Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 534, 2024 г.

,

А. М. Максаев, В. В. Промыслов, Д. С. Шешеня

О КЛИКОВОМ ЧИСЛЕ ТОТАЛЬНОГО ГРАФА $2 \times n$ И 3×3 МАТРИЦ

§1. Введение

Изучение графов, соответствующих отношениям на кольцах, предоставляет новый подход к изучению самих отношений. Такие исследования начались сравнительно недавно. В 1988 году Бек [6] определил граф делителей нуля коммутативного кольца, а позднее Андерсон и Ливингстон его модифицировали [5]. До настоящего времени, помимо графов делителей нуля, активно изучались графы отношений коммутативности [2] и ортогональности [1], см. также библиографические ссылки, приведенные в этих работах.

Андерсон и Бадави в работе [4] ввели понятия регулярного и тотального графов коммутативного кольца R с единицей и исследовали их основные свойства. Они определили тотальный граф $T(\Gamma(R))$ как граф с множеством вершин R, в котором различные вершины x, y соединяются ребром, если $x + y$ – делитель нуля. Регулярный граф кольца R, обозначаемый ими через $\mathrm{Reg}(\Gamma(R))$, – это подграф $T(\Gamma(R))$, индуцированный множеством всех регулярных элементов (т.е. элементов, не являющихся делителями нуля) кольца R.

Введем ряд необходимых обозначений. Через $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ мы обозначаем множество всех $m \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$, через E_{ij} мы обозначаем (i, j)-ю матричную единицу, то есть матрицу, единственный ненулевой элемент которой расположен на позиции (i, j) и равен 1. Через 0 и E мы обозначаем нулевую и единичную матрицы соответственно. Будем говорить, что $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ имеет полный ранг, если $\mathrm{rank}(A) = \min(m, n)$, а в противном случае будем говорить, что A имеет неполный ранг. Для $\mathcal{Y} \subseteq M_{m\times n}(\mathbb{F})$ через $\mathcal{Y}^T$ мы обозначаем

Ключевые слова: кликовое число графа, тотальный граф, комбинаторная теория матриц.

Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

множество $\{Y^T \mid Y \in \mathcal{Y}\}$, где Y^T обозначает матричное транспонирование. Через $|\mathcal{X}|$ мы обозначаем количество элементов в множестве $\mathcal{X}$. Кликовое число графа Γ, т.е. размер максимального полного подграфа в Γ, будет обозначаться через $\omega(\Gamma)$. Дадим определение тотального и регулярного графов пространства прямоугольных матриц над полем.

Определение 1.1. *Тотальным графом пространства $m \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$ называется граф $\mathcal{T}_{m\times n}(\mathbb{F})$ с множеством вершин $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ такой, что различные матрицы $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ соединены ребром тогда и только тогда, когда матрица $A+B$ имеет неполный ранг.*

Регулярным графом пространства $m \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$ называется подграф $\Gamma_{m\times n}(\mathbb{F})$ графа $\mathcal{T}_{m\times n}(\mathbb{F})$, индуцированный множеством всех матриц полного ранга.

В 2009 году Акбари, Джамаали и Сеед Факхари установили, см. [3], что если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то число $\omega(\Gamma_{n\times n}(\mathbb{F}))$ конечно, причем их верхняя оценка не зависит от мощности поля. Более того, ими было показано, что $\omega(\Gamma_{2\times 2}(\mathbb{F})) = 5$ для любого поля $\mathbb{F}$ характеристики, отличной от 2 (см. [3, теорема 2]).

Основная цель нашей работы – исследование клик в тотальных графах $\mathcal{T}_{2\times n}(\mathbb{F}_q)$ и $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$, а результаты работы [3] будут полезны при решении данной задачи.

Определение 1.2. *Два множества $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq M_{m\times n}(\mathbb{F})$ назовем эквивалентными, если существуют невырожденная $P \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$ и невырожденная $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ такие, что*

$$\{PXQ \mid X \in \mathcal{X}\} = \mathcal{Y} \quad \textit{или} \quad \{PXQ \mid X \in \mathcal{X}\} = \mathcal{Y}^T$$

(последнее возможно только в случае $m = n$).

Обозначим через W^* множество всех матриц из $M_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$, у которых первая строка нулевая. Легко заметить, что W^* образует клику в $\mathcal{T}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ и $|W^*| = q^{mn-n}$. Более того, Джоу, Вонг и Ма в [8] показали, что в случае $M_{2\times 2}(\mathbb{F}_q)$, где q – степень нечетного простого числа, все клики максимального размера имеют q^2 элементов и эквивалентны W^*. Этот результат позволяет выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 1.3. *Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле из q элементов, где q – степень нечетного простого числа, $2 \leqslant m \leqslant n$. Тогда*

(1) $\omega(\mathcal{T}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)) = q^{mn-n}$;

(2) *любая клика максимального размера в $\mathcal{T}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ эквивалентна клике W^*.*

В данной работе эта гипотеза будет доказана в §2 для $2\times n$ матриц над полем $\mathbb{F}_q$, где q – степень нечетного простого числа и $n \geqslant 3$, см. теорему 2.3. В §3 будет доказано, что размер максимальной клики не превосходит $5q^6+3q^5-q^4+28$, см. теорему 3.5 и следствие 3.6.

§2. Тотальный граф $2\times n$ матриц

В этом параграфе мы докажем гипотезу 1.3 для тотального графа пространства $2\times n$ матриц при $n \geqslant 3$.

Нам понадобится следующая лемма. Она вытекает из доказательства одной из лемм статьи [8]. Однако соответствующая лемма [8, лемма 2.4] имеет иную формулировку, поэтому для полноты изложения мы приводим нужный нам факт вместе с доказательством.

Лемма 2.1. *Пусть q – степень нечетного простого числа. Тогда если в клике W' графа $\mathcal{T}_{2\times 2}(\mathbb{F}_q)$ есть невырожденная матрица, то в этой клике имеется не более 5 невырожденных матриц и не более q вырожденных.*

Доказательство. Поскольку эквивалентные клики содержат одинаковое число элементов (см. определение 1.2), без ограничения общности мы можем считать, что в клике W' невырожденная матрица является единичной.

Как было отмечено выше, в [3, теорема 2] показано, что

$$\omega(\Gamma_{2\times 2}(\mathbb{F}_q)) = 5.$$

Отсюда следует, что поскольку невырожденные матрицы в W' образуют клику в регулярном графе $\Gamma_{2\times 2}(\mathbb{F}_q)$, то их число не превосходит 5.

Пусть $X \in W'$ – произвольная вырожденная матрица. Поскольку $\det(X+E)=0, \det(X)=0$, у матрицы X есть собственные значения 0 и -1. Тем самым, матрица X подобна матрице $-E_{11}$. Поскольку сопряжения переводят клику в эквивалентную, при этом сохраняя единичную матрицу, без ограничения общности можно считать, что в клике W' содержится как единичная матрица, так и матрица $-E_{11}$.

Рассмотрим теперь произвольную вырожденную матрицу

$$Y = \left(\begin{smallmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{smallmatrix}\right) \in W',$$

отличную от $-E_{11}$. Тогда $\det(Y - E_{11}) = \det(Y + E) = \det(Y) = 0$. Поскольку

$$\det(Y - E_{11}) = (y_{11} - 1)y_{22} - y_{12}y_{21} = \det(Y) - y_{22},$$

получаем $y_{22} = 0$. Тогда из $\det(Y) = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} = -y_{12}y_{21} = 0$ следует, что хотя бы один из элементов y_{12}, y_{21} равен 0. Далее заметим, что

$$\det(Y + E) = (y_{11} + 1)(y_{22} + 1) - y_{12}y_{21} = y_{11} + 1,$$

откуда $y_{11} = -1$. Из перечисленного следует, что все вырожденные матрицы в клике W', отличные от $-E_{11}$, имеют вид

$$\begin{pmatrix} -1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в клике не может быть двух таких матриц разного вида, поскольку тогда их сумма была бы невырождена. Поэтому число вырожденных матриц в W' не превосходит q. □

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 2.2. *Пусть $n \geqslant 3$, q – степень нечетного простого числа. Тогда если в клике W графа $\mathcal{T}_{2\times n}(\mathbb{F}_q)$ есть матрица полного ранга, то $|W| \leqslant q^{n-1} + 5$.*

Доказательство. Обозначим через A матрицу полного ранга в W, а через a_i – её столбец с номером i. Поскольку в эквивалентных кликах число матриц одинаково, можно считать, что первые два столбца матрицы A образуют подматрицу ранга 2.

Рассмотрим множество 2×2 подматриц W', состоящих из первых двух столбцов матриц из W. Нетрудно заметить, что W' образует клику в $\mathcal{T}_{2\times 2}(\mathbb{F}_q)$.

Пусть $B \in W'$. В зависимости от ранга B, оценим количество матриц $C \in W$, у которых первые два столбца совпадают с B – это позволит получить оценку для $|W|$. Через b_i и c_i обозначим столбцы с номером i матриц B и C соответственно.

Случай 1. Если $\operatorname{rank}(B) = 0$, то не существует таких матриц $C \in W$, что $c_1 = b_1$ и $c_2 = b_2$, поскольку $b_1 = b_2 = 0$. Действительно, иначе мы бы имели $\operatorname{rank}(A + C) = \operatorname{rank}(a_1\ a_2) = 2$, и матрицы A и C не были бы соединены ребром в $\mathcal{T}_{2\times n}(\mathbb{F}_q)$.

Случай 2. Если $\operatorname{rank}(B) = 1$, то таких матриц C не более чем q^{n-2}. Действительно, хотя бы один столбец матрицы B ненулевой. Без ограничения общности предположим, что b_1 – ненулевой столбец. Пусть найдутся хотя бы три такие матрицы $C', C'', C''' \in W$, что их первые два столбца совпадают со столбцами B (в противном случае таких матриц только 2, что меньше q^{n-2}). Тогда их попарные суммы $C' + C''$, $C' + C'''$, $C'' + C'''$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 2b_1 & 2b_2 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Поскольку C', C'', C''' являются элементами клики, каждая из попарных сумм имеет неполный ранг. Поскольку поле имеет нечетную характеристику, столбец $2b_1$ также ненулевой. Отсюда следует, что попарные суммы имеют ранг 1, и, следовательно, все столбцы попарных сумм C', C'', C''' могут быть представлены как $\lambda \cdot b_1$, где $\lambda \in \mathbb{F}_q$. Более того, для произвольного $i \geqslant 3$ получим систему для i-ых столбцов c'_i, c''_i, c'''_i матриц C', C'', C''' соответственно:

$$\begin{cases} c'_i + c''_i = \lambda_1 b_1, \\ c'_i + c'''_i = \lambda_2 b_1, \\ c''_i + c'''_i = \lambda_3 b_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $c'_i = \frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2} b_1$. Таким образом, все матрицы C в этом случае имееют ранг 1, а их столбцы $c_3, c_4, \ldots, c_n$ могут быть представлены как $\lambda \cdot b_1$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}_q$. Поскольку каждый из $n-2$ отличных от b_1 и b_2 столбцов матрицы C можно выбрать не более чем q способами, получаем, что таких матриц C не может быть более чем q^{n-2}.

Случай 3. Если $\operatorname{rank}(B) = 2$, то соответствующих этому случаю матриц C не может быть больше одной. В противном случае, сложив две такие матрицы, мы бы получили, что их первые два столбца равны

$$\begin{pmatrix} 2b_1 & 2b_2 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда, поскольку $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(b_1\ b_2) = 2$, а характеристика поля нечетна, эти две матрицы не могли бы быть соединены ребром в $\mathcal{T}_{2\times n}(\mathbb{F}_q)$.

Учитывая, что W' образует клику в $\mathcal{T}_{2\times 2}(\mathbb{F}_q)$, по лемме 2.1 получаем, что в случаях 1, 2 и 3 соответствующих матриц B не более 1, q и 5 соответственно. Используя эти оценки и оценки в случаях 1, 2 и 3 выше, получаем требуемое утверждение

$$|W| \leqslant 1 \cdot 0 + q \cdot q^{n-2} + 5 \cdot 1 = q^{n-1} + 5. \qquad \square$$

Теперь мы готовы доказать гипотезу 1.3 для $2 \times n$ матриц.

Теорема 2.3. *Рассмотрим граф $\mathcal{T}_{2\times n}(\mathbb{F}_q)$, где $n \geqslant 3$, а q – степень нечетного простого числа. Тогда*

(1) *для любой клики W этого графа выполнено $|W| \leqslant q^n$;*
(2) *любая клика W размера q^n в этом графе эквивалентна клике W^*.*

Доказательство. Пусть в W есть матрица полного ранга. Согласно лемме 2.2, $|W| \leqslant q^{n-1} + 5$. Заметим, что $q^{n-1} + 5 < q^n$ при $q \geqslant 3, n \geqslant 2$, так как $q^n - q^{n-1} = q^{n-1}(q-1) > 5$. Следовательно, такая клика не максимальна, поскольку в графе существует клика W^* размера q^n. Поэтому можно считать, что в W нет матриц ранга 2. Кроме того, мы всегда можем добавить нулевую матрицу в клику, поскольку она соединена ребром с каждой матрицей ранга 1.

Поскольку произвольную матрицу ранга 1 можно привести элементарными преобразованиями строк и столбцов к виду E_{11}, клика W эквивалентна некоторой клике, содержащей E_{11}. Поэтому без ограничения общности можно считать, что в W есть как нулевая матрица, так и матрица E_{11}. Рассмотрим произвольную матрицу $A \in W, A \neq E_{11}$. Поскольку A и E_{11} соединены ребром, матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

имеет неполный ранг. В частности, каждый ее 2×2 минор равен нулю. Кроме того, то же самое можно сказать и про саму матрицу A. Рассмотрим миноры, образованные столбцами с номерами 1 и j в матрицах A и B, где $2 \leqslant j \leqslant n$. Получим, что

$$\begin{cases} a_{11}a_{2j} - a_{1j}a_{21} = 0, \\ (a_{11}+1)a_{2j} - a_{1j}a_{21} = 0, \end{cases}$$

откуда $a_{2j} = 0$ при всех $2 \leqslant j \leqslant n$. Тогда из первого уравнения системы следует, что $a_{1j}a_{21} = 0$, т.е. или $a_{21} = 0$, или $a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$.

Отнесем матрицу, принадлежащую W, к типу (a), если для нее выполнено первое условие, и к типу (b), если оно не выполнено:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(a)}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \mu \neq 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{b}$$

Можно считать, что в W найдется матрица A' типа (a), для которой $A'(1,j) \neq 0$ при некотором $2 \leqslant j \leqslant n$. Действительно, иначе матриц типа (a) в W было бы не более q штук, а матриц типа (b) – не более q^2 штук, и, тем самым, $|W| \leqslant q^2 + q < q^n$, что и требовалось.

Теперь нетрудно заметить, что в W нет матрицы A'' типа (b), так как иначе минор $A' + A''$, образованный столбцами с номерами 1 и j, имел бы вид

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & \lambda + 0 \\ 0 + \mu & 0 \end{vmatrix} = -\lambda\mu \neq 0,$$

а значит, между A' и A'' не могло бы быть ребра в $\mathcal{T}_{2\times n}(\mathbb{F}_q)$.

Получаем, что если $|W| \geqslant q^n$, то все ее матрицы относятся к типу (a), но матриц типа (a) не более q^n. Отсюда $|W| \leqslant q^n$, и если $|W| = q^n$, то все матрицы этой клики имеют вид $\begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, что и завершает доказательство теоремы. □

§3. Тотальный граф 3×3 матриц

В этом параграфе будет доказана оценка на кликовое число графа $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$, равная $O(q^6)$. Начнем с того, что приведем оценку на кликовое число регулярного графа.

Теорема 3.1 ([3, теорема 1 и замечание 2])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле характеристики не равной* 2*. Тогда*

$$\omega(\Gamma_{n\times n}(\mathbb{F})) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k}^2 - n! + 1.$$

Из теоремы 3.1 можно сделать следующий вывод.

Следствие 3.2. *Пусть* W *– клика в* $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$*, где* q *– степень нечетного простого числа. Тогда число невырожденных матриц в* W *не превосходит* 29*.*

Также нам понадобится формула для количества $r(n,k)$ квадратных $n \times n$ матриц ранга k над полем $\mathbb{F}_q$ (см., например, [7, §1.7]):

$$r(n,k) = \frac{\big((q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{k-1})\big)^2}{(q^k - 1)\,(q^k - q)\dots(q^k - q^{k-1})}. \tag{1}$$

Из этой формулы получаем, что число 3×3 матриц ранга 1 равняется

$$r(3,1) = q^5 + q^4 + q^3 - q^2 - q - 1. \tag{2}$$

Лемма 3.3. *Пусть W – клика в $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$, где q – степень нечетного простого числа, и предположим, что $|W| > 3q^6$. Тогда найдется эквивалентная W клика, содержащая матрицы*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{22} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank}(C) = 2. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем, что в W найдутся хотя бы две матрицы ранга 2, у которых и третья строка, и третий столбец ненулевые.

По следствию 3.2, число матриц ранга 3 в W не превосходит 29, число матриц ранга 1 во всем $M_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$ равняется $r(3,1) = q^5+q^4+q^3-q^2-q-1$, а нулевая матрица только одна. Заметим также, что матриц, у которых третья строка или третий столбец нулевые, не более чем $2q^6$. Можно непосредственно убедиться в том, что при $q \geqslant 3$ выполнено неравенство

$$3q^6 > 29 + r(3,1) + 1 + 2q^6 = 2q^6 + q^5 + q^4 + q^3 - q^2 - q + 29.$$

Тогда, поскольку $|W| > 3q^6$, в W заведомо есть хотя бы две матрицы ранга 2 с ненулевыми третьим столбцом и третьей строкой. Поскольку одновременные элементарные преобразования строк и столбцов матриц клики переводят клику в эквивалентную, без ограничения общности можно считать, что в W содержится матрица $E_{11} + E_{22}$.

Заметим, что прибавление третьего столбца, умноженного на коэффициент, к первому или второму столбцу переводит клику W в эквивалентную, в которой тоже содержится матрица $E_{11} + E_{22}$. То же самое верно и для аналогичных преобразований строк. Назовем эти операции *преобразованиями первого типа*.

Матрицу $E_{11}+E_{22}$ также не изменит прибавление к первому столбцу второго и последующее вычитание первой строки из второй. То же верно и для преобразований, где операции над строками мы поменяли на соответствующие им преобразования столбцов и наоборот. Эти операции назовем *преобразованиями второго типа*. Отметим, что одновременное выполнение операций второго типа также переводит клику в эквивалентную.

Рассмотрим отличную от $E_{11}+E_{22}$ матрицу $C \in W$ ранга 2 с ненулевыми третьей строкой и третьим столбцом, $C=(c_{ij})$. Тогда указанными выше преобразованиями можно привести матрицу C к виду (3). Действительно, если $c_{13} \neq 0$ и $c_{31} \neq 0$, для этого достаточно только преобразований первого типа. Если же $c_{13}=0$ или $c_{31}=0$, то преобразованиями первого типа c_{13} или c_{31} можно увеличить на c_{33}. Если и $c_{33}=0$, то преобразованиями второго типа c_{13} (соответственно c_{31}) можно увеличить на c_{23} (соответственно на c_{32}). □

Лемма 3.4. *Пусть W – клика в $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$, где q – степень нечетного простого числа, и предположим, что $|W|>3q^6$. Тогда клика W эквивалентна клике, содержащей матрицу $E_{11}+E_{22}$ и матрицу одного из следующих типов:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \tag{I}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \tag{II}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \tag{III}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \tag{IV}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}. \tag{V}$$

Доказательство. Согласно лемме 3.3, так как $|W|>3q^6$, то W эквивалентна клике, содержащей матрицы $E_{11}+E_{22}$ и

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank}(C)=2.$$

Ниже мы будем применять одновременные элементарные преобразования строк и столбцов ко всем матрицам из W (так получится эквивалентная клика), не меняющие матрицу $E_{11}+E_{22}$, но меняющие матрицу C. Матрица $C=(c_{ij})$ вырождена, поэтому на ее побочной диагонали должен быть хотя бы один нуль. Рассмотрим три случая, соответствующих позиции нуля.

Случай 1. $c_{31}=0$.

Подслучай 1.1. $c_{31}=0, c_{32}\neq 0$.

Поделив нижнюю строку на c_{32}, получим матрицу $\begin{pmatrix}0&0&*\\0&*&*\\0&1&*\end{pmatrix}$, после чего, прибавив третью строку ко второй с нужным коэффициентом, получим $C'=\begin{pmatrix}0&0&*\\0&0&*\\0&1&*\end{pmatrix}$.

Если $C'(1,3)=0$, то $C'(2,3)\neq 0$, иначе $\operatorname{rank}(C')<2$. Поэтому мы можем поделить третий столбец на $C'(2,3)$ и получить матрицу $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&*\end{pmatrix}$ типа (I).

Если же $C'(1,3)\neq 0$, то поделим третий столбец на $C'(1,3)$ и получим матрицу $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&*\\0&1&*\end{pmatrix}$, относящуюся к типу (II).

Подслучай 1.2. $c_{31}=c_{32}=0, c_{33}\neq 0$. Поделим третью строку матрицы C на c_{33} и прибавим ее к первой и второй строкам с нужными коэффициентами. Тогда получим матрицу $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, относящуюся к типу (III). При этом $a\neq 0$, иначе ранг получившейся матрицы был бы меньше 2.

Подслучай 1.3. $c_{31}=c_{23}=c_{33}=0$. Тогда $c_{13}\neq 0$, так как иначе мы бы имели $\operatorname{rank}(C)<2$. Поделим третий столбец на c_{13} и получим матрицу $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&a&b\\0&0&0\end{pmatrix}$ типа (IV). При этом $a\neq 0$, поскольку иначе ранг получившейся матрицы был бы меньше 2.

Случай 2. $c_{13} = 0$. Случай рассматривается аналогично случаю 1, так как он получается из него транспонированием, а транспонирование является преобразованием, сохраняющим эквивалентность клик.

Случай 3. $c_{13} \neq 0, c_{31} \neq 0, c_{22} = 0$.

Подслучай 3.1. $c_{13} \neq 0, c_{31} \neq 0, c_{22} = 0$, $c_{23} = 0$. Поделим третий столбец матрицы C на c_{13}, а третью строку – на c_{31}. Получим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$, относящуюся к типу (V).

Подслучай 3.2. $c_{13} \neq 0, c_{31} \neq 0, c_{22} = 0, c_{23} \neq 0$. Поделим третий столбец матрицы C на c_{23}, а третью строку – на c_{31} и получим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$. Совершим следующую серию преобразований эквивалентности клик. Каждое из них может изменять матрицу $B = E_{11} + E_{22}$, но их композиция переведет B в себя.

B	C	комментарий
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$	исходная конфигурация
$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$	прибавляем вторую строку к первой с коэффициентом
$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}$	прибавляем первый столбец ко второму с коэффициентом
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}$	прибавляем вторую строку к первой с коэффициентом
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$	транспонируем

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\ *&1&0\\ 0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&1&*\end{pmatrix} \quad \text{прибавляем второй столбец к первому с коэффициентом}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\ 0&0&*\\ 0&1&*\end{pmatrix} \quad \text{прибавляем первую строку ко второй с коэффициентом}$$

Таким образом получаем матрицу $\begin{pmatrix}0&0&1\\ 0&0&*\\ 0&1&*\end{pmatrix}$, относящуюся к типу (II). □

В следующей теореме мы покажем, что если q – степень нечетного простого числа, то кликовое число графа $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$ есть $O(q^6)$.

Теорема 3.5. *Пусть W – клика в графе $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$, где q – степень нечетного простого числа. Тогда $|W| \leqslant 5q^6 + 3q^5 - q^4 + 28$.*

Доказательство. Если $|W| \leqslant 3q^6$, то требуемое очевидно, поскольку $3q^6 \leqslant 5q^6+3q^5-q^4+28$. Поэтому далее мы будем считать, что $|W| > 3q^6$.

В силу леммы 3.4 можно считать, что в W содержится $E_{11} + E_{22}$ и матрица C одного из типов (I) – (V). Удалим из W все невырожденные матрицы – их не более 29 по следствию 3.2 – и добавим нулевую матрицу. Получим клику $|W'|$, причем $|W'| \geqslant |W| - 28$. Поскольку W' – клика в $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$, то для произвольной матрицы $X \in W'$ выполнены равенства

$$\begin{cases}\det(X)=0,\\ \det(X+E_{11}+E_{22})=0,\\ \det(X+C)=0,\end{cases} \iff \begin{cases}\det(X)=0,\\ \det(X+E_{11}+E_{22})-\det(X)=0,\\ \det(X+C)-\det(X)=0.\end{cases} \qquad (*)$$

Теперь пусть

$$X = \begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\ x_4&x_5&x_6\\ x_7&x_8&x_9\end{pmatrix},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_9$ – переменные. Для каждого из возможных типов матрицы C мы оценим сверху число решений системы $(*)$ справа (тем самым, получим верхнюю оценку на $|W'|$).

Случай 1. C имеет тип (I). Запишем систему $(*)$:

$$\begin{cases} -x_3x_5x_7 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9 + x_1x_5x_9 = 0, \\ -x_3x_7 - x_6x_8 + x_1x_9 + x_5x_9 + x_9 = 0, \\ -x_2x_4a + x_1x_5a + x_3x_4 - x_1x_6 + x_2x_7 - x_1x_8 - x_1 = 0. \end{cases}$$

Относительно переменных x_3, x_6, x_9 (в указанном порядке) это неоднородная система линейных уравнений с матрицей

$$S_1 = \begin{pmatrix} x_4x_8 - x_5x_7 & x_2x_7 - x_1x_8 & x_1x_5 - x_2x_4 \\ -x_7 & -x_8 & x_1 + x_5 + 1 \\ x_4 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение:

$$r_i = |\{(x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8) \in (\mathbb{F}_q)^6 \mid \operatorname{rank}(S_1) = i\}|, \quad 0 \leqslant i \leqslant 3.$$

Поскольку $|\ker S_1| = q^{3-\operatorname{rank}(S_1)}$ и число решений неоднородной системы с фиксированной матрицей S_1 равно 0 или $|\ker S_1|$, заключаем, что число решений системы $(*)$ не превосходит

$$r_3 + r_2q + r_1q^2 + r_0q^3. \qquad (**)$$

Оценим сверху значения чисел r_i.

(1) $r_3 \leqslant q^6$, так как наборов значений шести переменных в точности q^6.

(2) Для оценки r_2 оценим сверху число наборов $(x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8)$, для которых $\operatorname{rank}(S_1) = 2$. Тогда $\det S_1 = 0$. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} \det S_1 &= (x_4x_8 - x_5x_7 - x_7) \cdot (x_1x_5 - x_2x_4) \\ &= \begin{vmatrix} x_4 & x_7 \\ x_5 + 1 & x_8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

поэтому хотя бы один из определителей в правой части равен нулю. По формуле (1), число невырожденных 2×2 матриц над $\mathbb{F}_q$ равно $r(2,2) = (q^2-1)(q^2-q)$, поэтому число вырожденных 2×2 матриц равно $q^4 - (q^2-1)(q^2-q) = q^3 + q^2 - q$.

Итак, мы можем задать значения для одного из наборов (x_4, x_5, x_7, x_8) или (x_1, x_2, x_4, x_5) не более чем $q^3 + q^2 - q$ способами. Далее задаем произвольные значения переменным x_1, x_2 или x_7, x_8 соответственно – не более чем q^2 способами. В итоге, получаем: $r_2 \leqslant 2(q^3 + q^2 - q)q^2 = 2q^5 + 2q^4 - 2q^3$.

(3) Для оценки r_1 оценим сверху число наборов $(x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8)$, для которых $\operatorname{rank}(S_1) = 1$.

Поскольку $\operatorname{rank}(S_1) = 1$ и $S_1(3,3) = 0$, заключаем, что S_1 обязана иметь нулевую последнюю строку или нулевой последний столбец.

3.1. Если последняя строка в S_1 нулевая, то $x_1 = x_4 = 0$, значения переменным x_2, x_5, x_7, x_8 зададим произвольно, что дает не более q^4 наборов шести переменных.

3.2. Если последний столбец в S_1 нулевой, то $x_1x_5 - x_2x_4 = 0$, $x_1 + x_5 + 1 = 0$. Рассмотрим следующие ситуации.

3.2.1. При $x_1 = 0$ имеем $x_5 = -1$ и $x_2x_4 = 0$, что позволяет задать значения для набора (x_2, x_4) не более чем $2q - 1$ способами. Полагая значения x_7, x_8 произвольными, получаем не более $(2q-1)q^2$ наборов шести переменных.

3.2.2. При $x_1 = -1$ имеем $x_5 = 0$, и вновь получаем, что $x_2x_4 = 0$. Это позволяет задать значения для набора (x_2, x_4) не более чем $2q - 1$ способами. Полагая значения x_7, x_8 произвольными, вновь получаем не более $(2q-1)q^2$ наборов шести переменных.

3.2.3. Если же $x_1 \neq 0, -1$, то есть $q - 2$ способа задать значение для x_1. Поскольку $x_1 + x_5 + 1 = 0$, значение x_5 определится однозначно, и оно будет ненулевым. Тогда первое уравнение примет вид $x_2x_4 = \text{const} \neq 0$, что дает не более $q - 1$ возможных значений для наборов (x_2, x_4). Полагая значения x_7, x_8 произвольными, получаем не более $(q-2)(q-1)q^2$ наборов шести переменных.

Просуммировав оценки в случаях 3.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, получим:

$$r_1 \leqslant q^4 + (2q-1)q^2 + (2q-1)q^2 + (q-2)(q-1)q^2 = 2q^4 + q^3.$$

(4) Вычислим r_0. В этом случае $S_1 = 0$, что влечет $x_1 = x_4 = x_7 = x_8 = 0$, $x_5 = -1$. Остается q возможных значений для x_2. Отсюда $r_0 = q$.

Теперь применим формулу $(**)$. Получим, что число решений системы $(*)$ не превосходит

$$q^6 + (2q^5 + 2q^4 - 2q^3) \cdot q + (2q^4 + q^3) \cdot q^2 + q \cdot q^3 = 5q^6 + 3q^5 - q^4.$$

Случай 2. C имеет тип (II). Запишем систему $(*)$

$$\begin{cases} -x_3x_5x_7 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9 + x_1x_5x_9 = 0, \\ -x_3x_7 - x_6x_8 + x_1x_9 + x_5x_9 + x_9 = 0, \\ x_1x_5b+x_2x_7a+x_4x_8+x_4x_3+x_4-x_5x_7-x_2x_4b-x_1x_8a-x_1x_6-x_1a=0. \end{cases}$$

Относительно переменных x_3, x_6, x_9 (в указанном порядке) это неоднородная система линейных уравнений с матрицей

$$S_2 = \begin{pmatrix} x_4x_8 - x_5x_7 & x_2x_7 - x_1x_8 & x_1x_5 - x_2x_4 \\ -x_7 & -x_8 & x_1 + x_5 + 1 \\ x_4 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $S_2 = S_1$, данный случай полностью аналогичен случаю 1, и число решений системы $(*)$ также не превосходит $5q^6 + 3q^5 - q^4$.

Случай 3. C имеет тип (III). Запишем систему $(*)$:

$$\begin{cases} -x_3x_5x_7 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9 + x_1x_5x_9 = 0, \\ -x_3x_7 - x_6x_8 + x_1x_9 + x_5x_9 + x_9 = 0, \\ -x_3x_7a + x_1x_9a - x_2x_4 + x_1x_5 + x_1a = 0. \end{cases}$$

Относительно переменных x_3, x_6, x_9 (в указанном порядке) это неоднородная система линейных уравнений с матрицей

$$S_3 = \begin{pmatrix} x_4x_8 - x_5x_7 & x_2x_7 - x_1x_8 & x_1x_5 - x_2x_4 \\ -x_7 & -x_8 & x_1 + x_5 + 1 \\ -x_7a & 0 & x_1a \end{pmatrix}.$$

Вновь введем обозначение:

$$r_i = |\{(x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8) \in (\mathbb{F}_q)^6 \mid \operatorname{rank}(S_3) = i\}|, \quad 0 \leqslant i \leqslant 3.$$

По аналогии со случаем 1 (см. формулу $(**)$), мы заключаем, что число решений системы $(*)$ не превосходит $r_3 + r_2q + r_1q^2 + r_0q^3$. Оценим сверху значения чисел r_i.

(1) $r_3 \leqslant q^6$, так как имеется в точности q^6 наборов значений шести переменных.

(2) Для оценки r_2 оценим сверху число наборов $(x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8)$, для которых $\operatorname{rank}(S_3) = 2$. Тогда $\det S_3 = 0$.

Непосредственно проверяется, что

$$\det S_3 = -a \cdot (x_4x_8 - x_5x_7 - x_7) \cdot (x_1x_8 - x_2x_7) = -a \cdot \begin{vmatrix} x_4 & x_7 \\ x_5+1 & x_8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_7 & x_8 \end{vmatrix},$$

при этом $a \neq 0$. Поэтому хотя бы один из определителей в правой части равен 0. Напомним, что число вырожденных 2×2 матриц над $\mathbb{F}_q$ равно q^3+q^2-q.

Итак, мы можем задать значения для одного из наборов (x_4, x_5, x_7, x_8) или (x_1, x_2, x_7, x_8) не более чем q^3+q^2-q способами. Далее задаем произвольные значения переменным x_1, x_2 или x_4, x_5 соответственно не более чем q^2 способами. В итоге получаем: $r_2 \leqslant 2(q^3+q^2-q)q^2 = 2q^5+2q^4-2q^3$.

(3) Для оценки r_1 оценим сверху число наборов $(x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8)$, для которых $\operatorname{rank}(S_3) = 1$. Поскольку $\operatorname{rank}(S_3) = 1$ и $S_3(3,2) = 0$, получаем, что у S_3 обязана быть нулевая последняя строка или нулевой второй столбец.

3.1. Если последняя строка в S_3 нулевая, то $x_1 = x_7 = 0$, значения переменным x_2, x_4, x_5, x_8 зададим произвольно, что дает не более q^4 наборов шести переменных.

3.2. Если второй столбец в S_3 нулевой, то $x_8 = 0$, $x_2x_7 = 0$.

3.2.1. При $x_7 = 0$ значения переменным x_1, x_2, x_4, x_5 зададим произвольно, что дает не более q^4 наборов шести переменных.

3.2.2. Если же $x_7 \neq 0$, то есть $q-1$ способ задать значение для x_7. При этом $x_2 = 0$. Разделив первый столбец S_3 на $(-x_7)$, а последнюю строку – на a, получим:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_5 & 0 & x_1x_5 \\ 1 & 0 & x_1+x_5+1 \\ 1 & 0 & x_1 \end{pmatrix} = 1.$$

Отсюда $x_1 = x_1 + x_5 + 1$, т.е. $x_5 = -1$. Полагая значения x_1, x_4 произвольными, получаем не более $(q-1)q^2$ наборов шести переменных.

Просуммировав оценки в случаях 3.1, 3.2.1, 3.2.2, получим:

$$r_1 \leqslant q^4 + q^4 + (q-1)q^2 = 2q^4 + q^3 - q^2.$$

(4) Вычислим r_0. В этом случае $S_3 = 0$, откуда $x_1 = x_7 = x_8 = 0$, $x_5 = -1$, $x_2x_4 = 0$, что дает $2q-1$ возможных наборов (x_2, x_4). Отсюда $r_0 = 2q-1$.

Теперь применим формулу $(**)$. Получим, что число решений системы $(*)$ не превосходит

$$q^6+(2q^5+2q^4-2q^3)\cdot q+(2q^4+q^3-q^2)\cdot q^2+(2q-1)\cdot q^3 = 5q^6+3q^5-q^4-q^3.$$

Случай 4. C имеет тип (IV). Запишем систему $(*)$:

$$\begin{cases} -x_3x_5x_7 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9 + x_1x_5x_9 = 0, \\ -x_3x_7 - x_6x_8 + x_1x_9 + x_5x_9 + x_9 = 0, \\ -x_3x_7a + x_1x_9a + x_2x_7b - x_1x_8b - x_5x_7 + x_4x_8 - x_7a = 0. \end{cases}$$

Относительно переменных x_3, x_6, x_9 (в указанном порядке) это неоднородная система линейных уравнений с матрицей

$$S_4 = \begin{pmatrix} x_4x_8 - x_5x_7 & x_2x_7 - x_1x_8 & x_1x_5 - x_2x_4 \\ -x_7 & -x_8 & x_1 + x_5 + 1 \\ -x_7a & 0 & x_1a \end{pmatrix}.$$

Поскольку $S_4 = S_3$, данный случай полностью аналогичен случаю 3, так что число решений системы $(*)$ также не превосходит $5q^6 + 3q^5 - q^4 - q^3$.

Случай 5. C имеет тип (V). Запишем систему $(*)$:

$$\begin{cases} -x_3x_5x_7 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9 + x_1x_5x_9 = 0, \\ -x_3x_7 - x_6x_8 + x_1x_9 + x_5x_9 + x_9 = 0, \\ x_3x_4a - x_1x_6a - x_2x_4b + x_1x_5b - x_3x_5 + x_2x_6 - x_5x_7 + x_4x_8 + x_4a - x_5 = 0. \end{cases}$$

Относительно переменных x_8, x_7, x_9 (в указанном порядке) это неоднородная система линейных уравнений с матрицей

$$S_5 = \begin{pmatrix} x_3x_4 - x_1x_6 & x_2x_6 - x_3x_5 & x_1x_5 - x_2x_4 \\ -x_6 & -x_3 & x_1 + x_5 + 1 \\ x_4 & -x_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку S_5 совпадает с S_1 с точностью до переименования переменных ($x_1 \leftrightarrow x_5$, $x_6 \leftrightarrow x_7$, $x_3 \leftrightarrow x_8$), данный случай полностью аналогичен случаю 1, а значит, число решений системы $(*)$ также не превосходит $5q^6 + 3q^5 - q^4$.

Проанализировав все возможные случаи, мы заключаем, что число решений системы $(*)$ не превосходит

$$\max(5q^6 + 3q^5 - q^4, 5q^6 + 3q^5 - q^4 - q^3) = 5q^6 + 3q^5 - q^4,$$

откуда $|W'| \leqslant 5q^6+3q^5-q^4$. Значит, $|W| \leqslant |W'|+28 = 5q^6+3q^5-q^4+28$, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 3.6. *Пусть q – степень нечетного простого числа. Тогда* $\omega(\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)) = O(q^6)$.

Доказательство. Действительно, клика W^* в $\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)$ имеет размер q^6, а по теореме 3.5 имеем $\omega(\mathcal{T}_{3\times 3}(\mathbb{F}_q)) \leqslant 5q^6 + 3q^5 - q^4 + 28$. $\square$

Список литературы

1. Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 49–80.
2. S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian, *Commuting graphs of matrix algebras.* — Commun. Algebra **36**, No. 11 (2008), 4020–4031.
3. S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari, *The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite.* — Linear Algebra Appl. **431** (2009), 1715–1718.
4. D. F. Anderson, A. Badawi, *The total graph of a commutative ring.* — J. Algebra **320** (2008), 2706–2719.
5. D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **217**, No. 2 (1999), 434–447.
6. I. Beck, *Coloring of commuatitive rings.* — J. Algebra **116**, No. 1 (1988), 208–226.
7. K. Morrison, *Integer sequences and matrices over finite fields.* —J. Integer Seq. **9**, 06.2.1 (2006). 28 pp.
8. J. Zhou, D. Wong, X. Ma, *Automorphism group of the total graph over a matrix ring.* — Linear Multilinear Algebra **65** (2017), 572–581.

Maksaev A. M., Promyslov V. V., Sheshenya D. S. Clique numbers of the total graphs of $2 \times n$ and 3×3 matrices.

The total graph of the space of $m \times n$ matrices over a field $\mathbb{F}$ is the graph with vertex set $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ in which distinct matrices A and B are connected by an edge if and obly if $\operatorname{rank}(A+B) < \min(m,n)$. It is proved that over a field of order q, where q is a power of an odd prime, the clique number of the total graph of $2 \times n$ matrices equals q^n, whereas that of

3×3 matrices is $O(q^6)$. Up to now, this issue has only been examined for 2×2 matrices.

Национальный исследовательский
университет “Высшая школа экономики”,
Москва, 101000, Россия;
Московский Центр фундаментальной
и прикладной математики,
Москва, 119991, Россия

E-mail: artmak95@mail.ru

E-mail: valentin.promyslov@gmail.com

Национальный исследовательский
университет “Высшая школа экономики”,
Москва, 101000, Россия

E-mail: danil.sheshenya@yandex.ru

Поступило 1 октября 2024 г.