Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

А. Н. Бородин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В МОМЕНТ, ОБРАТНЫЙ К ЛОКАЛЬНОМУ ВРЕМЕНИ

§1. Введение

Эта статья содержит обобщение теоремы 6.3, глава V из [1], на случай неоднородных функционалов от броуновского локального времени в момент, обратный к локальному времени. Пусть $W(s)$, $s \geqslant 0$, – броуновское движение, $W(0) = 0$. Броуновским локальным временем называется предел

$$\ell(t, y) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{[y, y+\varepsilon)}(W(s))\, ds,$$

который существует с вероятностью единица для $(t, y) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$. Считаем $W(0) = 0$, так как представленные результаты для произвольного начального значения легко трансформируются к нулевому значению в силу пространственной однородности броуновского движения. Рассмотрим $\varrho(v, z) := \min\{s : \ell(s, z) = v\}$ – момент, обратный к локальному времени. Основополагающее значение для распределения функционалов от броуновского локального времени по пространственной переменной имеет следующий результат о том, что в определенных условиях локальное время по этой переменной является марковским процессом. Обоснование марковского свойства для броуновского локального времени в момент, когда броуновское движение впервые достигает заданного уровня, дал Ф. Найт [2]. Д. Рэй [3] предложил чисто аналитическое доказательство этого свойства без привлечения предельной аппроксимации. Мы сформулируем этот результат в том виде как это представлено в теореме 4.1, глава V из [1]. Ясно, что

Ключевые слова: броуновское локальное время, распределение неоднородных функционалов, момент, обратный к локальному времени, супремумы локальных времен.

в этот момент траектория броуновского процесса W останавливается в точке z, т.е. $W(\varrho(v,z)) = z$, так как $\varrho(v,z)$ будет точкой роста броуновского локального времени $\ell(t,z)$. Поскольку броуновское движение пространственно инвариантно относительно сдвига, то в силу симметрии броуновского движения можно рассмотреть лишь $z \geqslant 0$.

Теорема 1.1. *При $z \geqslant 0$ процесс $\ell(\varrho(v,z),y)$, $y \in \mathbf{R}$, представим в виде*

$$\ell(\varrho(v,z),y) = \begin{cases} V_1(y-z) & \text{при } z \leqslant y, \\ V_2(z-y) & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant z, \\ V_3(-y) & \text{при } y \leqslant 0 \end{cases}$$

где

$$V_1(h) = \bigl(R^{(0)}(h)\bigr)^2, \quad V_2(h) = \bigl(R^{(2)}(h)\bigr)^2, \quad V_3(h) = \bigl(\widehat{R}^{(0)}(h)\bigr)^2,$$

а $R^{(0)}(t)$, $\widehat{R}^{(0)}(t)$ и $R^{(2)}(t)$ – при фиксированных начальных значениях независимые бесселевские процессы размерностей 0, 0 и 2 соответственно, $V_1(0) = v$, $V_2(0) = v$, $V_3(0) = V_2(z)$.

Замечание 1.1. Производящие операторы процессов V_k, $k = 1,2,3$, имеют вид

$$\mathbf{L}_1 = 2v\frac{d^2}{dv^2}, \qquad \mathbf{L}_2 = 2v\frac{d^2}{dv^2} + 2\frac{d}{dv}, \qquad \mathbf{L}_3 = 2v\frac{d^2}{dv^2}.$$

Замечание 1.2. Для $z \leqslant 0$ имеет место аналогичное описание в силу свойств пространственной однородности и обратимости времени броуновского движения. При этом процессы V_1 и V_3 в обозначениях поменяются местами.

§2. Распределение простейшего неоднородного функционала от броуновского локального времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от броуновского локального времени. Простейший неоднородный интегральный функционал от броуновского локального времени по пространственной переменной имеет вид

$$B_b(z) := \int_{-\infty}^{b} f(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy + \int_{b}^{\infty} g(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy, \tag{2.1}$$

где $f(v)$ и $g(v)$, $v \in [0,\infty)$, – некоторые неотрицательные кусочно непрерывные функции.

Аналогичная задача изучалась в статье [4], когда вместо момента $\varrho(v,z)$ рассматривалось преобразование Лапласа от фиксированного момента времени t.

Теорема 2.1. *Пусть $f(v)$, $g(v)$, $v\in[0,\infty)$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, удовлетворяющие условию $f(0)=0$, $g(0)=0$. Тогда*

$$\eta\int\limits_0^\infty e^{-\eta b}\int\limits_0^\infty e^{-\beta z}\mathbf{E}\,e^{-B_b(z)}\,db\,dz=\eta\,R(v)\,Q(v)+M(v)\,H(v), \tag{2.2}$$

где при $v\in[0,\infty)$ функции R, Q, M, H, L являются единственными ограниченными непрерывными решениями задачи

$$2vR''(v)-g(v)R(v)=0,\quad R(0)=1, \tag{2.3}$$

$$2vQ''(v)+2Q'(v)-(\beta+g(v))Q(v)=-H(v), \tag{2.4}$$

$$2vL''(v)-f(v)L(v)=0,\qquad L(0)=1, \tag{2.5}$$

$$2vH''(v)+2H'(v)-(\beta+\eta+f(v))H(v)=-L(v), \tag{2.6}$$

$$2vM''(v)-(\eta+f(v))M(v)=-\eta R(v),\quad M(0)=1. \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. Однородное уравнение

$$2vX''(v)+2X'(v)-(\beta+f(v))X(v)=0,\quad v\geqslant 0,$$

имеет линейно независимое строго возрастающее решение, ограниченное в нуле, и имеет убывающее решение с логарифмической асимптотикой в нуле (см. §5, глава V из [1]).

Доказательство теоремы 2.1. Предположим сначала, что f и g – ограниченные дважды непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными первыми и вторыми производными.

$$\eta\int\limits_0^\infty db\,e^{-\eta b}\int\limits_0^\infty dz\,e^{-\beta z}\mathbf{E}\,e^{-B_b(z)}=\eta\int\limits_0^\infty db\,e^{-\eta b}\int\limits_b^\infty dz\,e^{-\beta z}\mathbf{E}\,e^{-B_b(z)}$$

$$+\eta\int\limits_0^\infty db\,e^{-\eta b}\int\limits_0^b dz\,e^{-\beta z}\mathbf{E}\,e^{-B_b(z)}=:I_1+I_2. \tag{2.8}$$

Обозначим для краткости $\varrho:=\varrho(v,z)$.

Поскольку $\ell(\varrho, z) = v$, то используя марковское свойство, найдем, что при $b < z$

$$\mathbf{E}\, e^{-B_b(z)} = r(z,v)\, \bar q_b(z,v), \tag{2.9}$$

где

$$r(z,v) := \mathbf{E}\, \exp\Big(- \int\limits_z^\infty g(\ell(\varrho,y))\, dy\Big),$$

$$\bar q_b(z,v) := \mathbf{E}\, \exp\Big(- \int\limits_b^z g(\ell(\varrho,y))\, dy - \int\limits_{-\infty}^b f(\ell(\varrho,y))\, dy\Big).$$

Применяя теорему 1.1, получим

$$r(z,v) = \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^\infty g(V_1(h))\, dh\Big)\Big| V_1(0) = v\Big\}.$$

Ясно, что функция $r(z,v)$ не зависит от z. Обозначим $R(v) := r(z,v)$.

Применим теорему 12.5, глава II из [1]. Тогда получим, что функция $R(v)$, $v \in (0,\infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2vR''(v) - g(v)R(v) = 0.$$

Известно, что 0-мерный бесселевский процесс, попадая в нуль, из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю. В силу описания процесса V_1, аналогичное утверждение верно и для него. Отсюда, так как $g(0) = 0$, следует, что $R(0) = 1$.

Это приводит к задаче

$$2vR''(v) - g(v)R(v) = 0, \qquad R(0) = 1, \tag{2.10}$$

которая совпадает с задачей (2.3).

Рассмотрим $\bar q_b(z,v)$. Снова применяя теорему 1.1, и учитывая обратное направление течения времени у процессов V_3, V_2, их однородность и то, что $V_2(0) = v$, получим $\bar q_b(z,v) = q_b(z-b,v)$, где

$$q_b(z-b,v) := \mathbf{E}\, \exp\Big(- \int\limits_0^{z-b} g(V_2(h))\, dh - \int\limits_{z-b}^z f(V_2(h))\, dh - \int\limits_0^\infty f(V_3(h))\, dh\Big)$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_0^\infty f(V_3(h))\,dh - \int_{z-b}^{z} f(V_2(h))\,dh\Big) \Big| V_2(z-b) = \rho \Big\}$$

$$\times\, \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_0^{z-b} g(V_2(h))\,dh\Big); V_2(z-b) \in d\rho \Big\}$$

$$= \mathbf{E}\Big\{ H_b(V_2(z-b)) \exp\Big(- \int_0^{z-b} g(V_2(h))\,dh\Big) \Big| V_2(0) = v \Big\},$$

и

$$H_b(\rho) := \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_0^\infty f(V_3(h))\,dh - \int_{z-b}^{z} f(V_2(h))\,dh\Big) \Big| V_2(z-b) = \rho \Big\}.$$

Аналогично, используя марковское свойство процесса V_2 и его однородность, получим

$$H_b(v) := \mathbf{E}\Big\{ L(V_2(b)) \exp\Big(- \int_0^{b} f(V_2(h))\,dh\Big) \Big| V_2(0) = v \Big\},$$

$$L(v) := \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int_0^\infty f(V_3(h))\,dh\Big) \Big| V_3(0) = v \Big\}.$$

Применим теорему 13.2, глава II, к функциям $q_b(t,v)$, $H_b(\rho)$ и теорему 12.5, глава II из [1], к функции $L(\mu)$, получим следующие дифференциальные задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t} q_b(t,v) = 2v \frac{\partial^2}{\partial v^2} q_b(t,v) + 2 \frac{\partial}{\partial v} q_b(t,v) - g(v) q_b(t,v), \tag{2.11}$$

$$q_b(0,v) = H_b(v), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} H_b(v) = 2v \frac{\partial^2}{\partial v^2} H_b(v) + 2 \frac{\partial}{\partial v} H_b(v) - f(v) H_b(v), \tag{2.13}$$

$$H_0(v) = L(v), \tag{2.14}$$

$$2vL''(v) - f(v)L(v) = 0, \quad L(0) = 1. \tag{2.15}$$

В силу (2.8) и (2.9), имеем

$$I_1 = \eta R(v) \int_0^\infty db\, e^{-\eta b} Q_b(v),$$

где

$$Q_b(v) := \int_b^\infty e^{-\beta z} q_b(z-b, v)\, dz = e^{-\beta b} \int_0^\infty e^{-\beta s} q_b(s, v)\, ds.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$2vQ_b''(v) + 2Q_b'(v) - (\beta + g(v))Q_b(v) = -e^{-\beta b} H_b(v).$$

Следовательно,

$$Q(v) := \int_0^\infty db\, e^{-(\beta+\eta)b} Q_b(v)$$

удовлетворяет уравнению

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\beta + g(v))Q(v) = -H(v), \tag{2.16}$$

где

$$H(v) := \int_0^\infty db\, e^{-(\beta+\eta)b} H_b(v)$$

удовлетворяет уравнению

$$2vH''(v) + 2H'(v) - (\beta + \eta + f(v))H(v) = -L(v). \tag{2.17}$$

В итоге имеем

$$I_1 = \eta R(v) Q(v).$$

Это дает первое слагаемое в формуле (2.2).

Выведем второе слагаемое.

Используя марковское свойство, найдем, что при $0 < z < b$

$$\mathbf{E}\, e^{-B_b(z)} = m_b(b-z, v) p(z, v)\, dv, \tag{2.18}$$

где

$$m_b(b-z, v) := \mathbf{E} \exp\Big(-\int_z^b f(\ell(\varrho, y))\, dy - \int_b^\infty g(\ell(\varrho, y))\, dy \Big),$$

$$p(z,v) := \mathbf{E}\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{z} f(\ell(\varrho,y))\,dy\Big).$$

Рассмотрим $m_b(b-z,v)$. Обозначим $s := b-z$. Снова применяя теорему 1.1, имеем

$$\begin{aligned}
m_b(s,v) = \int\limits_0^{\infty}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(&-\int\limits_0^{s} f(V_1(h))\,dh \\
&-\int\limits_s^{\infty} g(V_1(h))\,dh\Big)\Big|V_1(s)=\rho\Big\}\mathbf{P}\big(V_1(s)\in d\rho\big) \\
= \int\limits_0^{\infty}\mathbf{E}\Big\{&\exp\Big(-\int\limits_s^{\infty} g(V_1(h))\,dh\Big)\Big|V_1(s)=\rho\Big\} \\
&\times\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{s} f(V_1(h))\,dh\Big); V_1(s)\in d\rho\Big\} \\
= \mathbf{E}\Big\{&R(V_1(s))\exp\Big(-\int\limits_0^{s} f(V_1(h))\,dh\Big)\Big|V_1(0)=v\Big\},
\end{aligned}$$

где $R(v)$ удовлетворяет уравнению (2.10). Мы получили, что $m_b(s,v) = m(s,v)$, т.е. не зависит от b. Очевидно, что $m(0,v)=R(v)$, $m(s,0)=1$.

Далее, так как $V_3(0)=V_2(z)$, имеем

$$\begin{aligned}
p(z,v) = \int\limits_0^{\infty}\mathbf{E}\Big\{&\exp\Big(-\int\limits_0^{\infty} f(V_3(h))\,dh\Big)\Big|V_3(0)=\rho\Big\} \\
&\times\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{z} f(V_2(h))\,dh\Big); V_2(z)\in d\rho\Big\} \\
= \mathbf{E}\Big\{&L(V_2(z))\exp\Big(-\int\limits_0^{z} f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\} = H_z(v),
\end{aligned}$$

где $L(v)$ удовлетворяет уравнению (2.15), а $H_b(v)$ удовлетворяет уравнению (2.13).

Применим теорему 13.2, глава II из [1], к функции $m(t,v)$ и получим следующую дифференциальную задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} m(t,v) = 2v \frac{\partial^2}{\partial v^2} m(t,v) - f(v)\, m(t,v), \\ &m(0,v) = R(v). \end{aligned} \tag{2.19}$$

В силу (2.8) и (2.18), имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \eta \int_0^\infty db\, e^{-\eta b} \int_0^b e^{-z\beta} \mathbf{E}\, e^{-B_b(z)} dz \\ &= \lambda\eta \int_0^\infty db\, e^{-\eta b} \int_0^b dz e^{-z\beta} m_b(b-z,v)\, p(z,v) \\ &= \int_0^\infty dz\, e^{-(\eta+\beta)z} p(z,v) \eta \int_z^\infty e^{-\eta(b-z)} m_b(b-z,v)\, db \\ &= M(v) \int_0^\infty dz\, e^{-(\eta+\beta)z} H_z(v) = M(v)\, H(v), \end{aligned}$$

где

$$M(v) := \eta \int_0^\infty e^{-\eta s} m(s,v)\, ds, \quad M(0) = 1.$$

Функция $M(v)$ удовлетворяет уравнению (2.7).

Это дает второе слагаемое в формуле (2.2).

Как и при доказательстве теоремы 4.1, глава IV из [1], результат для кусочно непрерывных функций $f(v)$ и $g(v)$, $v \geqslant 0$, доказывается с помощью аппроксимации f и g непрерывно дифференцируемыми функциями.

Теорема 2.1 доказана. $\square$

§3. Распределение интегральных функционалов и супремумов броуновского локального времени

Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума (см. §2, глава III, и §5, глава V из [1]). В этом параграфе будут получены результаты, которые позволяют вычислять совместные распределения функционала $B_b(z)$ и величин $\sup\limits_{y\in(-\infty,b)} \ell(\varrho(v,z),y)$, $\sup\limits_{y\in(b,\infty)} \ell(\varrho(v,z),y)$.

Теорема 3.1. *Пусть $f(v)$, $g(v)$, $v \in [0,\infty)$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $f(0)=0$ и $g(0)=0$. Тогда при любых неотрицательных числах $\bar f$ и $\bar g$*

$$\eta\int\limits_0^\infty e^{-\eta b}\int\limits_0^\infty e^{\beta z}\mathbf{E}\Big\{e^{-B_b(z)};\ \sup_{y\in(-\infty,b)}\ell(\varrho,y)\leqslant\bar f,\ \sup_{y\in(b,\infty)}\ell(\varrho,y)\leqslant\bar g\Big\}\,db\,dz$$
$$=\eta R(v)\,Q(v)+M(v)\,H(v), \tag{3.1}$$

где при $v\in[0,\max\{\bar f,\bar g\})$ функции R, Q, M, H, L являются единственными ограниченными непрерывными решениями задачи

$$2vR''(v)-g(v)R(v)=0,\quad R(0)=1,\quad R(\bar g)=0, \tag{3.2}$$
$$2vQ''(v)+2Q'(v)-(\beta+g(v))Q(v)=-H(v),\quad Q(\bar g)=0, \tag{3.3}$$
$$2vL''(v)-f(v)L(v)=0,\quad L(0)=1,\quad L(\bar f)=0, \tag{3.4}$$
$$2vH''(v)+2H'(v)-(\beta+\eta+f(v))H(v)=-L(v),\ H(\bar f)=0, \tag{3.5}$$
$$2vM''(v)-(\eta+f(v))M(v)=-\eta R(v),\ M(0)=1,\ M(\bar f)=0. \tag{3.6}$$

Замечание 3.1. Функции R, Q правее точки $\bar g$ и функции M, H, L правее точки $\bar f$ считаются равными нулю.

Доказательство. Применим теорему 2.1. Обозначим для краткости

$$f_\gamma(v):=f(v)+\gamma\,\mathbf{1}_{(f,\infty)}(v),\qquad g_\gamma(v):=g(v)+\gamma\,\mathbf{1}_{(g,\infty)}(v).$$

Многие из предыдущих обозначений с заменой функций f и g на функции f_γ и g_γ будем снабжать индексом γ. Так, например,

$$B_b^\gamma(z):=\int\limits_{-\infty}^b f_\gamma(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy+\int\limits_b^\infty g_\gamma(\ell(\varrho(v,z),y))\,dy.$$

Доказательство теоремы 3.1 основано на очевидном соотношении

$$\eta\int\limits_0^\infty e^{-\eta b}\int\limits_0^\infty e^{\beta z}\mathbf{E}\Big\{e^{-B_b(z)};\ \sup_{y\in(-\infty,b)}\ell(\varrho,y)\leqslant\bar f,\ \sup_{y\in(b,\infty)}\ell(\varrho,y)\leqslant\bar g\Big\}\,db\,dz$$
$$=\lim_{\gamma\to\infty}E_\gamma,$$

где

$$E_\gamma := \eta \int\limits_0^\infty e^{-\eta b} \int\limits_0^\infty e^{\beta z} \mathbf{E} \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_{-\infty}^b \big(f(\ell(\varrho, y)) + \gamma \, \mathbf{1}_{(f,\infty)}(\ell(\varrho, y)) \big) \, dy$$

$$- \int\limits_b^\infty \big(g(\ell(\varrho, y)) + \gamma \, \mathbf{1}_{(g,\infty)}(\ell(\varrho, y)) \big) dy \Big) \Big\} db \, dz =: I_1^\gamma + I_2^\gamma.$$

Здесь

$$I_1^\gamma = \eta R_\gamma(v) Q_g a(v), \qquad I_2^\gamma = M_\gamma(v) H_\gamma(v).$$

Начнем с рассмотрения предельного поведения I_1^γ при $\gamma \to \infty$. Функция

$$R_\gamma(v) := \mathbf{E} \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^\infty g_\gamma(V_1(h)) \, dh \Big) \Big| V_1(0) = v \Big\}$$

является ограниченным решением задачи

$$2v R_\gamma''(v) - (g(v) + \gamma \, \mathbf{1}_{(g,\infty)}(v)) R_\gamma(v) = 0, \qquad R_\gamma(0) = 1. \tag{3.7}$$

Очевидно, что при $\gamma \to \infty$ имеем предельное соотношение

$$R_\gamma(v) \to R(v), \tag{3.8}$$

где

$$R(v) := \mathbf{E} \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^\infty g(V_1(h)) \, dh \Big) \mathbf{1}_{[0,\bar g]} \Big(\sup_{h \in (0,\infty)} V_1(h) \Big) \Big| V_1(0) = v \Big\}.$$

Действительно, в выражении для функции $R_\gamma(v)$ формальную единицу после экспоненты от интегрального функционала можно представить в виде суммы

$$1 = \mathbf{1}_{[0,\bar g]} \Big(\sup_{h \in (0,\infty)} V_1(h) \Big) + \mathbf{1}_{(\bar g,\infty)} \Big(\sup_{h \in (0,\infty)} V_1(h) \Big).$$

Тогда первое слагаемое будет равно $R(v)$, а второе будет стремиться к нулю.

Имея сходимость (3.8), в задаче (3.7) можно перейти к пределу (см. аналогичный переход при доказательстве теоремы 2.1, глава III из [1]), и получить, что функция $R(v)$, $v \in [0, \bar g]$, является единственным решением задачи (3.2).

Положим

$$L_\gamma(v) := \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f_\gamma(V_3(h))\,dh\Big)\Big|V_3(0)=v\Big\}.$$

Тогда функция $L_\gamma(v)$ является ограниченным решением задачи

$$2vL''_\gamma(v) - (f(v) + \gamma\,\mathbf{1}_{(f,\infty)}(v))\,L_\gamma(v) = 0, \qquad L_\gamma(0) = 1. \tag{3.9}$$

Как и выше, при $\gamma \to \infty$ имеем предельное соотношение

$$L_\gamma(v) \to L(v), \tag{3.10}$$

где

$$L(v) := \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(V_3(h))\,dh\Big)\,\mathbf{1}_{[0,f]}\Big(\sup_{h\in(0,\infty)} V_3(h)\Big)\Big|V_3(0)=v\Big\}.$$

Имея сходимость (3.10), в задаче (3.9) можно перейти к пределу (см. аналогичный переход при доказательстве теоремы 2.1 глава III из [1]) и получить, что функция $L(v)$, $v \in [0,\bar f]$, является единственным решением задачи (3.4).

Положим при $b < z$

$$H_b^\gamma(v) := \mathbf{E}\Big\{L_\gamma(V_2(b))\exp\Big(-\int\limits_0^b f_\gamma(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\}.$$

Пусть

$$H_\gamma(v) := \int\limits_0^\infty db\, e^{-(\eta+\beta)b} H_b^\gamma(v).$$

Согласно (2.17), функция H_γ является ограниченным решением уравнения

$$2vH''_\gamma(v) + 2H'_\gamma(v) - (\beta + \eta + f(v) + \gamma\mathbf{1}_{(f,\infty)}(v))H_\gamma(v) = -L_\gamma(v). \tag{3.11}$$

При $\gamma \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$H_\gamma(v) \to H(v), \tag{3.12}$$

где

$$H(v) := \int\limits_0^\infty db\, e^{-(\eta+\beta)b} H_b(v),$$

а

$$H_b(v):=\mathbf{E}\Big\{L(V_2(b))\exp\Big(-\int\limits_0^b f(V_2(h))\,dh\Big)\mathbf{1}_{[0,\bar f]}\Big(\sup_{h\in(0,b)}V_2(h)\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\}.$$

В силу сходимостей (3.10) и (3.12), в задаче (3.11) можно перейти к пределу и получить, что функция $H(v)$, $v\in[0,\bar f]$, является единственным решением задачи (3.5).

Завершим предельный переход для I_1^γ при $\gamma\to\infty$. Имеем

$$q_b^\gamma(s,v):=\mathbf{E}\Big\{H_b^\gamma(V_2(s))\exp\Big(-\int\limits_0^s g_\gamma(V_2(h))\,dh\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\}$$

и при $b<z$

$$Q_b^\gamma(v):=\int\limits_0^\infty e^{-z\beta}q_b^\gamma(z-b,v)\,dz,$$

а

$$Q_\gamma(v):=\int\limits_0^\infty db\,e^{-(\eta+\beta)b}Q_b^\gamma(v).$$

Функция $Q_\gamma(v)$ согласно (2.16) удовлетворяет уравнению

$$2vQ_\gamma''(v)+2Q_\gamma'(v)-(\beta+g(v)+\gamma\,\mathbf{1}_{(\bar f,\infty)}(v))Q_\gamma(v)=-H_\gamma(v). \tag{3.13}$$

При $\gamma\to\infty$ имеет место предельное соотношение

$$Q_\gamma(v)\to Q(v), \tag{3.14}$$

где

$$Q(v):=\int\limits_0^\infty db\,e^{-(\eta+\beta)b}\int\limits_0^\infty e^{-s\beta}\mathbf{E}\Big\{H_b(V_2(s))$$
$$\times\exp\Big(-\int\limits_0^s g(V_2(h))\,dh\Big)\mathbf{1}_{[0,\bar g]}\Big(\sup_{h\in(0,s)}V_2(h)\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\}ds.$$

В силу сходимостей (3.12) и (3.14), в задаче (3.13) можно перейти к пределу и получить, что функция $Q(v)$, $v\in[0,g]$, является единственным решением задачи (3.3).

В результате имеем, что при $\gamma \to \infty$

$$I_1^\gamma \to \eta\, R(v)\, Q(v).$$

Перейдем к рассмотрению предельного поведения I_2^γ при $\gamma \to \infty$. Имеем

$$M_\gamma(v) := \eta \int_0^\infty e^{-\eta s} m_\gamma(s,v)\, ds, \quad M(0) = 1,$$

где

$$m_\gamma(s,v) = \mathbf{E}\Big\{ R_\gamma(V_1(s)) \exp\Big(- \int_0^s f_\gamma(V_1(h))\, dh\Big) \Big| V_1(0) = v\Big\}.$$

Функция $M_\gamma(v)$ согласно (2.7) удовлетворяет уравнению

$$2vM_\gamma''(v) - (\eta + f(v) + \gamma \mathbf{1}_{(\bar f,\infty)}(v))M_\gamma(v) = -\eta R_\gamma(v). \tag{3.15}$$

При $\gamma \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$M_\gamma(v) \to M(v), \tag{3.16}$$

где

$$M(v) := \eta \int_0^\infty ds\, e^{-\eta s} \mathbf{E}\Big\{ R(V_1(s)) \exp\Big(- \int_0^s f(V_1(h))\, dh\Big) \times \mathbf{1}_{[0,\bar f]}\Big(\sup_{h\in(0,s)} V_1(h)\Big) \Big| V_1(0) = v\Big\}.$$

В силу сходимостей (3.8) и (3.16), в задаче (3.15) можно перейти к пределу и получить, что функция $M(v)$, $v \in [0, \bar f]$, является единственным решением задачи (3.6).

Функция $H_\gamma(v)$ удовлетворяет уравнению (3.11) и предельному соотношению (3.12).

В результате имеем, что при $\gamma \to \infty$

$$I_2^\gamma \to M(v)\, H(v).$$

Теорема 3.1 доказана. □

§4. Распределение супремумов броуновского локального времени на смежных интервалах

Пусть μ – показательно распределенная случайная величина с параметром $\eta > 0$, не зависящая от исходного броуновского движения W. Эта величина соответствует преобразованию Лапласа с параметром η. Мы хотим вычислить следующее выражение для $\varrho := \varrho(v, z)$

$$E := \int_0^\infty e^{-\beta z} \mathbf{P}\Big(\sup_{y \in (-\infty,\mu)} \ell(\varrho(v,z),y) \leqslant f, \sup_{y \in (\mu,\infty)} \ell(\varrho(v,z),y) \leqslant g \Big)\, db\, dz.$$

Обозначим через $I_l(x)$, $K_l(x)$ модифицированные функции Бесселя порядка l. Определение этих функций см. [5, глава 13], или [1, приложение 2].

Теорема 4.1. *Пусть $f \leqslant g$, тогда при $0 \leqslant v \leqslant f$*

$$\begin{aligned} E = \big(1 - \tfrac{v}{g}\big) \Big\{ \frac{1}{\beta}\Big(1 - \frac{v}{f}\Big) - \frac{2}{\beta^2 f} - \Big(\frac{2\eta}{\beta(\beta+\eta) f} + \frac{2\sqrt{2}}{(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt{f}} \frac{I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} \Big) \\ \times \Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})} I_0(\sqrt{2\beta f}) - K_0(\sqrt{2\beta f}) \Big) I_0(\sqrt{2\beta v}) \\ + \frac{2\sqrt{2}}{\beta^{3/2}\sqrt{f}} \Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})} I_1(\sqrt{2\beta f}) + K_1(\sqrt{2\beta f}) \Big) I_0(\sqrt{2\beta v}) \\ - \big(1 - \tfrac{f}{g}\big) \frac{\sqrt{v} I_1(\sqrt{2\eta v})}{\sqrt{f} I_1(\sqrt{2\eta f})} \Big(\frac{1}{(\beta+\eta)} \big(1 - \tfrac{v}{f}\big) + \frac{2}{(\beta+\eta)^2 f} \Big(\frac{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} - 1 \Big) \Big) \Big\}, \end{aligned}$$

а при $f \leqslant v \leqslant g$

$$\begin{aligned} E = \big(1 - \tfrac{v}{g}\big) \Big(- \frac{2\eta I_0(\sqrt{2\beta f})}{\beta(\beta+\eta)} - \frac{2\sqrt{2} I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt{f}} \frac{I_0(\sqrt{2\beta f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} \\ + \frac{2\sqrt{2}}{\beta^{3/2}\sqrt{f}} I_1(\sqrt{2\beta f}) \Big) \Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})} I_0(\sqrt{2\beta v}) - K_0(\sqrt{2\beta v}) \Big). \end{aligned}$$

Следствие 4.1. *При $g \to \infty$ имеем $E \to E_0$, где*

$$E_0 := \eta \int_0^\infty e^{-\eta b} \int_0^\infty e^{-\beta z} \mathbf{P}\Big(\sup_{y \in (-\infty,b)} \ell(\varrho(v,z),y) \leqslant f \Big)\, db\, dz. \tag{4.1}$$

При $0 \leqslant v \leqslant f$

$$E_0 = \frac{1}{\beta}\Big(1-\frac{v}{f}\Big) - \frac{2}{\beta^2 f} + \Big(\frac{2\eta}{\beta(\beta+\eta)f} + \frac{2\sqrt{2}}{(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt{f}}\,\frac{I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}\Big)$$
$$\times K_0(\sqrt{2\beta f})I_0(\sqrt{2\beta v}) + \frac{2\sqrt{2}}{\beta^{3/2}\sqrt{f}}K_1(\sqrt{2\beta f})I_0(\sqrt{2\beta v})$$
$$-\frac{\sqrt{v}I_1(\sqrt{2\eta v})}{\sqrt{f}I_1(\sqrt{2\eta f})}\Big(\frac{1}{(\beta+\eta)}\big(1-\frac{v}{f}\big) + \frac{2}{(\beta+\eta)^2 f}\Big(\frac{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} - 1\Big)\Big),$$

а при $f \leqslant v < \infty$

$$E_0 = \Big(\frac{2\eta I_0(\sqrt{2\beta f})}{\beta(\beta+\eta)} - \frac{2\sqrt{2}I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt{f}}\,\frac{I_0(\sqrt{2\beta f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}$$
$$-\frac{2\sqrt{2}}{\beta^{3/2}\sqrt{f}}I_1(\sqrt{2\beta f})\Big)K_0(\sqrt{2\beta v}).$$

Доказательство теоремы 4.1. Применим теорему 3.1 с $g(v) \equiv 0$, $f(v) \equiv 0$. Решения задач (3.2) и (3.4) в этом случае имеют следующий вид:

$$R(v) = 1 - \frac{v}{g}, \qquad 0 \leqslant v \leqslant g, \tag{4.2}$$

$$L(v) = 1 - \frac{v}{f}, \qquad 0 \leqslant v \leqslant f. \tag{4.3}$$

Правее соответственно точек g и f эти решения обращаются в нуль.

Решим задачу (3.5) при $f(v) \equiv 0$. При $v \in [0, f]$ рассмотрим уравнение

$$2vH''(v) + 2H'(v) - (\beta+\eta)H(v) = -1 + \frac{v}{f}.$$

Частное решение H_p имеет вид

$$H_p(v) = \frac{1}{(\beta+\eta)}\big(1-\frac{v}{f}\big) - \frac{2}{(\beta+\eta)^2 f}.$$

Ограниченное в нуле решение однородного уравнения (см. [1], приложение 4, формулу 16*a* при $\nu = 0$, $p = 0$) имеет вид

$$Y(v) = I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v}). \tag{4.4}$$

В итоге, решение искомой задачи следующее

$$H(v) = \frac{1}{(\beta+\eta)}\big(1-\frac{v}{f}\big) + \frac{2}{(\beta+\eta)^2 f}\Big(\frac{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} - 1\Big).$$

Решим задачу (3.6) при $f(v) \equiv 0$. При $v \in [0, f]$ рассмотрим уравнение

$$2vM''(v) - \eta M(v) = -\eta\bigl(1 - \frac{v}{g}\bigr)\,\mathbf{1}_{[0,g]}(v).$$

При $f \leqslant g$ частное решение $M_p(v)$, $v \in [0, f]$, имеет вид $1 - \frac{v}{g}$. Обращающееся в ноль в начальной точке решение однородного уравнения имеет (см. [1, приложение 4], формулу 6a при $p = 1/2$) вид

$$Y(v) = \sqrt{2\eta v} I_1(\sqrt{2\eta v}).$$

Важно, что $Y(0) = 0$. В итоге, решение искомой задачи следующее

$$M(v) = 1 - \frac{v}{g} - \bigl(1 - \frac{f}{g}\bigr)\frac{\sqrt{2\eta v}\, I_1(\sqrt{2\eta v})}{\sqrt{2\eta f}\, I_1(\sqrt{2\eta f})}.$$

Решим задачу (3.3) при $g(v) \equiv 0$. При $v \in [0, g]$ рассмотрим уравнение

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - \beta Q(v) = -H(v)\mathbf{1}_{[0,f]}(v)$$

с граничным условием $Q(g) = 0$. Ограниченное в нуле непрерывно дифференцируемое решение этого уравнения ищем в виде

$$Q(v) = \begin{cases} \alpha(v) + AI_0(\sqrt{2\beta v}), & 0 \leqslant v \leqslant f, \\ B\Bigl(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})}\, I_0(\sqrt{2\beta v}) - K_0(\sqrt{2\beta v})\Bigr), & f \leqslant v \leqslant g, \end{cases} \tag{4.9}$$

где $\alpha(v)$, $v \in [0, f]$, – частное решение уравнения

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - \beta Q(v) = -\frac{1}{(\beta+\eta)}\bigl(1 - \frac{v}{f}\bigr) - \frac{2}{(\beta+\eta)^2 f}\Bigl(\frac{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} - 1\Bigr).$$

Нетрудно проверить, что решение $\alpha(v)$ имеет вид

$$\alpha(v) = \frac{1}{\beta(\beta+\eta)}\Bigl(1 - \frac{v}{f}\Bigr) - \frac{2}{\eta\beta^2 f} - \frac{2}{\eta(\beta+\eta)^2 f}\Bigl(\frac{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} - 1\Bigr).$$

Получаем

$$\alpha(f) = -\frac{2}{\eta\beta^2 f}, \quad \alpha'(f) = -\frac{1}{\beta(\beta+\eta)f} - \frac{\sqrt{2}}{\eta(\beta+\eta)^{3/2} f^{3/2}}\frac{I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}.$$

Далее для упрощения формул обозначим $\hat{g} := \sqrt{2\beta g}$, $\hat{f} := \sqrt{2\beta f}$.

Система алгебраических уравнений, вытекающих из (4.9) при условии непрерывности решения и его производной в точке f, имеет решение

$$A = 2f\alpha'(f)\Big(\frac{K_0(\hat g)}{I_0(\hat g)}\, I_0(\hat f) - K_0(\hat f)\Big) - \sqrt{2\beta f}\alpha(f)\Big(\frac{K_0(\hat g)}{I_0(\hat g)}\, I_1(\hat f) + K_1(\hat f)\Big),$$
$$B = 2f\alpha'(\hat f) I_0(\hat f) - \sqrt{2\beta f}\alpha(f) I_1(\hat f).$$

В результате получаем

$$Q(v) = \begin{cases} \alpha(v) + 2f\alpha'(f)\Big(\frac{K_0(\hat g)}{I_0(\hat g)} I_0(\hat f) - K_0(\hat f)\Big) I_0(\sqrt{2\beta v}) & \\ -\sqrt{2\beta f}\alpha(f)\Big(\frac{K_0(\hat g)}{I_0(\hat g)}\, I_1(\hat f) + K_1(\hat f)\Big) I_0(\sqrt{2(\beta v}), & 0 \leqslant v \leqslant f, \\ \big(2f\alpha'(f) I_0(\hat f) - \sqrt{2\beta f}\alpha(f) I_1(\hat f)\big)\Big(\frac{K_0(\hat g)}{I_0(\hat g)} I_0(\sqrt{2\beta v}) & \\ -K_0(\sqrt{2\beta v})\Big), & f \leqslant v \leqslant g. \end{cases}$$

Подставляя выражение для $\alpha(v)$, имеем при $0 \leqslant v \leqslant f$

$$\begin{aligned} Q(v) = \frac{1}{\beta(\beta+\eta)}\Big(1 - \frac{v}{f}\Big) - \frac{2}{\eta\beta^2 f} - \frac{2}{\eta(\beta+\eta)^2 f}\Big(\frac{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} - 1\Big) \\ - \Big(\frac{2}{\beta(\beta+\eta)f} + \frac{2\sqrt2}{\eta(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt f}\, \frac{I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}\Big) \\ \times \Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})} I_0(\sqrt{2\beta f}) - K_0(\sqrt{2\beta f})\Big) I_0(\sqrt{2\beta v}) \\ + \frac{2\sqrt2}{\eta\beta^{3/2}\sqrt f}\Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})}\, I_1(\sqrt{2\beta f}) + K_1(\sqrt{2\beta f})\Big) I_0(\sqrt{2\beta v}). \end{aligned}$$

При $f \leqslant v \leqslant g$

$$\begin{aligned} Q(v) = \Big(-\frac{2I_0(\sqrt{2\beta f})}{\beta(\beta+\eta)} - \frac{2\sqrt2 I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{\eta(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt f}\, \frac{I_0(\sqrt{2\beta f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})} \\ + \frac{2\sqrt2}{\eta\beta^{3/2}\sqrt f}\, I_1(\sqrt{2\beta f})\Big)\Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})} I_0(\sqrt{2\beta v}) - K_0(\sqrt{2\beta v})\Big). \end{aligned}$$

В результате получаем $E = \eta R(v)Q(v) + M(v)H(v)$, и, следовательно, при $0 \leqslant v \leqslant f$

$$\begin{aligned} E = \big(1 - \frac{v}{g}\big)\Big\{\frac{1}{\beta}\Big(1 - \frac{v}{f}\Big) - \frac{2}{\beta^2 f} - \Big(\frac{2\eta}{\beta(\beta+\eta)f} + \frac{2\sqrt2}{(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt f}\, \frac{I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}\Big) \\ \times \Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})} I_0(\sqrt{2\beta f}) - K_0(\sqrt{2\beta f})\Big) I_0(\sqrt{2\beta v}) \end{aligned}$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{\beta^{3/2}\sqrt{f}}\Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})}\,I_1(\sqrt{2\beta f})+K_1(\sqrt{2\beta f})\Big)I_0(\sqrt{2\beta v})$$

$$-\big(1-\frac{f}{g}\big)\frac{\sqrt{v}I_1(\sqrt{2\eta v})}{\sqrt{f}I_1(\sqrt{2\eta f})}\Big(\frac{1}{(\beta+\eta)}\big(1-\frac{v}{f}\big)+\frac{2}{(\beta+\eta)^2 f}\Big(\frac{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)v})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}-1\Big)\Big)\Big\},$$

а при $f\leqslant v\leqslant g$

$$E=\big(1-\frac{v}{g}\big)\Big(-\frac{2\eta I_0(\sqrt{2\beta f})}{\beta(\beta+\eta)}-\frac{2\sqrt{2}I_1(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}{(\beta+\eta)^{3/2}\sqrt{f}}\frac{I_0(\sqrt{2\beta f})}{I_0(\sqrt{2(\beta+\eta)f})}$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{\beta^{3/2}\sqrt{f}}\,I_1(\sqrt{2\beta f})\Big)\Big(\frac{K_0(\sqrt{2\beta g})}{I_0(\sqrt{2\beta g})}I_0(\sqrt{2\beta v})-K_0(\sqrt{2\beta v})\Big).\quad\square$$

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Санкт-Петербург, Лань, 2013.
2. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 56–86.
3. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963), 615–630.
4. А. Н. Бородин, *О распределении неоднородных функционалов от броуновского локального времени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **526** (2023), 52-77.
5. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функцмям*, Москва, Наука, 1979.

Borodin A. N. On the distribution of inhomogeneous functionals of Brownian local time at the inverse local time moment.

We consider the question: how to calculate distributions of the simplest inhomogeneous integral functional of Brownian local time with respect to space parameter at the inverse local time moment. For the Laplace transform of distribution of such a functional we obtain formulas expressed in terms of solutions of the second order differential equations, satisfying some boundary conditions. As an application of these formulas the joint distribution of suprema of Brownian local time at adjacent intervals considered at the inverse local time moment are derived.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2024 г.