Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

А. Н. Бородин

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕРЫ ДЛЯ ДИФФУЗИЙ С ДВАЖДЫ РАЗРЫВНЫМ СНОСОМ

Преобразованию меры для диффузионного процесса посвящена знаменитая работа И. В. Гирсанова [1]. Различным обобщениям этого преобразования посвящено много работ.

Нас интересует такое преобразование для диффузионного процесса с разрывным сносом. При этом разрыв происходит в двух точках. Можно выделить разрывную компоненту в виде ступенчатой функции и получить преобразование, переводящее меру исходного диффузионного процесса в меру диффузионного процесса с непрерывным сносом. Такое преобразование рассматривалось нами в работе [2] при разрыве коэффициента в одной точке. Данное исследование является продолжением этой темы. Предложенный в работе метод может быть обобщен на случай диффузий с коэффициентом сноса, допускающим конечное число точек разрыва.

Рассмотрим диффузию $\xi_\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, с единичным коэффициентом диффузии и с разрывным коэффициентом сноса вида

$$-(g(x) + \mu\,\mathbf{1}_{[r,\infty)}(x) + \eta\,\mathbf{1}_{[q,\infty)}(x)), \qquad \mu, \eta \in \mathbf{R}, \qquad r < q,$$

где функция $g(x)$, $x \in \mathbf{R}$, дифференцируема, а $g'(x)$ ограничена. Пусть, кроме того,

$$\mathbf{1}_{[r,\infty)}(x)\Big(\frac{\mu^2}{2} + \mu g(x)\Big) \geqslant 0, \tag{1}$$

и

$$\mathbf{1}_{[q,\infty)}(x)\Big(\frac{\eta^2}{2} + \mu\eta + \eta g(x)\Big) \geqslant 0. \tag{2}$$

Производящий оператор процесса $\xi_\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\mathcal{G}f = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} - \big(g(x) + \mu\,\mathbf{1}_{[r,\infty)}(x) + \eta\,\mathbf{1}_{[q,\infty)}(x)\big)\frac{df}{dx}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Область определения этого оператора – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции.

Ключевые слова: диффузия с дважды разрывным сносом, преобразование меры.

Таким образом, $\xi_\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, – однородный марковский процесс, для которого

$$G^\bullet_z(x) := \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dz} \mathbf{P}_x(\xi_\bullet(t) < z)\, dt, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad \lambda \geqslant 0,$$

преобразование Лапласа по времени от переходной плотности, при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2} G''(x) - \big(g(x) + \mu\, \mathbf{1}_{[r,\infty)}(x) + \eta\, \mathbf{1}_{[q,\infty)}(x)\big) G'(x) \\ - \lambda G(x) = 0, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{r, q, z\}, \tag{4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda. \tag{5}$$

В этой задаче предполагается, что решение в точках $r \neq z$ и $q \neq z$ имеет непрерывную первую производную.

Здесь и далее нижний индекс у вероятности и математического ожидания означает начальное значение процесса.

Функция $G_z(x)$, $z \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, называется функцией Грина диффузионного процесса, и она однозначно определяет процесс, так как обратное преобразование Лапласа по λ от этой функции, деленной на λ, задает переходную плотность процесса.

Рассмотрим диффузию $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$, с единичным коэффициентом диффузии и с коэффициентом сноса $-g(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Производящий оператор процесса $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\mathcal{G} f = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - g(x) \frac{df}{dx}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Область определения этого оператора – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции.

Таким образом, $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$, – однородный марковский процесс, для которого, согласно теореме 6.2 гл. IV из [3],

$$G^\circ_z(x) := \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dz} \mathbf{P}_x(\xi_\circ(t) < z)\, dt, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad \lambda \geqslant 0,$$

преобразование Лапласа по времени от переходной плотности, при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - g(x)\,G'(x) - \lambda G(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}\setminus\{z\}, \tag{7}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda. \tag{8}$$

Предположим, что выполнены следующие условия

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int\limits_0^y \exp\Bigl(4\int\limits_0^z g(v)\,dv\Bigr)dz > 0,$$

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int\limits_{-y}^0 \exp\Bigl(-4\int\limits_z^0 g(v)\,dv\Bigr)dz > 0.$$

Тогда, согласно § 14 гл. IV из [3], у диффузии $\xi_\circ$ существует локальное время $\ell_\circ(t,r)$, $t \geqslant 0$, $r \in \mathbf{R}$, относительно меры Лебега, т.е.

$$\ell_\circ(t,r) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbf{1}_{(r-\varepsilon,r+\varepsilon)}(\xi_\circ(s))\,ds, \qquad \text{п.н.}$$

Положим

$$\Delta_\mu(x,z) := \int\limits_x^z \bigl(\mu\,\mathbf{1}_{[r,\infty)}(y) + \eta\,\mathbf{1}_{[q,\infty)}(y)\bigr)dy.$$

Тогда при $q < z$

$$\Delta_\mu(x,z) = \begin{cases} \mu(z-r) + \eta(z-q), & x \leqslant r,\\ \mu(z-x) + \eta(z-q), & r \leqslant x \leqslant q,\\ (\mu+\eta)(z-x), & q \leqslant x. \end{cases}$$

При $z < r$

$$\Delta_\mu(x,z) = \begin{cases} 0, & x \leqslant r,\\ \mu(r-x), & r \leqslant x \leqslant q,\\ \mu(r-x) + \eta(q-x), & q \leqslant x. \end{cases}$$

При $r < z < q$

$$\Delta_\mu(x,z) = \begin{cases} \mu(z-r), & x \leqslant r,\\ \mu(z-x), & r \leqslant x \leqslant q,\\ \mu(z-x) + \eta(q-x), & q \leqslant x. \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Пусть диффузия $\xi_\circ$ такова, что*

$$\mathbf{E}_x e^{\max\{|\mu|,|\eta|\}|\xi_\circ(t)|} < \infty$$

и $\mathbf{E}_x e^{\mu\ell_\circ(t,r)/2} < \infty$, $\mathbf{E}_x e^{\eta\ell_\circ(t,q)/2} < \infty$ *при любом* $t > 0$. *Тогда имеет место абсолютная непрерывность мер: при любом* $t > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}^\bullet_x}{d\mathbf{P}^\circ_x}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(&- \Delta_\mu(x,\xi_\circ(t)) + \frac{\mu}{2}\ell_\circ(t,r) + \frac{\eta}{2}\ell_\circ(t,q) \\ &- \int\limits_0^t \mathbf{1}_{[q,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\eta^2}{2} + \mu\eta + \eta\, g(\xi_\circ(s))\big)\, ds \\ &- \int\limits_0^t \mathbf{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\mu^2}{2} + \mu\, g(\xi_\circ(s))\big)\, ds\Big) \qquad \mathbf{P}^\circ_x\text{-п.н.},\end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{P}^\bullet_x$ *и* $\mathbf{P}^\circ_x$ *– меры, соответствующие диффузиям* $\xi_\bullet$ *и* $\xi_\circ$ *соответственно, а* $\mathcal{F}_t$ *–* σ*-алгебра, порожденная диффузией* $\xi_\circ$ *до момента* t.

Доказательство. Найдем решение задачи (4), (5) в терминах фундаментальных решений соответствующего уравнения.

Решение однородного уравнения

$$\frac{1}{2}Y''(x) - \big(g(x) + \mu\,\mathbf{1}_{[r,\infty)}(x)\big)Y'(x) - \lambda Y(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{10}$$

при $r \leqslant x < \infty$ с помощью замены $Z(x) := e^{-\mu x}Y(x)$ преобразуется в решение уравнения

$$\frac{1}{2}Z''(x) - g(x)Z'(x) - \big(\lambda + \frac{\mu^2}{2} + \mu g(x)\big)Z(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{11}$$

При рассмотрении этого уравнения важным фактором является условие (1). Линейно независимые решения этого однородного уравнения обозначим: $\psi_\mu(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательное возрастающее решение, а $\varphi_\mu(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательное убывающее решение,

$$\omega_\mu(x) = \psi'_\mu(x)\,\varphi_\mu(x) - \psi_\mu(x)\,\varphi'_\mu(x)$$

– их вронскиан. Существование таких решений вытекает из предложения 12.2 гл. II из [3].

Положим

$$G^\mu_z(x) := \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\varphi_\mu(z)\,\psi_\mu(x), & x \leqslant z, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\psi_\mu(z)\,\varphi_\mu(x), & z \leqslant x. \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим сначала решение задачи (4), (5) при $z > q$. Это решение ищем в следующем виде

$$G_z^{\bullet}(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)} A e^{\mu(r-z)+\eta(q-z)} \psi_0(x), & x \leqslant r, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)} e^{\mu(x-z)+\eta(q-z)} \big(B\varphi_\mu(x) + C\psi_\mu(x)\big), & r \leqslant x \leqslant q, \\ e^{(\mu+\eta)(x-z)} \Big(G_z^{\mu+\eta}(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)} D\varphi_{(\mu+\eta)}(x) \Big), & q \leqslant x. \end{cases} \tag{13}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (4), а также условию на скачок производной (5). Константы A, B, C и D можно вычислить из условия непрерывности решения в точках r и q, а также условия непрерывности производной в точках r и q. Условие непрерывности решения дает два алгебраических уравнения

$$A\psi_0(r) = B\varphi_\mu(r) + C\psi_\mu(r), \tag{14}$$

$$B\varphi_\mu(q) + C\psi_\mu(q) = \varphi_{(\mu+\eta)}(z)\psi_{(\mu+\eta)}(q) + D\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{15}$$

Условие непрерывности производной решения дает еще два алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} A\psi_0'(r) &= B(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) + C(\mu\psi_\mu(r) + \psi_\mu'(r)), \\ B(\mu\varphi_\mu(q) + \varphi_\mu'(q)) + C(\mu\psi_\mu(q) + \psi_\mu'(q)) &= D((\mu+\eta)\varphi_{(\mu+\eta)}(q) \\ &\quad + \varphi_{(\mu+\eta)}'(q)) + \varphi_{(\mu+\eta)}(z)((\mu+\eta)\psi_{(\mu+\eta)}(q) + \psi_{(\mu+\eta)}'(q)). \end{aligned}$$

Используя (15), последнее равенство можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} B\varphi_\mu'(q) + C\psi_\mu'(q) &= \varphi_{(\mu+\eta)}(z)(\eta\psi_{(\mu+\eta)}(q) + \psi_{(\mu+\eta)}'(q)) \\ &\quad + D(\eta\varphi_{(\mu+\eta)}(q) + \varphi_{(\mu+\eta)}'(q)). \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$A\psi_0'(r) - B\varphi_\mu'(r)) - C\psi_\mu'(r) = \mu(B\varphi_\mu(r) + C\psi_\mu(r)), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} B\varphi_\mu'(q) + C\psi_\mu'(q) - D\psi_{(\mu+\eta)}'(q)) - \varphi_{(\mu+\eta)}(z)\psi_{(\mu+\eta)}'(q) \\ = \eta(D\varphi_{(\mu+\eta)}(q) + \varphi_{(\mu+\eta)}(z)\varphi_{(\mu+\eta)}(q)). \end{aligned} \tag{17}$$

Как результат получили систему алгебраических уравнения (14)–(17) для вычисления постоянных A, B, C и D.

Решение задачи (4), (5) при $z < r$ ищем в виде

$$G_z^{\bullet}(x) = \begin{cases} G_z^0(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)} A\psi_0(x), & x \leqslant r, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)} e^{\mu(x-r)} \big(B\varphi_\mu(x) + C\psi_\mu(x)\big), & r \leqslant x \leqslant q, \\ e^{\mu(x-r)+\eta(x-q)} \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)} D\varphi_{(\mu+\eta)}(x), & q \leqslant x. \end{cases} \tag{18}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (4), а также условию на скачок производной (5). Константы A, B, C и D можно вычислить из условия непрерывности решения в точках r и q, а также условия непрерывности производной в точках r и q.

Условие непрерывности решения дает два алгебраических уравнения

$$\psi_0(z)\varphi_0(r) + A\psi_0(r) = B\varphi_\mu(r) + C\psi_\mu(r), \tag{19}$$

$$B\varphi_\mu(q) + C\psi_\mu(q) = D\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{20}$$

Условие непрерывности производной решения дает еще два алгебраических уравнения

$$\psi_0(z)\varphi_0'(r) + A\psi_0'(r) = B(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) + C(\mu\psi_\mu(r) + \psi_\mu'(r)),$$

$$B(\mu\varphi_\mu(q) + \varphi_\mu'(q)) + C(\mu\psi_\mu(q) + \psi_\mu'(q)) = D((\mu+\eta)\varphi_{(\mu+\eta)}(q) + \varphi_{(\mu+\eta)}'(q)).$$

Используя (20), последнее равенство можно преобразовать к виду

$$B\varphi_\mu'(q) + C\psi_\mu'(q) = D(\eta\varphi_{(\mu+\eta)}(q) + \varphi_{(\mu+\eta)}'(q)).$$

В итоге имеем

$$\psi_0(z)\varphi_0'(r) + A\psi_0'(r) - B\varphi_\mu'(r)) - C\psi_\mu'(r) = \mu(B\varphi_\mu(r) + C\psi_\mu(r)), \tag{21}$$

$$B\varphi_\mu'(q) + C\psi_\mu'(q) - D\psi_{(\mu+\eta)}'(q)) = \eta D\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{22}$$

Наконец рассмотрим решение задачи (4), (5) при $r < z < q$. Решение ищем в виде

$$G_z^{\bullet}(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)} e^{\mu(r-z)} A\psi_0(x), & x \leqslant r, \\ e^{\mu(x-z)} G_z^\mu(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)} e^{\mu(x-z)} \big(B\varphi_\mu(x) + C\psi_\mu(x)\big), & r \leqslant x \leqslant q, \\ e^{\mu(x-z)+\eta(x-q)} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)} D\varphi_{(\mu+\eta)}(x), & q \leqslant x. \end{cases} \tag{23}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (4), а также условию на скачок производной (5). Константы A, B, C и D можно вычислить из условия непрерывности решения в точках r и q, а также условия непрерывности производной в точках r и q.

Условие непрерывности решения дает два алгебраических уравнения

$$A\psi_0(r) = \varphi_\mu(z)\psi_\mu(r) + B\varphi_\mu(r) + C\psi_\mu(r), \tag{24}$$

$$\psi_\mu(z)\varphi_\mu(q) + B\varphi_\mu(q) + C\psi_\mu(q) = D\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{25}$$

Условие непрерывности производной решения дает еще два алгебраических уравнения

$$A\psi_0'(r) = \varphi_\mu(z)(\mu\psi_\mu(r) + \psi_\mu'(r)) + B(\mu\varphi_\mu(r) + \varphi_\mu'(r)) + C(\mu\psi_\mu(r) + \psi_\mu'(r)),$$

$$\psi_\mu(z)(\mu\varphi_\mu(q) + \varphi_\mu'(q)) + B(\mu\varphi_\mu(q) + \varphi_\mu'(q)) + C(\mu\psi_\mu(q) + \psi_\mu'(q)) \\ = D((\mu+\eta)\varphi_{(\mu+\eta)}(q) + \varphi_{(\mu+\eta)}'(q)).$$

Используя (25), последнее равенство можно преобразовать к виду

$$\psi_\mu(z)\varphi_\mu'(q) + B\varphi_\mu'(q) + C\psi_\mu'(q) = D(\eta\varphi_{(\mu+\eta)}(q) + \varphi_{(\mu+\eta)}'(q)).$$

В итоге имеем

$$A\psi_0'(r) - B\varphi_\mu'(r) - C\psi_\mu'(r)\varphi_\mu(z)\psi_\mu(r) = \mu(+B\varphi_\mu(r) + C\psi_\mu(r)), \tag{26}$$

$$\psi_\mu(z)\mu\varphi_\mu'(q) + B\varphi_\mu'(q) + C\psi_\mu'(q) - D\psi_{(\mu+\eta)}'(q) = \eta D\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{27}$$

В результате получим систему алгебраических уравнений (24)–(27).

Поскольку $\xi^\bullet$ и ξ° являются однородными марковскими процессами, то достаточно доказать аналог (9) для переходных плотностей, т.е. следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(\xi^\bullet(t) < z) = e^{-\Delta_\mu(x,z)}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(\frac{\mu}{2}\ell_\circ(t,r) + \frac{\eta}{2}\ell_\circ(t,q) \\ - \int_0^t \mathbf{1}_{[q,\infty)}(\xi_\circ(s))\Big(\frac{\eta^2}{2} + \mu\eta + \eta\, g(\xi_\circ(s))\Big)\,ds \\ - \int_0^t \mathbf{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\Big(\frac{\mu^2}{2} + \mu\, g(\xi_\circ(s))\Big)\,ds\Big); \xi_\circ(t) < z\Big\}. \tag{28}$$

Здесь и далее для того чтобы упростить формулы, мы используем обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi\,\mathbf{1}_A\}$.

Мы докажем (28). Основываясь на этом равенстве можно доказать (9) аналогично тому, как это было сделано в статье [4].

Пусть τ – экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени, не зависящий от диффузии $\xi_\circ^\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, и от диффузии $\xi_\circ(t)$, $t \geqslant 0$.

Достаточно доказать (28) для преобразования Лапласа по времени, т.е. следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(\xi^\bullet(\tau) < z) = e^{-\Delta_\mu(x,z)}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(\frac{\mu}{2}\ell_\circ(\tau,r) + \frac{\eta}{2}\ell_\circ(\tau,q) \\ - \int_0^\tau \mathbf{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\mu^2}{2} + \mu\, g(\xi_\circ(s))\big)\, ds \\ - \int_0^\tau \mathbf{1}_{[q,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\eta^2}{2} + \mu\eta + \eta\, g(\xi_\circ(s))\big)\, ds\Big); \xi_\circ(\tau) < z\Big\}. \tag{29}$$

Согласно теореме 4.2 гл. III и теореме 6.2 гл. IV из [3], функция

$$G_z^\circ(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(\frac{\mu}{2}\ell_\circ(\tau,r) + \frac{\eta}{2}\ell_\circ(\tau,q) \\ - \int_0^\tau \mathbf{1}_{[r,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\mu^2}{2} + \mu\, g(\xi_\circ(s))\big)\, ds \\ - \int_0^\tau \mathbf{1}_{[q,\infty)}(\xi_\circ(s))\big(\frac{\eta^2}{2} + \mu\eta + \eta\, g(\xi_\circ(s))\big)\, ds\Big); \xi_\circ(\tau) < z\Big\} \tag{29}$$

при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) - g(x)\, G'(x) - \Big(\lambda + \mathbf{1}_{[r,\infty)}(x)\Big(\frac{\mu^2}{2} + \mu g(x)\Big) \\ + \mathbf{1}_{[q,\infty)}(x)\Big(\frac{\eta^2}{2} + \mu\eta + \eta g(x)\Big)\Big)G(x) = 0,\ x \neq \{r,, q, z\}, \tag{30}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda, \tag{31}$$

$$G'(r+0) - G'(r-0) = -\mu G(r), \tag{32}$$

$$G'(q+0) - G'(q-0) = -\eta G(q). \tag{33}$$

Решение задачи (30)–(33) при $z > q$ ищем в виде

$$G_z^\circ(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_{\mu+\eta}(z)}\widetilde{A}\psi_0(x), & x \leqslant r, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_{\mu+\eta}(z)}\Big(\widetilde{B}\varphi_\mu(x) + \widetilde{C}\psi_\mu(x)\Big), & r \leqslant x \leqslant q, \\ G_z^{\mu+\eta}(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_{\mu+\eta}(z)}\widetilde{D}\varphi_{(\mu+\eta)}(x), & q \leqslant x. \end{cases} \tag{34}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (30), а также условию на скачок производной (31). Константы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ и $\widetilde{D}$ можно вычислить из условия непрерывности решения в точках r и q, а также условия (32), (33) на скачок производной в точках r и q. Условие непрерывности решения дает два алгебраических уравнения

$$\widetilde{A}\psi_0(r) = \widetilde{B}\varphi_\mu(r) + \widetilde{C}\psi_\mu(r), \tag{35}$$

$$\widetilde{B}\varphi_\mu(q) + \widetilde{C}\psi_\mu(q) = \varphi_{(\mu+\eta)}(z)\psi_{(\mu+\eta)}(q) + \widetilde{D}\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{36}$$

Условие на скачок производной решения дает еще два алгебраических уравнения

$$\widetilde{A}\psi_0'(r) - \widetilde{B}\varphi_\mu'(r)) - \widetilde{C}\psi_\mu'(r) = \mu(\widetilde{B}\varphi_\mu(r) + \widetilde{C}\psi_\mu(r)), \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B}\varphi_\mu'(q) + \widetilde{C}\psi_\mu'(q) - \widetilde{D}\psi_{(\mu+\eta)}'(q) - \varphi_{(\mu+\eta)}(z)\psi_{(\mu+\eta)}'(q) \\ = \eta(\widetilde{D}\varphi_{(\mu+\eta)}(q) + \varphi_{(\mu+\eta)}(z)\psi_{(\mu+\eta)}(q)). \end{aligned} \tag{38}$$

Система (35)–(38) совпадает с системой алгебраических уравнений (14)–(17) для констант A, B, C и D при $z > q$. Следовательно, $\widetilde{A} = A$, $\widetilde{B} = B$, $\widetilde{C} = C$ и $\widetilde{D} = D$.

Сравнивая при $z > q$ выражения (13) и (34) для функций $G_z^\bullet(x)$ и $G_z^\circ(x)$, имеем, что $G_z^\bullet(x) = e^{-\Delta_\mu(x,z)}G_z^\circ(x)$, и, следовательно, выполнено (29).

Рассмотрим случай $z < r$. Решение задачи (30)–(33) при $z < r$ ищем в виде

$$G_z^\circ(x) = \begin{cases} G_z^0(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)}\widetilde{A}\psi_0(x), & x \leqslant r, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)}\Big(\widetilde{B}\varphi_\mu(x) + \widetilde{C}\psi_\mu(x))\Big), & r \leqslant x \leqslant q, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_0(z)}\widetilde{D}\varphi_{(\mu+\eta)}(x), & x \leqslant q. \end{cases} \tag{39}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (30), а также условию на скачок производной (31). Константы A, B, C и D можно вычислить из условия непрерывности решения в точках r и q, а также условия на скачок производной в точках r и q.

Условие непрерывности решения дает два алгебраических уравнения

$$\psi_0(z)\varphi_0(r) + \widetilde{A}\psi_0(r) = \widetilde{B}\varphi_\mu(r) + \widetilde{C}\psi_\mu(r), \tag{40}$$

$$\widetilde{B}\varphi_\mu(q) + \widetilde{C}\psi_\mu(q) = \widetilde{D}\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{41}$$

Условие на скачок производной решения дает еще два алгебраических уравнения

$$\psi_0(z)\varphi_0'(r) + \widetilde{A}\psi_0'(r) - \widetilde{B}\varphi_\mu'(r)) - \widetilde{C}\psi_\mu'(r) = \mu(\widetilde{B}\varphi_\mu(r) + \widetilde{C}\psi_\mu(r)), \tag{42}$$

$$\widetilde{B}\varphi_\mu'(q) + \widetilde{C}\psi_\mu'(q) - \widetilde{D}\psi_{(\mu+\eta)}'(q) = \eta D\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{43}$$

Система (40)–(43) совпадает с системой алгебраических уравнений (19)–(22) для констант A, B, C и D при $z < r$. Следовательно, $\widetilde{A} = A$, $\widetilde{B} = B$, $\widetilde{C} = C$ и $\widetilde{D} = D$.

Сравнивая при $z < r$ выражения (18) и (39) для функций $G_z^\bullet(x)$ и $G_z^\circ(x)$, имеем, что $G_z^\bullet(x) = e^{-\Delta_\mu(x,z)}G_z^\circ(x)$, и, следовательно, выполнено (29).

Наконец рассмотрим решение задачи (30)–(33) при $r < z < q$. Решение ищем в виде

$$G_z^\circ(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\widetilde{A}\psi_0(x), & x \leqslant r, \\ G_z^\mu(x) + \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\big(\widetilde{B}\varphi_\mu(x) + \widetilde{C}\psi_\mu(x)\big), & r \leqslant x \leqslant q, \\ \dfrac{2\lambda}{\omega_\mu(z)}\widetilde{D}\varphi_{(\mu+\eta)}(x), & q \leqslant x. \end{cases} \tag{44}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (30), а также условию на скачок производной (31). Константы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ и $\widetilde{D}$ можно вычислить из условия непрерывности решения в точках r и q, а также условия на скачок производной в точках r и q.

Условие непрерывности решения дает два алгебраических уравнения

$$A\psi_0(r) = \varphi_\mu(z)\psi_\mu(r) + B\varphi_\mu(r) + C\psi_\mu(r), \tag{45}$$
$$\psi_\mu(z)\varphi_\mu(q) + B\varphi_\mu(q) + C\psi_\mu(q) = D\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{46}$$

Условие на скачок производной решения дает еще два алгебраических уравнения

$$\widetilde{A}\psi_0'(r) - \widetilde{B}\varphi_\mu'(r) - \widetilde{C}\psi_\mu'(r) - \varphi_\mu(z)\psi_\mu'(r)$$
$$= \mu(\varphi_\mu(z)\psi_\mu(r) + \widetilde{B}\varphi_\mu(r) + \widetilde{C}\psi_\mu(r)), \tag{47}$$
$$\psi_\mu(z)\varphi_\mu'(q) + \widetilde{B}\varphi_\mu'(q) + \widetilde{C}\psi_\mu'(q) - \widetilde{D}\psi_{(\mu+\eta)}'(q) = \eta\widetilde{D}\varphi_{(\mu+\eta)}(q). \tag{48}$$

Система (45)–(48) совпадает с системой алгебраических уравнений (24)–(27) для констант A, B, C и D при $r < z < q$. Следовательно, $\widetilde{A} = A$, $\widetilde{B} = B$, $\widetilde{C} = C$ и $\widetilde{D} = D$.

В итоге при $r < z < q$ имеем, что $G_z^\bullet(x) = e^{\Delta_\mu(x,z)}G_z^\circ(x)$, и, следовательно, выполнено (29).

Мы рассмотрели все случаи положения z для выполнения равенства (29). Теорема 1.1 доказана. □

Список литературы

1. И. В. Гирсанов *О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры.* — Теория вероятн. и ее примен. **5**, No. 2 (1960), 314–330.
2. А. Н. Бородин, *Преобразование меры для диффузий с разрывным сносом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **515** (2022), 72–82.
3. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Санкт-Петербург, Лань, 2013.
4. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от скошенного броуновского движения с разрывным сносом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **501** (2021), 36–51.

Borodin A. N. Transformation of measure for diffusions with double-break drift.

We consider transformation of measure for diffusions with discontinuous drift analogous to the Girsanov transformation. It is essential that we have a double-break drift. It is possible for the drift to extract discontinuous

component as a step function and derive the transformation of the measure of initial diffusion to the measure of diffusion with continuous drift.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2024 г.