Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 535, 2024 г.

И. А. Алексеев, В. И. Питербарг, А. В. Савич

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ ГАУССОВСКИХ КОПУЛ

§1. Введение

Вероятности редких событий, таких как наводнения или резкие выбросы в уровне цен финансовых активов, не могут быть оценены при помощи стандартных методов. Построение эмпирической функции распределения на основе имеющихся данных не позволяет исследовать искомую вероятность, поскольку интересующие нас события не были зафиксированы на данный момент, т.е., согласно эмпирической функции распределения, их вероятность равна нулю, что безусловно не так. Для того чтобы все же получить некоторую оценку вероятности подобных выбросов, используют методы, основанные на предельном распределении. Основной результат в этом направлении – знаменитая теорема Гнеденко, дающая исчерпывающий ответ на вопрос о предельном распределении последовательности максимумов независимых случайных величин:

Теорема 1 (Гнеденко–Фишера–Типпета)**.** *Пусть* $X_n, n = 1, 2, \ldots,$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если найдутся последовательности констант* $c_n > 0$, $d_n \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \ldots,$ *и невырожденная функция распределения* H*, такие что для всех* x*, являющихся точками непрерывности функции* $H(x)$*, выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant c_n x + d_n\right) = H(x),$$

то H *принадлежит одному из трех типов распределений* $(\alpha > 0)$*:*
Фреше:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0; \end{cases}$$

Ключевые слова: гауссовские копульные временные ряды, зависимые гауссовские копулы, предельные теоремы, порядковые статистики.

Работа И. А. Алексеева частично выполнена при финансовой поддержке Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мёбиуса”.

Вейбулл:

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha}, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

Гумбель:

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Однако, на практике часто приходится иметь дело с зависимыми случайными величинами, для которых данная теорема напрямую неприменима, поэтому многие дальнейшие работы были направлены на обобщение теоремы Гнеденко на случай зависимых случайных величин.

В [9] С. Берман показал сходимость по распределению последовательности нормированных максимумов стационарных зависимых гауссовских случайных величин к функции Гумбеля при некотором ограничении на их корреляционную функцию. Поскольку зависимость для последовательности гауссовских случайных величин полностью определяется их коррелляционной функцией, следующим шагом стало изучение функций от гауссовских случайных величин – так называемых копул.

Необходимые и достаточные условия принадлежности копулы к области притяжения Фреше для независимого случая были найдены В. И. Питербаргом и А. Е. Мазур в [3] и [4]. В. В. Трошиным в [7] было найдено достаточное условие принадлежности копулы к области притяжения Гумбеля. В [3] также предпринята попытка переноса предельной теоремы Бермана на случай копул, принадлежащих области притяжения распределения Фреше.

В данной работе также активно использованы методы решения асимптотических уравнений, описанные Ф. Олвером в [5] и Н. Г. де Брёйном в [2]. Метод, который позволяет работать с зависимыми гауссовскими случайными величинами, описан С. Берманом в [9] и является одним из ключевых для решения рассматриваемых задач. Многие рассуждения проведены с опорой на свойства плотности многомерного гауссовского распределения, описанные в [15] Д. Слепяном.

Результатом данной статьи является перенос предельной теоремы для копул независимых гауссовских случайных величин на случай копул гауссовских случайных величин, корреляционная функция которых удовлетворяет некоторым условиям. Кроме того, была исследована возможность переноса предельной теоремы на случай финансового портфеля, моделируемого двумерной копулой гауссовского портфеля с зависимостью.

В §2 сформулирован и доказан основной результат о переносе теоремы Гнеденко на зависимый случай. В §3 проведены предварительные рассуждения для переноса результата на экстремальный индекс последовательности векторов. Четвертый параграф осуществляет перенос результата на экстремальный индекс двумерного вектора, состоящего из случайных величин вейбулловского типа.

Помимо уже введенных в теореме 1 в статье используются следующие обозначения. $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}$ обозначают множества вещественных, целых и натуральных чисел соответственно, причем последние начинаются с единицы.

§2. Предельная теорема для зависимого гауссовского копульного временного ряда

В работе будут рассматриваться зависимые и независимые гауссовские копульные временные ряды:

Определение 1. *Гауссовский копульный временной ряд – это последовательность $\xi_i = f(X_i)$, где $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – стандартные нормальные случайные величины, $\bar{r}(n,k) = \operatorname{cov}(X_k, X_n)$ – ковариационная функция, $k, n \in \mathbf{N}$, а $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – некоторая функция вещественного аргумента.*

Далее в работе будут рассматриваться только стационарные гауссовские временные ряды и для них $r(n-k) := \bar{r}(n,k)$. Также через $\zeta_i = f(Y_i)$ будет обозначаться гауссовский копульный временной ряд, в котором Y_i – независимые копии X_i. Далее в работе будут использованы обозначения $M_n^X = \max\limits_{i=1,\ldots,n}(X_i)$ и $M_n^Y = \max\limits_{i=1,\ldots,n}(Y_i)$.

Сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – стационарная последовательность стандартных нормальных случайных величин с ковариационной функцией $r(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, причем $r(k)\ln k \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть Y_i – независимые копии случайных величин X_i, $\zeta_i = f(Y_i)$, причем для всех x, являющихся точками непрерывности функции $H(x)$, существует*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \leqslant c_n x + d_n\right) = H(x),$$

где $H(x)$ – функция Фреше или Гумбеля из теоремы Гнеденко, а c_n, d_n – нормирующие коэффициенты, такие что для любого $x \in \mathbf{R}$ верно, что $c_n x + d_n \to \infty$, $n \to \infty$. Пусть, кроме того, $f(y)$ – непрерывная функция, имеющая не более конечного числа изменений монотонности, причем $f(y) \to \infty$, $y \to \infty$. Тогда для $\xi_i = f(X_i)$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leqslant c_n x + d_n\right) = H(x).$$

Для доказательства данной теоремы нам потребуются следующие результаты, доказательства которых могут быть найдены в [6] и [9, лемма 3.1, теорема 3.1, лемма 3.2]:

Лемма 1 (пуассоновская аппроксимация)**.** *Пусть $\tau \in [0,\infty]$, $M_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\eta_i)$, где $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ – независимые одинаково распределнные случайные величины с функцией распределения $F(x) = \mathbf{P}(\eta_1 \leqslant x)$. Для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельные соотношения при $n \to \infty$*

$$n\bar{F}(u_n) \to \tau \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(M_n \leqslant u_n) \to e^{-\tau}$$

эквивалентны. Здесь $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Лемма 2. *Пусть $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ – стандартные нормальные случайные величины, такие что*

$$\mathbf{E}\, X_0 X_n = r_n, \quad \mathbf{E}\, Y_0 Y_n = 0.$$

Тогда для любых $c \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \Big|\mathbf{P}\left(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant c\right) - \mathbf{P}\left(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leqslant c\right)\Big| \\ \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\,|r_j|\,\varphi_2(c, c; |r_j|), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi_2(x_1, x_2; r_j) = \frac{1}{2\pi}(1 - r_j^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-(x_1^2 + x_2^2 - 2r_j x_1 x_2)}{2(1-r_j^2)}\right)$.

Лемма 3. *Если для последовательности X_n из леммы 2 выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\,|r_j|\,(1 - r_j^2)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{-2}{1+|r_j|}} \ln^{\frac{1}{1+|r_j|}} n = 0,$$

то существуют $c_n, d_n \in \mathbf{R}$, такие что для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant c_n x + d_n\right) = e^{-e^{-x}}.$$

Лемма 4. *Если для последовательности X_n, удовлетворяющей условиям выше, выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \ln n = 0$, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} |r_j|\,(n-j)(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{-2}{1+|r_j|}} \ln^{\frac{1}{1+|r_j|}} n = 0.$$

Теперь, опираясь на перечисленные результаты, мы можем перейти к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала f – строго монотонная функция на всей области определения, а c_n, d_n – нормирующие коэффициенты, такие что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \leqslant c_n x + d_n\right) = H(x).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\max(Y_1,\ldots,Y_n) \leqslant f^{-1}(c_n x + d_n)\big) = H(x)$, т.е. $\Phi^n(u_n) \to H(x)$, где $u_n = f^{-1}(c_n x + d_n)$. Из условий следует, что $u_n \to \infty$, $n \to \infty$. Пусть

$$\tau(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } H(x) \text{ – функция Гумбеля,} \\ x^{-\alpha}, & \text{если } H(x) \text{ – функция Фреше.} \end{cases}$$

Тогда из леммы 1 получаем, что при $n \to \infty$

$$n\,\frac{e^{-\frac{u_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}u_n} + O\left(\frac{n\,e^{(-\frac{u_n^2}{2})}}{u_n^3}\right) = \tau(x) + o(1).$$

Справа первое слагаемое при фиксированном x не зависит от n, поэтому главное слагаемое слева тоже константа. Отсюда следует, что O большое слева – величина, стремящаяся к нулю, так как это есть величина порядка константы, деленная на бесконечно большую u_n^2. Тогда данное выражение можно переписать следующим образом:

$$n\,\frac{e^{-\frac{u_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}u_n} = \tau(x) + o(1).$$

Это равносильно тому, что

$$\ln n - \frac{u_n^2}{2} - \ln u_n - \ln\sqrt{2\pi} = \ln\tau(x) + o(1).$$

Отсюда следует, что

$$u_n^2 + 2\ln u_n + \ln 2\pi + 2\ln\tau(x) = 2\ln n + o(1).$$

Таким образом,

$$u_n = \sqrt{2\ln n - 2\ln u_n - \ln 2\pi - 2\ln\tau(x) + o(1)}.$$

Вынося главный член и разлагая выражение под корнем в ряд Тейлора, получаем

$$u_n = \sqrt{2\ln n}\left(1 - \frac{2\ln u_n + \ln 2\pi + \ln\tau(x)}{4\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right).$$

Тогда

$$u_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{2\ln u_n + \ln 2\pi + \ln\tau(x)}{2\sqrt{2\ln n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi + \ln\tau(x)}{2\sqrt{2\ln n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) \\ &= a_n + a_n^{-1}(-\ln\tau(x)) + o(a_n^{-1}), \end{aligned}$$

где $a_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}}$. Таким образом, получаем

$$f^{-1}(c_n x + d_n) = a_n + a_n^{-1}(-\ln\tau(x)) + o(a_n^{-1}).$$

Теперь покажем справедливость предельной теоремы для зависимых величин $\{\xi_i = f(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$. Согласно лемме 2, для любого $c \in \mathbf{R}$ и любого $n \in \mathbf{N}$ верно, что

$$\begin{aligned} &\left|\mathbf{P}\left(\max(X_1,\dots,X_n) \leqslant c\right) - \mathbf{P}\left(\max(Y_1,\dots,Y_n) \leqslant c\right)\right| \\ &\qquad\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,|r_j|\,\varphi_2(c,c;|r_j|), \end{aligned}$$

где

$$\varphi_2(c,c;|r_j|) = (2\pi)^{-1}(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{c^2}{1+|r_j|}\right).$$

Подставим в неравенство выше $c = f^{-1}(c_n x + d_n) = a_n + a_n^{-1}(-\ln\tau(x)) + o(a_n^{-1})$:

$$\begin{aligned} \Delta(c) &= \left|\mathbf{P}\left(\max(X_1,\dots,X_n) \leqslant c\right) - \mathbf{P}\left(\max(Y_1,\dots,Y_n) \leqslant c\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,|r_j|\,(2\pi)^{-1}(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{a_n^2 + O(1)}{1+|r_j|}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\,|r_j|\,(2\pi)^{-1}(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{2\ln n - \ln\ln n + O(1)}{1+|r_j|}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\,|r_j|\,(2\pi)^{-1}(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{2}{1+|r_j|}} (\ln n)^{\frac{1}{1+|r_j|}} \exp\left(O(1)\right).$$

Тогда, по леммам 3 и 4, полученное выражение стремится к нулю, а значит, пределы для зависимого и независимого случая совпадают.

Рассмотрим теперь функцию f, строго монотонную лишь на бесконечности. Выберем достаточно большое фиксированное число A, такое что при значениях аргумента, больших чем A, f строго монотонна. По условиям $c_n x + d_n \to \infty$. Это означает, что начиная с некоторого n мы имеем $c_n x + d_n > A$. Рассмотрим функцию $\bar{f}(x)$, совпадающую с f справа от точки A, но при этом строго монотонную слева от нее. Ясно, что для нее верны рассуждения, приведенные в начале доказательства теоремы, т.е. выполняется предельная теорема для максимумов последовательностей $\{\bar{f}(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\bar{f}(Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$. Теперь распишем:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\max(f(Y_1),\ldots,f(Y_n)) \leqslant c_n x + d_n\right)\\
&\quad = \mathbf{P}\left(\max(f(Y_1),\ldots,f(Y_n)) \leqslant A\right)\\
&\quad + \mathbf{P}\left(A < \max(f(Y_1),\ldots,f(Y_n)) \leqslant c_n x + d_n\right)\\
&\quad = \mathbf{P}\left(\max(f(Y_1),\ldots,f(Y_n)) \leqslant A\right)\\
&\quad + \mathbf{P}\left(A < \max(\bar{f}(Y_1),\ldots,\bar{f}(Y_n)) \leqslant c_n x + d_n\right).
\end{aligned}$$

Данное выражение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\max(f(Y_1),\ldots,f(Y_n)) \leqslant A\right)\\
&\quad + \mathbf{P}\left(A < \max(\bar{f}(Y_1),\ldots,\bar{f}(Y_n)) \leqslant c_n x + d_n\right)\\
&\quad = \mathbf{P}\left(\max(f(Y_1),\ldots,f(Y_n)) \leqslant A\right)\\
&\quad + \mathbf{P}\left(\max(\bar{f}(Y_1),\ldots,\bar{f}(Y_n)) \leqslant c_n x + d_n\right)\\
&\quad - \mathbf{P}\left(\max(\bar{f}(Y_1),\ldots,\bar{f}(Y_n)) \leqslant A\right).
\end{aligned}$$

При стремлении n к бесконечности первое и последнее слагаемые справа в выражении выше стремятся к 0, а значит, предел совпадает с пределом для $\mathbf{P}\left(\max(\bar{f}(Y_1),\ldots,\bar{f}(Y_n)) \leqslant c_n x + d_n\right)$. Аналогично проводятся рассуждения и для $f(X_i)$ и $\bar{f}(X_i)$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Теорема 2 обобщает теорему Гнеденко на случай копул зависимых гауссовских случайных величин.

§3. Зависимые экстремальные индексы надежности

Определение 2. *Экстремальным индексом надежности вектора* $(A_1, \dots, A_d)^T, A_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, d$, *будем называть*

$$Q = \sum_{k=1}^{d} A_k.$$

Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть имеется последовательность векторов

$$\begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \end{pmatrix}_{i=1}^{\infty},$$

где X_{ij} – стандартные гауссовские случайные величины, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2$, причем при фиксированном i они независимы, а при фиксированном j последовательность стационарна. Пусть Y_{ij} – независимые копии X_{ij}, а $f_k(x), k = 1, 2,$ – некоторые монотонные функции. Для фиксированного $c \in \mathbf{R}$ через плотность нормального распределения требуется оценить

$$\begin{aligned} P_n(c) := \big|&\mathbf{P}(\max(f_1(X_{11}) + f_2(X_{12}), \dots, f_1(X_{n1}) + f_2(X_{n2})) \leqslant c) \\ &- \mathbf{P}(\max(f_1(Y_{11}) + f_2(Y_{12}), \dots, f_1(Y_{n1}) + f_2(Y_{n2})) \leqslant c)\big|. \end{aligned}$$

Рассмотрим первую вероятность в выражении справа.

$$\begin{aligned} &P_n\big(c; r_1^{(1)}, \dots, r_{n-1}^{(1)}, r_1^{(2)}, \dots, r_{n-1}^{(2)}\big) \\ &\quad := \mathbf{P}(\max(f_1(X_{11}) + f_2(X_{12}), \dots, f_1(X_{n1}) + f_2(X_{n2})) \leqslant c) \\ &\quad = \mathbf{P}(f_1(X_{11}) + f_2(X_{12}) \leqslant c, \dots, f_1(X_{n1}) + f_2(X_{n2}) \leqslant c) \qquad (2) \\ &\quad = \mathbf{P}((X_{11}, X_{12}) \in A, \dots, (X_{n1}, X_{n2}) \in A), \end{aligned}$$

где $A = \{(x,y) : f_1(x) + f_2(y) \leqslant c\}$. Тогда из (2) следует, что

$$
\begin{aligned}
&P_n((X_{11}, X_{12}) \in A, \ldots, (X_{n1}, X_{n2}) \in A) \\
&\quad = \int\limits_{A^n} \varphi_n(x_{11}, \ldots, x_{n1}; r^{(1)})\, \varphi_n(x_{12}, \ldots, x_{n2}; r^{(2)})\, d\bar{x} \\
&\quad = \int\limits_{-\infty}^{f_1^{-1}(c)} \cdots \int\limits_{-\infty}^{f_1^{-1}(c)} \varphi_n(x_{11}, \ldots, x_{n1}; r^{(1)})\, d\bar{x}_{(1)} \\
&\quad \times \int\limits_{-\infty}^{f_2^{-1}(c - f_1(x_{11}))} \cdots \int\limits_{-\infty}^{f_2^{-1}(c - f_1(x_{n1}))} \varphi_n(x_{12}, \ldots, x_{n2}; r^{(2)})\, d\bar{x}_{(2)},
\end{aligned}
$$

где $\varphi_n(x_{1k}, \ldots, x_{nk}; r^{(k)})$, $k = 1, 2,$ – функция плотности n-мерной стандартной нормальной случайной величины с ковариационной матрицей $\Sigma^{(k)} = (r_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^n$. Отсюда (по методу Слепяна [15, с. 481]) получаем, что

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial r_{hl}^{(1)}} &= \int\limits_{-\infty}^{f_1^{-1}(c)} \cdots \int\limits_{-\infty}^{f_1^{-1}(c)} \varphi_n(x_{11}, \ldots, f_1^{-1}(c), \ldots, f_1^{-1}(c), \ldots, x_{n1}; r_{ij}^{(1)}) \prod_{k \neq h, j \neq l} dx_{k1} \\
&\times \int\limits_{-\infty}^{f_2^{-1}(c - f_1(x_{11}))} \cdots \int\limits_{-\infty}^{f_2^{-1}(c - f_1(x_{n1}))} \varphi_n(x_{12}, \ldots, x_{n2}; r_{ij}^{(2)})\, d\bar{x}_{(2)} \\
&\leqslant \varphi_2(f_1^{-1}(c), f_1^{-1}(c); r_{hl}^{(1)}).
\end{aligned}
$$

Последний переход совершен заменой верхнего предела в интегралах на бесконечность, поскольку подынтегральная функция неотрицательна. Аналогично, переставляя интегралы по теореме Фубини, получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_n}{\partial r_{hl}^{(1)}} &\leqslant \varphi_2(f_1^{-1}(c), f_1^{-1}(c); r_{hl}^{(1)}), \\
\frac{\partial P_n}{\partial r_{hl}^{(2)}} &\leqslant \varphi_2(f_2^{-1}(c), f_2^{-1}(c); r_{hl}^{(2)}).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Ковариация в нашем случае – это функция разности моментов времени в силу стационарности гауссовской последовательности, т.е. мы можем переписать формулу (3), пользуясь тем, что $r_{l-h} = r_{hl}$. Получим

$$\frac{\partial P_n}{\partial r_j^{(1)}} = \sum_{l-h=j} \frac{\partial P_n}{\partial r_{hl}^{(1)}} \leqslant (n-j)\,\varphi_2(f_1^{-1}(c), f_1^{-1}(c); r_j^{(1)}),$$
$$\frac{\partial P_n}{\partial r_j^{(2)}} = \sum_{l-h=j} \frac{\partial P_n}{\partial r_{hl}^{(2)}} \leqslant (n-j)\,\varphi_2(f_2^{-1}(c), f_2^{-1}(c); r_j^{(2)}).$$

Далее, пользуясь введенными выше обозначениями, получаем:

$$\begin{aligned}&\big|\mathbf{P}(\max(f_1(X_{11}) + f_2(X_{12}) \leqslant c, \dots, f_1(X_{n1}) + f_2(X_{n2})) \leqslant c)\\ &\quad - \mathbf{P}(\max(f_1(Y_{11}) + f_2(Y_{12}) \leqslant c, \dots, f_1(Y_{n1}) + f_2(Y_{n2})) \leqslant c)\big|\\ &\quad = \big|P_n\big(c; r_1^{(1)}, \dots, r_{n-1}^{(1)}, r_1^{(2)}, \dots, r_{n-1}^{(2)}\big) - P_n\big(c; 0, \dots, 0\big)\big|.\end{aligned}$$

Теперь по теореме о среднем [9, с. 509] для некоторых $0 \leqslant r_j'^{(1)} \leqslant r_j^{(1)}$ и $0 \leqslant r_j'^{(2)} \leqslant r_j^{(2)}$ верно, что

$$\begin{aligned}&\big|P_n\big(c; r_1^{(1)}, \dots, r_{n-1}^{(1)}, r_1^{(2)}, \dots, r_{n-1}^{(2)}\big) - P_n\big(c; 0, \dots, 0\big)\big|\\ &= \bigg|\sum_{j=1}^{n-1} r_j^{(1)} \frac{\partial P_n}{\partial r_j^{(1)}}(c; r_1'^{(1)}, \dots, r_{n-1}'^{(1)}, r_1'^{(2)}, \dots, r_{n-1}'^{(2)})\\ &+ r_j^{(2)} \frac{\partial P_n}{\partial r_j^{(2)}}(c; r_1'^{(1)}, \dots, r_{n-1}'^{(1)}, r_1'^{(2)}, \dots, r_{n-1}'^{(2)})\bigg|\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} |r_j^{(1)}|(n-j)\varphi_2(f_1^{-1}(c), f_1^{-1}(c), |r_j^{(1)}|)\\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} |r_j^{(2)}|(n-j)\varphi_2(f_2^{-1}(c), f_2^{-1}(c), |r_j^{(2)}|).\end{aligned}$$

Данный результат обобщает формулу (1) на двумерный случай. Полученную оценку несложно обобщить для m последовательностей гауссовских копул.

§4. Предельная теорема для зависимых экстремальных индексов вейбулловского типа

В §3 получена оценка сверху для разности вероятностей для зависимых и независимых экстремальных индексов. Рассмотрим случай копул гауссовских случайных величин, имеющих распределение вейбулловского типа (результаты для независимого случая были рассмотрены П. Алиевой в [1]). Будем следовать в доказательстве следующему плану:

1. Найдем асимптотику нормирующих коэффициентов для независимого случая.

2. Вычислим асимптотику хвоста для функций, обратным к копулам.

3. Подставим найденные в 1 и 2 асимптотики в оценку, полученную в §3.

Из [1], сумма двух величин вейбулловского типа с функциями распределения $1-\frac{d_i}{\beta C_i}x^{\alpha_i}e^{-C_i x^\beta}$ имеет функцию распределения, такую что $1-F(x) \sim kx^\gamma e^{-Cx^\beta}$ при $x \to \infty$, где $\gamma = \alpha_1+\alpha_2+\frac{\beta}{2}$, $C = C_1\theta_1^{\alpha_1}+C_2\theta_2^{\alpha_2}$, $\theta_1 = \frac{C_2^{\frac{1}{\beta-1}}}{C_1^{\frac{1}{\beta-1}}+C_2^{\frac{1}{\beta-1}}}$, $\theta_2 = \frac{C_1^{\frac{1}{\beta-1}}}{C_1^{\frac{1}{\beta-1}}+C_2^{\frac{1}{\beta-1}}}$.

Отметим, что так как $\theta_i < 1$, то при достаточно больших α_i мы получим, что $C \leqslant \min(C_1, C_2)$.

Найдем асимптотику нормирующих коэффициентов для полученной суммы. Из леммы 1 следует, что

$$knu_n^\gamma e^{-Cu_n^\beta} = \tau(x) + o(1).$$

Тогда

$$\ln n + \gamma \ln u_n - Cu_n^\beta + \ln k = \ln \tau(x) + o(1).$$

Отсюда следует, что

$$Cu_n^\beta - \gamma \ln u_n = \ln n + \ln k - \ln \tau(x) + o(1).$$

Тогда для u_n верна следующая асимптотика

$$u_n = (C^{-1} \ln n)^{\frac{1}{\beta}} + v_n, \tag{4}$$

где $v_n = o(u_n)$. Теперь, подставляя полученное выражение для u_n в соотношения выше, можно уточнить асимптотику v_n

$$\begin{aligned} \ln n \left(1 + v_n \cdot (C^{-1} \ln n)^{-\frac{1}{\beta}}\right)^\beta + \frac{\gamma}{\beta} \ln C - \frac{\gamma}{\beta} \ln \ln n + o(1) \\ = \ln n + \ln k - \ln \tau(x) + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\beta v_n (C^{-1})^{-\frac{1}{\beta}} \ln^{1-\frac{1}{\beta}} n + O\left(v_n^2 \ln^{1-\frac{2}{\beta}} n\right) + \frac{\gamma}{\beta} \ln C - \frac{\gamma}{\beta} \ln \ln n + o(1) \\ = \ln k - \ln \tau(x) + o(1),$$

что влечет следующее равенство

$$v_n = \frac{\gamma}{\beta^2 C^{\frac{1}{\beta}}} \ln \ln n \cdot \ln^{\frac{1}{\beta}-1} n + O(1).$$

Таким образом, подставляя это в правую часть (4), получаем выражение

$$u_n = (C^{-1} \ln n)^{\frac{1}{\beta}} + \frac{\gamma}{\beta^2 C^{\frac{1}{\beta}}} \ln \ln n \cdot \ln^{\frac{1}{\beta}-1} n + D + o(1),$$

где D – некоторая константа.

Перейдем к нахождению хвоста копулы для случайной величины вейбулловского типа. Найдем функцию f_k, такую что случайная величина $\zeta_k = f_k(Y_i)$ имеет функцию распределения следующего вида

$$1 - F_k(x) = \frac{d_k}{\beta C_k} x^{\alpha_k} e^{-C_k x^\beta}.$$

Пусть $y = f_k(x)$, тогда:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta_k > y) &= \frac{d_k}{\beta C_k} y^{\alpha_k} e^{-C_k y^\beta} = \frac{d_k}{\beta C_k} f_k(x)^{\alpha_k} e^{-C_k f_k(x)^\beta} \\ &= \mathbf{P}\left(f_k(Y_i) > f_k(x)\right) = \mathbf{P}\left(Y_i > x\right) = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Далее получим асимптотику обратной функции к копуле. Из асимптотического поведения функции распределения стандартной нормальной случайной величины на бесконечности (см. [13, §36]) в правой части формулы (5) получаем

$$\frac{d_i}{\beta C_i} y^{\alpha_i} e^{-C_i y^\beta} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} x} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} x^3} + O\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} x^5}\right).$$

Логарифмируем выражение выше и получим

$$\ln d_i - \ln \beta C_i + \alpha_i \ln y - C_i y^\beta = -\frac{x^2}{2} - \ln(\sqrt{2\pi} x) + \ln\left(1 - x^{-2} + o(x^{-3})\right).$$

Это равносильно тому, что

$$C_i y^\beta - \alpha_i \ln y + \ln \beta C_i - \ln d_i = \frac{x^2}{2} + \ln\sqrt{2\pi} + \ln x + x^{-2} + o(x^{-3}).$$

Последнее влечет $x = \sqrt{2C_i} y^{\frac{\beta}{2}} + u$ для $u = o(x)$. Аналогичными действиями получим еще один член асимптотического выражения $x(y)$. Продолжая рассуждения, получаем

$$y = \left(\frac{(x-u)}{\sqrt{2C_i}}\right)^{\frac{2}{\beta}}.$$

Раскроем правую часть

$$\frac{x^2}{2}(1 - x^{-1}u)^2 - 2\frac{\alpha_i}{\beta}\ln x + \frac{\alpha_i}{\beta}\ln 2C_i + \frac{2\alpha_i}{\beta}\ln(1 - x^{-1}u) + \ln\beta C_i - \ln d_i$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln\sqrt{2\pi} + \ln x + x^{-2} + o(x^{-3}),$$

что эквивалентно

$$-xu + \frac{u^2}{2} - 2\frac{\alpha_i}{\beta}\ln x + \frac{\alpha_i}{\beta}\ln 2C_i + \ln\beta C_i - \ln d_i + o(1) = \ln x + \ln\sqrt{2\pi} + o(1).$$

Отсюда находим, что u имеет вид $u = -\left(\alpha_i + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\ln y}{\sqrt{2C_i}y^{\frac{\beta}{2}}} + O(y^{-\frac{\beta}{2}})$, т.е.

$$x = \sqrt{2C_i}y^{\frac{\beta}{2}} - \left(\alpha_i + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\ln y}{\sqrt{2C_i}y^{\frac{\beta}{2}}} + O(y^{-\frac{\beta}{2}}).$$

Отсюда следует асимптотика обратной функции к соответствующим копулам.

Сформулируем теперь основной результат для двумерного случая.

Теорема 3. *Пусть имеются две стационарные последовательности стандартных гауссовских случайных величин* $\{X_{i1}\}_{i=1}^\infty$ *и* $\{X_{i2}\}_{i=1}^\infty$, *причем* $\operatorname{cov}(X_{i1}, X_{j2}) = 0$ *для любых* $i, j \in \mathbf{N}$. *Пусть* Y_{ij} *– независимые копии* X_{ij}, *а* $f_k(x)$, $k = 1, 2$, *– монотонные функции, такие что* $f_k(Y_{ij})$ *имеют функции распределения* $F_k(x) = 1 - \frac{d_k}{\beta C_k} x^{\alpha_k} e^{-C_k x^\beta}$. *Пусть* $r_n^{(k)} = \operatorname{cov}(X_{1k}, X_{nk})$. *Через* δ *обозначим* $\max_k(\sup_{n>1}|r_n^{(k)}|)$. *Пусть* $\delta < 1$ *и выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(1) $\min(C_1, C_2) \geqslant C$ *и* $r^{(k)}(n)\ln n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *при* $k = 1, 2$*;*
(2) $\min_k(\frac{2C_k}{C(1+\delta)}) > 1$ *и* $r_n \cdot n^\varepsilon \to 0$ *при* $n \to \infty$ *при* $k = 1, 2$,

где $\varepsilon > 2\cdot\frac{C-C_k}{C}\cdot\omega^{-1}$ *для* $k = 1, 2$ *и некоторого* $\omega \in (0, \min_k(\frac{2C_k}{C(1+\delta)}-1))$.

Тогда если $c_n^{-1}(M_n^Y - d_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} H(x)$, *то и* $c_n^{-1}(M_n^X - d_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} H(x)$.

Доказательство теоремы 3. Ранее нами было получено, что

$$u_n = (C^{-1}\ln n)^{\frac{1}{\beta}} + \frac{\gamma}{\beta^2 C^{\frac{1}{\beta}}}\ln\ln n \cdot \ln^{\frac{1}{\beta}-1} n + D + o(1)$$

и

$$f_i^{-1}(u_n) = \sqrt{2C_i}u_n^{\frac{\beta}{2}} - \left(\alpha_i + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\ln u_n}{\sqrt{2C_i}u_n^{\frac{\beta}{2}}} + O(u_n^{-\frac{\beta}{2}}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}(f_i^{-1}(u_n))^2 &= 2C_i u_n^\beta\left(1 - \left(\alpha_i + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\ln u_n}{2C_i u_n^\beta} + O(u_n^{-\beta})\right)^2\\ &= 2C_i u_n^\beta - (2\alpha_i + \beta)\ln u_n + O(1).\end{aligned}$$

Подставим асимптотику для u_n и получим

$$\begin{aligned}&2C_i u_n^\beta - (2\alpha_i + \beta)\ln u_n + O(1)\\ &\quad= \frac{2C_i}{C}\ln n\left(1 + \frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\ln\ln n}{\ln n} + D\ln^{-\frac{1}{\beta}} n + o(u_n^{-\frac{1}{\beta}})\right)^\beta\\ &\quad- \beta^{-1}(2\alpha_i + \beta)\ln\ln n + O(1)\\ &\quad= \frac{2C_i}{C}\ln n + \frac{2\gamma C_i}{\beta C}\ln\ln n + \beta D\frac{2C_i}{C}\ln^{1-\frac{1}{\beta}} n\\ &\quad- \beta^{-1}(2\alpha_i + \beta)\ln\ln n + O(1) + o(u_n^{1-\frac{1}{\beta}}).\end{aligned}$$

Данное выражение можно переписать в следующем виде

$$(f_i^{-1}(u_n))^2 = \frac{2C_i}{C}\ln n + \left(\frac{2\gamma C_i}{\beta C} - \beta^{-1}(2\alpha_i + \beta)\right)\ln\ln n + g(u_n) + O(1),$$

где $g(u_n) = O(\ln^{1-\frac{1}{\beta}} n)$.

Из (4) следует, что

$$\begin{aligned}&\big|\mathbf{P}(\max(f_1(X_{11}) + f_2(X_{12}), \ldots, f_1(X_{n1}) + f_2(X_{n2})) \leqslant u_n)\\ &\quad- \mathbf{P}(\max(f_1(Y_{11}) + f_2(Y_{12}), \ldots, f_1(Y_{n1}) + f_2(Y_{n2})) \leqslant u_n)\big|\\ &\quad\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}|r_j^{(1)}|(n-j)\varphi_2(f_1^{-1}(u_n), f_1^{-1}(u_n); |r_j^{(1)}|)\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}|r_j^{(2)}|\,(n-j)\,\varphi_2(f_2^{-1}(u_n),f_2^{-1}(u_n);|r_j^{(2)}|),$$

где

$$\varphi_2(c,c;|r_j|)=(2\pi)^{-1}(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{c^2}{1+|r_j|}\right).$$

Оценим каждое из слагаемых справа в неравенстве отдельно:

$$\sum_{j=1}^{n-1}|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,\varphi_2(f_1^{-1}(u_n),f_1^{-1}(u_n);|r_j^{(1)}|)$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|(n-j)(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\exp\left(-\frac{\frac{2C_1}{C}\ln n+\left(\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}\,(2\alpha_1+\beta)\right)\ln\ln n+g(u_n)+O(1)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|(n-j)(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j|)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}}n$$
$$\times\exp(O(1))\cdot\exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right).$$

Поскольку экспонента в правой части выражения выше стремится к константе, достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}}\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}}n$$
$$\times\exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)\to 0,\quad n\to\infty.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1}\,|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,(1-r_j^2)^{-\frac{1}{2}}\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j|)}}$$
$$\times\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}}n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1}\,|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,(1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}}\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}\\
&\times \ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j|}} n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)\\
&= (1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}\\
&\times \ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right).
\end{aligned}
$$

Постоянный множитель не влияет на стремление выражения к нулю. Рассмотрим второй множитель

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j|)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{[n^\omega]}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)\\
&+\sum_{j=[n^\omega]+1}^{n-1}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right).
\end{aligned}
$$

Первую сумму можно оценить следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{[n^\omega]}(2\pi)^{-1}|r_j^{(1)}|\,(n-j)\,n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)\\
&\qquad\leqslant n^\omega\delta n\cdot n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n\ \exp\left(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\right)\\
&\qquad\leqslant n^{1+\omega-\frac{2C_1}{C(1+\delta)}}\ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C}-\beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n\ \exp\left(g(u_n)\right).
\end{aligned}
$$

Из условий на ω степень n в выражении справа отрицательна, а значит, все выражение стремится к 0, поскольку $g(u_n) = O(\ln^{1-\frac{1}{\beta}} n)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\exp(-\varepsilon \ln n + g(u_n)) \to 0$.

Обозначим через $\delta(n) = \sup_{k>n} |r_k|$. Теперь вернемся ко второму слагаемому

$$\sum_{j=[n^\omega]+1}^{n-1} (2\pi)^{-1} |r_j^{(1)}| \, (n-j) \, n^{-\frac{2C_1}{C(1+|r_j^{(1)}|)}}$$
$$\times \ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C} - \beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n \ \exp\Big(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\Big)$$
$$= n^{-2} \sum_{j=[n^\omega]+1}^{n-1} (2\pi)^{-1} |r_j^{(1)}| \, (n-j) \, n^{\frac{2C-2C_1+2C|r_j^{(1)}|}{C(1+|r_j|)}}$$
$$\times \ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C} - \beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n \ \exp\Big(\frac{g(u_n)}{1+|r_j^{(1)}|}\Big).$$

Заменяя в каждом слагаемом выше множитель $n - j$ на n (тем самым увеличивая сумму) и оценивая каждое слагаемое максимальным, мы получаем не более n одинаковых слагаемых. Тогда все выражение выше не превосходит

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1} \delta(n^\omega) \, n^{\frac{2C-2C_1+2C|r_j^{(1)}|}{C(1+|r_j^{(1)}|)}} \ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C} - \beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n \exp\big(g(u_n)\big) \\
&\quad \leqslant (2\pi)^{-1} \delta(n^\omega) \, n^{\frac{2C-2C_1}{C}} \ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C} - \beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n \\
&\quad \times \exp\left(2\delta(n^\omega) \ln n\right) \exp\left(g(u_n)\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

При выполнении условия 1 теоремы в (6) экспонента стремится к 1, $\delta(n^\omega) \to 0$ и n имеет отрицательную степень, т.е. все выражение стремится к 0, что и требовалось для переноса предельной теоремы.

Теперь рассмотрим случай выполнения условия 2. Заметим, что, поскольку $r_n n^\varepsilon \to 0$, это означает, что $\delta(n)\, n^\varepsilon \to 0$, что в свою очередь влечет $\delta(n^\omega)\, n^{\omega\varepsilon} \to 0$, т.е. $\delta(n^\omega)\, n^{\frac{2(C-C_i)}{C}} \to 0$. Это влечет стремление к нулю выражения в экспоненте, т.е. сама экспонента стремится к 1. Кроме того,

$$\delta(n^{\omega}) n^{\frac{2C-2C_1}{C}} \ln^{-\frac{\frac{2\gamma C_1}{\beta C} - \beta^{-1}(2\alpha_1+\beta)}{1+|r_j^{(1)}|}} n \exp\left(g(u_n)\right) \to 0.$$

Таким образом, в этом случае также был осуществлен перенос предельной теоремы. □

Заметим, что используя технику, аналогичную примененной в конце доказательства теоремы 1, можно ослабить монотонность копульных функций до монотонности на бесконечности. Также стоит отметить, что представленная техника применима к портфелям из m элементов.

§5. Заключение

В настоящей статье получено обобщение знаменитой теоремы Гнеденко–Фишера–Типпета на случай зависимых гауссовских копульных временных рядов. В работе показано, что при выполнении условия Бермана на корреляцию гауссовской последовательности при разумных ограничениях на копульную функцию сохраняется тот же предельный закон, что и для независимого случая, причем нормирующие коэффициенты можно оставить теми же. Кроме того, получены достаточные условия на корреляционные функции пары гауссовских временных рядов, такие что последовательность зависимых экстремальных индексов случайных величин вейбулловского типа, полученных как копулы данных рядов, сходится к тому же пределу, что и в независимом случае.

Список литературы

1. П. Алиева, *Оценка экстремального индекса финансового портфеля вейбулловского типа.* — Магистерская диссертация, Высшая Школа Экономики, 2021.
2. Н. Г. де Брёйн, *Асимптотические методы в анализе*, 1961.
3. А. Е. Мазур, *Моделирование и подгонка временных рядов с тяжелыми хвостами распределений и сильной временной зависимостью посредством гауссовских рядов.* — Теория вероятн. и ее примен. **63** (2018), 186–190.
4. А. Е. Мазур, В. И. Питербарг, *Гауссовские копульные временные ряды с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью.* — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. No. 5 (2015), 3–7.
5. Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, 1978.
6. В. И. Питербарг, *Статистика экстремумов.* — Рукопись, Высшая Школа Экономики, 2017.

7. В. В. Трошин, *Об области максимального притяжения преобразования нормальной случайной величины.* — Фундамент. и прикл. матем. **23**, No. 1 (2020), 207–215.
8. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, 2010.
9. S. Berman, *Limit theorems for the maximum term in stationary sequences.* — Ann. Math. Statist. **35** (1964), 502–516.
10. P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch, *Modelling Extremal Events*, 1997.
11. J. Farkas, E. Hashorva, V. I. Piterbarg, *Asymptotic behavior of reliability function for multidimensional aggregated Weibull type reliability indices.* In: V. Rykov, N. Singpurwalla, A. Zubkov (eds.) Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT. Lect. Notes Comp. Sci. **10684** (2017), 251–264.
12. A. Fereira, L. de Haan, *Extreme Values Theory. An Introduction*, 2006.
13. M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 2009.
14. V. I. Piterbarg, I. V. Rodionov, *Certain modern developments in stochastic extreme value theory, on occasion of* 110*th birthday of Boris Vladimirovich Gnedenko*, 2021. Reliability: Theory and Applications.
15. D. Slepian, *The one-sided barrier problem for Gaussian noise.* — Bell Syst. Techn. J. **41**, No. 2 (1962), 463–501.
16. P. Soulier, *Some applications of regular variation in probability and statistics.* — XXII Escuela Venezolana de Matematicas, 2009.

Alekseev I. A., Piterbarg V. I., Savich A. V. A limit theorem for Gaussian copulas with weak dependence.

This article is devoted to the generalization of Gnedenko–Fisher–Tippet's theorem to the case of Gaussian copular time series with dependence. A multivariate generalization of such a problem in terms of reliability index is considered as well. It's shown that if Berman's condition on the correlation function and some restriction to the copula of interest are met, then the limit theorem coincides with the one in the independent case. Moreover, the normalizing coefficients remain the same. Some sufficient conditions on the correlation function of the pair of Gaussian time series have been obtained. These conditions allow to transfer the limit theorem from independent case for reliability index of Weibull-like copulas to the case with dependence.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, С.-Петербург
E-mail: vanyalexeev@list.ru

МГУ, Москва, Россия
E-mail: alexander.savich17@gmail.com

Поступило 22 сентября 2024 г.