{kd} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{kd}a_{k1} & a_{kd}a_{k2} & \dots & a_{kd}^2 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Мы будем использовать ту же букву $\mathbb{A}$ для обозначения соответствующего линейного оператора $\mathbb{A} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$,

Мы будем также использовать обозначение Рудельсона и Вершинина [25]: при $t \in \mathbf{R}^d$

$$t \cdot a = (\langle t, a_1 \rangle, \dots, \langle t, a_n \rangle) \in \mathbf{R}^n. \tag{47}$$

Таким образом,

$$\|t \cdot a\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle t, a_k \rangle^2 = \langle \mathbb{A}t, t \rangle. \tag{48}$$

Теорема 19. *Пусть $\alpha, b, D > 0$, $0 < \gamma < 1$, а распределение H определено в* (10). *Предположим, что*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \big(\langle t, a_k \rangle - m_k \big)^2 \Big)^{1/2} \geqslant \min \big\{ \gamma \|t \cdot a\|, \alpha \big\} \quad \text{при всех } m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}, \tag{49}$$

$$\text{и при всех } t \in \mathbf{R}^d, \text{ таких что } \|t\| \leqslant D.$$

Тогда

$$Q(H^b, 1/D) \ll_d \Big(\frac{1}{\gamma D \sqrt{b}} \Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-4b\alpha^2). \tag{50}$$

Ясно, что если

$$\begin{aligned} 0 < D \leqslant D(a) &= D_{\gamma,\alpha}(a) \\ &= \inf \Big\{ \theta > 0 : \operatorname{dist}(t \cdot a, \mathbf{Z}^n) < \min \big\{ \gamma \|t \cdot a\|, \alpha \big\} \\ &\qquad \text{для некоторого } t \in \mathbf{R}^d, \text{ такого что } \|t\| = \theta \Big\}, \end{aligned} \tag{51}$$

где

$$\operatorname{dist}(t \cdot a, \mathbf{Z}^n) = \min_{m \in \mathbf{Z}^n} \| t \cdot a - m \| = \Big(\sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} \big(\langle t, a_k \rangle - m_k \big)^2 \Big)^{1/2},$$

то условие (49) выполнено.

Рудельсон и Вершинин [25] назвали $D(a)$ *существенным наименьшим общим знаменателем* вектора a. Существуют некоторые похожие, но иные определения наименьшего общего знаменателя (см. [12], [32]). Определение (51), по-видимому, является наиболее популярным.

Сформулируем обобщение классического неравенства Эссеена [10] на многомерный случай ([11], см. также [17]):

Лемма 4. *Пусть $\tau > 0$, а F – некоторое d-мерное вероятностное распределение. Тогда*

$$Q(F,\tau) \ll_d \tau^d \int\limits_{\|t\|\leqslant 1/\tau} |\widehat{F}(t)|\, dt. \tag{52}$$

Лемма 4 означает, что $Q(F,\tau)$ оценивается через среднее значение $|\widehat{F}(t)|$ на шаре $\{t \in \mathbf{R}^d : \|t\| \leqslant 1/\tau\}$.

Доказательство теоремы 19**.** Используя лемму 4 и формулу (3), получаем

$$\begin{aligned} Q(H^b, 1/D) \quad &\ll_d \quad D^{-d} \int\limits_{\|t\|\leqslant 2\pi D} |\widehat{H}(t)|^b\, dt \\ &= \quad D^{-d} \int\limits_{\|t\|\leqslant 2\pi D} \exp\Big(-\frac{b}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(1-\cos\langle\, t, a_k\rangle\,\big)\Big)\, dt \end{aligned}$$

.

Легко показать, что $1-\cos x \geqslant 2x^2/\pi^2$, для $|x| \leqslant \pi$. Для произвольного x это означает, что

$$1-\cos x \geqslant 2\,\pi^{-2} \min_{m\in\mathbf{Z}} |\, x - 2\pi m|^2.$$

Подставляя это неравенство в (10), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{H}(t) \quad &\leqslant \quad \exp\Big(-\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \min_{m_k\in\mathbf{Z}} \big|\, \langle\, t, a_k\rangle - 2\pi m_k \big|^2 \Big) \\ &= \quad \exp\Big(-\frac{1}{\pi^2} \big(\mathrm{dist}(t\cdot a, 2\pi\mathbf{Z}^n)\big)^2 \Big) \\ &= \quad \exp\Big(-4\, \big(\mathrm{dist}(t/2\pi\cdot a, \mathbf{Z}^n)\big)^2 \Big). \end{aligned} \tag{53}$$

Следовательно, при $\|t\| \leqslant 2\pi D$ мы имеем

$$\widehat{H}(t) \quad \leqslant \quad \exp\Big(-4\, \big(\min\big\{\gamma\, \|t/2\pi\cdot a\|\,, \alpha\big\}\big)^2 \Big). \tag{54}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
Q(H^b, 1/D) \quad &\ll_d \quad D^{-d} \int\limits_{\|t\|\leqslant 2\pi D} \exp\Big(- 4\, b\gamma^2 \;\|t/2\pi \cdot a\|^2 \Big)\, dt \\
&\qquad\qquad + D^{-d} \int\limits_{\|t\|\leqslant 2\pi D} \exp\big(- 4\, b\alpha^2\big)\, dt \\
&\ll_d \quad D^{-d} \int\limits_{\|t\|\leqslant 2\pi D} \exp\Big(- b\gamma^2\pi^{-2} \;\langle \mathbb{A}t, t\rangle \Big)\, dt \\
&\qquad\qquad + \exp\big(- 4\, b\alpha^2\big) \\
&\ll_d \quad \Big(\frac{1}{\gamma D\sqrt{b}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-4\, b\alpha^2),
\end{aligned}$$

что доказывает теорему 19. □

Применяя лемму 3 с $\varkappa = 1/D$ и теорему 19 с $b = \lambda_d(\tau D)$, где $\lambda_d(\,\cdot\,)$ определено в (17), получаем следующую теорему 20.

Теорема 20. *Пусть выполнены условия теоремы* 19. *Тогда для любого* $\tau > 0$

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \frac{1}{\lambda_d(\tau D)}\bigg(\Big(\frac{1}{\gamma D\sqrt{\lambda_d(\tau D)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-4\,\lambda_d(\tau D)\,\alpha^2)\bigg). \tag{55}$$

Применяя лемму 2 с $\varkappa = 1/D$ и теорему 19 с $b = p(\tau D)$, где $p(\,\cdot\,)$ определено в (11), получаем следующую теорему 21.

Теорема 21. *Пусть выполнены условия теоремы* 19. *Тогда для любого* $\tau > 0$

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \Big(\frac{1}{\gamma D\sqrt{p(\tau D)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-4\, p(\tau D)\,\alpha^2). \tag{56}$$

Теорема 21 более точная и общая, чем [25, теорема 3.3].

Обозначим

$$M(\tau) = \tau^{-2} \int\limits_{|x|\leqslant\tau} x^2\, G\{dx\} + \int\limits_{|x|>\tau} G\{dx\} = \mathbf{E}\min\big\{\widetilde{X}^2/\tau^2, 1\big\}, \quad \tau > 0. \tag{57}$$

Следующая теорема 22 получена в [6]. Ее одномерный вариант можно найти в [7].

Теорема 22. *Пусть выполнены условия теоремы* 19. *Тогда для любого* $\tau > 0$

$$Q(F_a,\tau) \ll_d \Big(\frac{1}{\gamma D\sqrt{M(\tau D)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{A}}} + \exp(-c\, M(\tau D)\, \alpha^2). \qquad (58)$$

Легко видеть, что $M(\tau D) \geqslant p(\tau D)$. Поэтому теорема 22 сильнее теоремы 21.

Список литературы

1. Т. В. Арак, О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами. — Теория вероятн. и ее примен. **25**, No. 2 (1980), 225–246.
2. Т. В. Арак, *On the convergence rate in Kolmogorov's uniform limit theorem. I.* — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 2 (1981), 225–245.
3. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986).
4. M. Campos, M. Jenssen, M. Michelen, J. Sahasrabudhe, *The singularity probability of a random symmetric matrix is exponentially small.* — J. Amer. Math. Soc. Published electronically: January 19, 2024.
5. M. Campos, M. Jenssen, M. Michelen, J. Sahasrabudhe, *The least singular value of a random symmetric matrix.* — Forum of Mathematics, Pi, Published online by Cambridge University Press: 23 January 2024.
6. Ю. С. Елисеева, *Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2013), 121–137.
7. Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **57**, No. 4 (2012), 768–777.
8. Ю. С. Елисеева, Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 50–69.
9. P. Erdös, *On a lemma of Littlewood and Offord.* – Bull. Amer. Math. Soc. **51**, No. 12 (1945), 898–902.
10. C.-G. Esséen, *On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **5** (1966), 210–216.
11. C.-G. Esséen, *On the concentration function of a sum of independent random variables.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **9** (1968), 290–308.
12. O. Friedland, S. Sodin, *Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), 513–518.
13. Ф. Гётце, Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Неравенства Арака для функций концентрации и проблема Литтлвуда–Оффорда.* — Теория вероятн. и ее примен. **62**, No. 2 (2017), 241–266.
14. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *New applications of Arak's inequalities to the Littlewood–Offord problem*, Eur. J. Math., **4**, No. 2 (2018), 639–663.

15. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *A new bound in the Littlewood–Offord problem.* — Mathematics **10**, No. 10 (2022), 1740.
16. B. Green, *Notes on progressions and convex geometry*, Preprint (2005).
17. В. Хенгартнер, Р. Теодореску, *Функции концентрации*, М., Наука, 1980.
18. А. Н. Колмогоров, *Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.* — Теория вероятн. и ее примен., **1**, No. 4 (1956), 384–394.
19. G. V. Livshyts, K. Tikhomirov, R. Vershynin, *The smallest singular value of inhomogeneous square random matrices.* — Ann. Probab. **49** (2021), 1286–1309.
20. J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation (III).* — Матем. сб. **12(54)**, No. 3 (1943), 277–286.
21. Hoi Nguyen, Van Vu, *Optimal inverse Littlewood–Offord theorems.* — Adv. Math. **226**, No. 6 (2011), 5298–5319.
22. Hoi Nguyen, Van Vu, *Small ball probabilities, inverse theorems and applications.* — In: Lovász, L., et. al. (eds.) Erdös Centennial Proceeding, pp. 409–463, Springer, 2013.
23. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, М., Наука, 1987.
24. M. Rudelson, R. Vershynin, *The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices.* — Adv. Math. **218** (2008), 600–633.
25. M. Rudelson, R. Vershynin, The smallest singular value of a random rectangular matrix. *Comm. Pure Appl. Math.* **62** (2009), 1707–1739.
26. T. Tao, Van Vu, *Additive Combinatorics.* Cambridge Univ. Pr., 2006.
27. T. Tao, Van Vu, *John-type theorems for generalized arithmetic progressions and iterated sumsets.* — Adv. Math. **219**, No. 2 (2008), 428–449.
28. T. Tao, Van Vu, *Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices.* — Ann. Math. (2) **169**, No. 2 (2009), 595–632.
29. T. Tao, Van Vu, *From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices.* — Bull. Amer. Math. Soc. **46** (2009), 377–396.
30. T. Tao, Van Vu, *A sharp inverse Littlewood–Offord theorem.* — Random Structures Algorithms **37**, No. 4 (2010), 525–539.
31. K. Tikhomirov, *Singularity of random Bernoulli matrices.* — Ann. Math. (2) **191**, No. 2 (2020), 593–634.
32. R. Vershynin, *Invertibility of symmetric random matrices.* — Random Structures Algorithms, **44** (2014), 135–182.
33. А. Ю. Зайцев, *Неравенства Арака для обобщенных арифметических прогрессий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 151–157.

Götze F., Zaitsev A. Yu. Improved applications of Arak's inequalities to the Littlewood–Offord problem.

Let $X_1, \dots, X_n$ be independent identically distributed random variables. In this paper we study the behavior of concentration functions of weighted sums $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$ with respect to the arithmetic structure of coefficients a_k in the context of the Littlewood–Offord problem. We discuss the relations between the inverse principles proposed by Nguyen, Tao and Vu and similar principles formulated by Arak in his papers from the 1980's. We state some improved (more general and more precise) consequences of Arak's inequalities applying our recent bound in the Littlewood–Offord problem. Moreover, we also obtain an improvement of the estimates used in Rudelson and Vershynin's least common denominator method.

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
t D-33501 Bielefeld, Germany
E-mail: `goetze@math.uni-bielefeld.de`

Поступило 10 сентября 2024 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27
Санкт-Петербург 191023, Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: `zaitsev@pdmi.ras.ru`