Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

А. С. Богарев

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРИРАЩЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

§1. Введение

Пусть $X, X_1, X_2 \dots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин и $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, $1 \leqslant d_n \leqslant n$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $S_0 = 0$.

Изучению асимптотического п.н. (почти наверное) поведения статистик

$$S_{n+[d_n]} - S_n, \qquad \max_{0 \leqslant k \leqslant n-[d_n]} (S_{k+[d_n]} - S_k)$$

и

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n-[d_n]} \max_{1 \leqslant j \leqslant [d_n]} (S_{k+j} - S_k)$$

посвящены работы множества авторов. В случае первой статистики в зависимости от вида d_n и моментных условий на распределение X ищется нормирующая последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что справедливо

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{n+[d_n]} - S_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Впервые подобные результаты были получены в работах Л. Шеппа [1] и П. Эрдёша и А. Реньи [2], изучавших асимптотическое поведение статистик $S_{n+[d_n]} - S_n$ и $\max_{0 \leqslant k \leqslant n-[d_n]}(S_{k+[d_n]} - S_k)$ соответственно. В работе [2] и в статьях Ш. Чёрге [3], П. Деовельса и Л. Девроя [4] и Д. Мейсона [5] было изучено поведение малых ($d_n = O(\ln n)$ при $n \to \infty$) приращений сумм. Случай больших приращений ($d_n/\ln n \to \infty$ при $n \to \infty$) был исследован в работе М. Чёрге и П. Ревеса [6] и в статьях Х. Ланцингера [7], Х. Ланцингера и У. Штадтмюллера [8], А. Н. Фролова [9, 10] и М. Н. Тертерова [11].

Ключевые слова: приращения однородных процессов с независимыми приращениями, законы Чёрге–Ревеса, области нормального притяжения асимметричного устойчивого закона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 23-21-00078.

Вид нормирующей последовательности зависит от скорости роста последовательности d_n. В случае малых приращений нормирующая последовательность зависит от всего распределения случайной величины X. Результаты для малых приращений называются законами Эрдёша–Реньи. Если речь идёт о статистике $S_{n+[d_n]} - S_n$, говорят о законе Шеппа.

В случае больших приращений нормирующая последовательность определяется моментными условиями, налагаемыми на случайную величину X. Получающиеся соотношения называются законами Чёрге–Ревеса.

При $d_n = c(\ln n)^p$, где $c > 0$, $p > 1$, предельное поведение приращений $S_{n+[d_n]} - S_n$ изучалось в работах Х. Ланцингера [7] и Х. Ланцингера и У. Штадтмюллера [8] для величин с конечной дисперсией, а также А. Н. Фролова [9, 10] и М. Н. Тертерова [11] для величин из областей притяжения нормального закона и асимметричных устойчивых законов. При этом в [7] и [8] предполагалось выполненным условие Линника, а в [9, 10] и [11] – односторонний вариант этого условия. Также в статьях М. Чёрге и П. Ревеса [6] и А. Н. Фролова [9, 10] это предельное поведение исследовалось при различных двусторонних и односторонних моментных условиях соответственно.

Х. Ланцингер и У. Штадтмюллер обнаружили, что при выполнении условия Линника в нормирующую последовательность для пограничной длины приращений $c(\ln n)^p$ при $c < c_0$ входит некоторая функция $\varphi(c)$. Подобные результаты для областей нормального притяжения асимметричных устойчивых законов с экспонентой из $(1, 2)$ были получены М. Н. Тертеровым.

Следующий результат получен в [11].

Теорема 1. *Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины X принадлежит области нормального притяжения асимметричного устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2)$ и характеристической функцией*

$$\psi(t) = \exp\left\{-a|t|^\alpha \left(1 + \frac{it}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right\},$$

где $a = \cos(\pi(2-\alpha)/2)$. Пусть $t_0 = \sup\left\{t \geqslant 0 \mid \mathbf{E}\, e^{t(X^+)^{\alpha/(p+\alpha-1)}} < \infty\right\}$ $< \infty$. Положим $a_n = (\ln n)^p$, где $p > 1$, $c_n = (\ln n)^{(p+\alpha-1)/\alpha}$ и

$$\varphi(c) = \max\left\{x + y \;\middle|\; \frac{(\alpha-1)x^{\alpha/(\alpha-1)}}{\alpha c^{1/(\alpha-1)}} + t_0 y^{\alpha/(p+\alpha-1)} \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}.$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{n+[ca_n]} - S_n}{c_n\varphi(c)} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Замечание. Пусть $\beta = \alpha/(\alpha-1)$. Для всех $c > c_0$ функция φ имеет простое выражение $\varphi(c) = \beta^{1/\beta} c^{1/\alpha}$ (см. [11]). Результат теоремы 1 в этом случае получен в [9, 10]. При $\alpha = 2$ тот же результат получен в [6]. При $\alpha = 2$ и малых значениях $c \leqslant c_0$ теорема 1 доказана в [7].

Поведение однородных процессов с независимыми приращениями похоже на поведение сумм независимых одинаково распределённых случайных величин (см. [12]). В настоящей работе получено обобщение теоремы 1 на случай таких процессов, а также доказан аналогичный теореме 1 результат для одного максимума приращений сумм независимых одинаково распределённых случайных величин.

§2. Результаты

Наш первый результат следующий.

Теорема 2. *Пусть* $\xi(t)$, $t \geqslant 0$ *– стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями, с вероятностью* 1 *непрерывный справа и имеющий пределы слева,* $\xi(0) = 0$. *Пусть функция распределения случайной величины* $\xi(1)$ *принадлежит области нормального притяжения асимметричного устойчивого закона с параметром* $\alpha \in (1,2)$ *и характеристической функцией* $\psi(t)$.

Положим $a_t = (\ln t)^p$, *где* $p > 1$, *и* $c_t = (\ln t)^{(p+\alpha-1)/\alpha}$ *при* $t > 0$. *Пусть* $t_0 = \sup\left\{t \geqslant 0 \mid \mathbf{E}\, e^{t(\xi(1)^+)^{\alpha/(p+\alpha-1)}} < \infty\right\} < \infty$. *Определим*

$$M_t = \sup_{0\leqslant s\leqslant ca_t} \bigl(\xi(t+s) - \xi(t)\bigr).$$

Тогда

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\xi(t+ca_t) - \xi(t)}{\varphi(c)\, c_t} = 1 \quad \text{п.н.},$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M_t}{\varphi(c)\, c_t} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Первая часть теоремы 2 расширяет теорему 1 на случай приращений однородных процессов с независимыми приращениями. Вторая её часть является результатом для максимума этих приращений, который мы перенесём на случай максимума приращений сумм независимых одинаково распределённых случайных величин.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *положим*

$$V_n = \max_{1\leqslant l\leqslant [ca_n]} (S_{n+l} - S_n)\,.$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{V_n}{c_n\varphi(c)} = 1 \quad \textit{п.н.}$$

Доказательству теорем 2 и 3 посвящена настоящая работа.

§3. Доказательства

Приступим к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M_t}{\varphi(c)\,c_t} \leqslant 1 \quad \text{п.н.}$$

Пусть $\delta > 0$, $c > 0$, $\tau > 0$. Обозначим $b_n = \varphi(c)\,c_n$. Тогда по лемме 3.3 из [13] найдётся такое $q \in (0,1)$, что

$$\mathbf{P}\Big(\xi\big([(c+\tau)\,a_n]\big) \geqslant -\delta b_n\Big) \geqslant \mathbf{P}\Big(\xi\big([(c+\tau)\,a_n]\big) \geqslant 0\Big) \geqslant q.$$

По замечанию 4.1 из [13] имеем

$$\mathbf{P}\big(\xi(t) \geqslant -\delta b_n\big) \geqslant q \quad \text{для всех } 0 \leqslant t \leqslant [(c+\tau)\,a_n]. \tag{1}$$

Зафиксируем такое q.

Пусть $\tau > 0$ и $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность, такая что $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Так как a_t строго возрастает и $1 + ca_{n+1} \leqslant [(c+\tau)\,a_n]$ при достаточно больших n, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big(&\sup_{n\leqslant t_k\leqslant n+1} M_{t_k} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n\Big)\\
&\leqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{n\leqslant s<t\leqslant n+1+ca_{n+1}} \big(\xi(t)-\xi(s)\big) \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n\Big)\\
&= \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant s<t\leqslant 1+ca_{n+1}} \big(\xi(t)-\xi(s)\big) \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n\Big)\\
&\leqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant s<t\leqslant [(c+\tau)a_n]} \big(\xi(t)-\xi(s)\big) \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n\Big)
\end{aligned}$$

при достаточно больших n. По неравенству (1) и лемме 4.1 из [13]

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(&\sup_{0\leqslant s<t\leqslant[(c+\tau)a_n]}\big(\xi(t)-\xi(s)\big)\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n\Big)\\ &\leqslant q^{-2}\mathbf{P}\Big(\xi\big([(c+\tau)a_n]\big)\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n-2\delta b_n\Big)\\ &\leqslant q^{-2}\mathbf{P}\Big(\xi\big([(c+\tau)a_n]\big)\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+\tau)\,c_n\Big)\end{aligned}$$

при достаточно малом $\delta>0$. В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $(1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n-2\delta b_n\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+\tau)\,c_n$ при достаточно малом δ.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\big(\xi\big([(c+\tau)a_n]\big)\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+\tau)\,c_n\big)$ сходится по лемме 3 из [11]. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\Big(\sup\limits_{n\leqslant t_k\leqslant n+1}M_{t_k}\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n\Big)$ также сходится. По лемме Бореля–Кантелли

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(&M_{t_k}\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_{t_k}\text{ б.ч. по }k\big)\\ &\leqslant\mathbf{P}\Big(\sup_{n\leqslant t_k\leqslant n+1}M_{t_k}\geqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_n\text{ б.ч. по }n\Big)=0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{M_{t_k}}{c_{t_k}}\leqslant(1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\quad\text{п.н.}$$

для любых τ, $\varepsilon>0$. Устремив $\varepsilon\to0$, $\tau\to0$, получаем требуемое.

Теперь докажем неравенство

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\xi(t+ca_t)-\xi(t)}{\varphi(c)\,c_t}\geqslant1\quad\text{п.н.}$$

Пусть $\varepsilon>0$, $\gamma>1$. Обозначим через $\{x\}$ дробную часть числа $x\in\mathbb{R}$. Тогда из того, что $c_{n^\gamma}\to\infty$ при $n\to\infty$, следует

$$\mathbf{P}\big(\xi\left(\{c_{n^\gamma}\}\right)\geqslant-\varepsilon\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)\geqslant\mathbf{P}\Big(\inf_{0\leqslant t\leqslant1}\xi(t)\geqslant-\varepsilon\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\Big)\geqslant\frac12\qquad(2)$$

при достаточно больших n.

Выберем γ, такое как в [11]. Из соотношения (2) следует, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(\xi(n^\gamma + ca_{n^\gamma}) - \xi(n^\gamma) \geqslant (1-2\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)\\
&\quad\geqslant \mathbf{P}\big(\xi(n^\gamma + [ca_{n^\gamma}]) - \xi(n^\gamma) \geqslant (1-\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)\\
&\quad\times \mathbf{P}\big(\xi(n^\gamma + ca_{n^\gamma}) - \xi(n^\gamma + [ca_{n^\gamma}]) \geqslant -\varepsilon\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)\\
&\quad= \mathbf{P}\big(\xi([ca_{n^\gamma}]) \geqslant (1-\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)\cdot \mathbf{P}\big(\xi\,(\{ca_{n^\gamma}\}) \geqslant -\varepsilon\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)\\
&\quad\geqslant \frac{1}{2}\cdot \mathbf{P}\big(\xi([n^\gamma] + [ca_n]) - \xi([n^\gamma]) \geqslant (1-\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)
\end{aligned}$$

при достаточно больших n.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(\xi([n^\gamma] + [ca_n]) - \xi([n^\gamma]) \geqslant (1-\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big)$ расходится по равенству (7) из [11]. Следовательно, также расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(\xi(n^\gamma + ca_{n^\gamma}) - \xi(n^\gamma) \geqslant (1-2\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\big).$$

События $\{\xi(n^\gamma + ca_{n^\gamma}) - \xi(n^\gamma) \geqslant (1-2\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma}\}$ попарно независимы, так как $(n+1)^\gamma > n^\gamma + ca_{n^\gamma} + 1$ при достаточно больших n. По лемме Бореля–Кантелли

$$\mathbf{P}\big(\xi(n^\gamma + ca_{n^\gamma}) - \xi(n^\gamma) \geqslant (1-2\varepsilon)\,\varphi(c)\,c_{n^\gamma} \text{ б.ч. по } n\big) = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда мы имеем

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\xi(t + ca_t) - \xi(t)}{\varphi(c)\,c_t} \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\xi(n^\gamma + ca_{n^\gamma}) - \xi(n^\gamma)}{\varphi(c)\,c_{n^\gamma}} \geqslant 1 - 2\varepsilon \quad \text{п.н.}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Устремив $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое. $\square$

Приступим теперь к доказательству теоремы 3.

Доказательство. По теореме 1 достаточно доказать неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{V_n}{c_n\varphi(c)} \leqslant 1 \quad \text{п.н.}$$

Пусть $\delta > 0$, $c > 0$, $\tau > 0$. Обозначим $b_m = \varphi(c)\,c_m$. Тогда по лемме 3.3 из [13] найдётся такое $q \in (0,\infty)$, что

$$\mathbf{P}\Big(S_{[(c+\tau)a_m]} \geqslant -\delta b_m\Big) \geqslant \mathbf{P}\Big(S_{[(c+\tau)a_m]} \geqslant 0\Big) \geqslant q.$$

По лемме 1.2 из [13] имеем

$$\mathbf{P}\big(S_i \geqslant -\delta b_m\big) \geqslant q \quad \text{для всех } 0 \leqslant i \leqslant [(c+\tau)a_m]. \tag{3}$$

Зафиксируем такое q.

Пусть $\tau > 0$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность, такая что $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Ввиду строгого возрастания последовательности a_n имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\max_{m\leqslant n_k\leqslant m+1} V_{n_k} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m\Big)\\
&\qquad\leqslant \mathbf{P}\Big(\max_{m\leqslant i<j\leqslant m+1+[ca_{m+1}]}\big(S_j - S_i\big) \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m\Big)\\
&\qquad= \mathbf{P}\Big(\max_{0\leqslant i<j\leqslant 1+[ca_{m+1}]}\big(S_j - S_i\big) \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m\Big)\\
&\qquad\leqslant \mathbf{P}\Big(\max_{0\leqslant i<j\leqslant [(c+\tau)a_m]}\big(S_j - S_i\big) \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m\Big)
\end{aligned}$$

при достаточно больших m. По неравенству (3) и лемме 1.1 из [13]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\max_{0\leqslant i<j\leqslant [(c+\tau)a_m]}\big(S_j - S_i\big) \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m\Big)\\
&\qquad\leqslant q^{-2}\mathbf{P}\Big(S_{[(c+\tau)a_m]} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m - 2\delta b_m\Big)\\
&\qquad\leqslant q^{-2}\mathbf{P}\Big(S_{[(c+\tau)a_m]} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+\tau)\,c_m\Big)
\end{aligned}$$

при достаточно малом δ.

По лемме 3 из [11] ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\mathbf{P}\big(S_{[(c+\tau)a_m]} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+\tau)\,c_m\big)$ сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\mathbf{P}\Big(\max\limits_{m\leqslant n_k\leqslant m+1} V_{n_k} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m\Big)$ также сходится. По лемме Бореля–Кантелли

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big(V_{n_k} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_{n_k}\ \text{б.ч. по}\ k\big)\\
&\qquad\leqslant \mathbf{P}\Big(\max_{m\leqslant n_k\leqslant m+1} V_{n_k} \geqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\,c_m\ \text{б.ч. по}\ m\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{V_{n_k}}{c_{n_k}} \leqslant (1+\varepsilon)\,\varphi(c+2\tau)\quad \text{п.н.}$$

для любых τ, $\varepsilon > 0$. Устремив $\varepsilon \to 0$, $\tau \to 0$, получаем требуемое. □

Список литературы

1. L. A. Shepp, *A limit law concerning moving averages.* — Ann. Math. Statist. **35** (1964), 424–428.
2. P. Erdös, A. Rényi, *On a new law of large numbers.* — J. Anal. Math. **23** (1970), 103–111.
3. S. Csörgö, *Erdös–Rényi laws.* — Ann. Statist. **7**, No. 4 (1979), 772–787.
4. P. Deheuvels, L. Devroye, *Limit laws of Erdës–Rényi–Shepp type.* — Ann. Probab. **15**, No. 4 (1987), 1363–1386.
5. D. M. Mason, *An extended version of the Erdös – Rényi strong law of large numbers.* — Ann. Probab. **17**, No. 1 (1989), 257–265.
6. M. Csörgö, P. Révész, *Strong Approximations in Probability and Statistics.* New York–London: Academic Press, 1981.
7. H. Lanzinger, *A law of the single logarithm for moving averages of random variables under exponential moment conditions.* — Studia Sci. Math. Hungar. **36** (2000), 65–91.
8. H. Lanzinger, U. Stadtmüller, *Maxima of increments of partial sums for certain subexponential distributions.* — Stoch. Process. Appl. **86** (2000), 307–322.
9. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for large increments of sums.* — Statist. Probab. Lett. **37** (1998), 155–165.
10. A. N. Frolov, *One-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables.* — Studia Sci. Math. Hungar. **39**, No. 3–4 (2002), 333–359.
11. М. Н Тертеров, *О предельном поведении приращений сумм независимых случайных величин из областей притяжения асимметричных устойчивых распределений.* — Вестник Санкт-Петербургского университета, сер. 1. Математика, механика, астрономия, вып. 2 (2011), 95–103.
12. А. Н. Фролов, *Универсальные предельные теоремы для приращений процессов с независимыми приращениями.* — Теория вероятн. и её примен. **49**, No. 3 (2004), 601–609.
13. A. N. Frolov, *Universal theory for strong limit theorems of probability.* Singapore: World Scientific, 2019.

Bogarev A. S. On the asymptotic behaviour for increments of homogeneous processes with independent increments.

We derive new results on an asymptotic behaviour for increments and maximum of increments of homogeneous processes with independent increments from a domain of normal attraction of an asymmetric stable law with exponent from $(1, 2)$. Similar result for a maximum of increments of independent random variables sums is obtained as well.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9,
Санкт-Петербург 199034, Россия
E-mail: abogarevs1997@mail.ru

Поступило 15 октября 2024 г.