Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 534, 2024 г.

А. А. Макаров, С. В. Макарова

О ЛИФТИНГОВЫХ МОДИФИКАЦИЯХ СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТОВ С НЕСМЕЩЕННЫМ И СМЕЩЕННЫМ НОСИТЕЛЕМ

§1. Введение

Непрерывная кусочно-линейная интерполяция на равномерной сетке считается одной из самых простых схем локальной аппроксимации [4]. Использование этой схемы в кратномасштабном анализе соответствует разложению Фабера [3, 17], на основе которого реализовано построение первого ленивого вейвлета. Такой подход инициировал развитие методов построения вейвлетов без привлечения формализма гильбертовых пространств и аппарата Фурье-анализа, в том числе способствовал разработке различных схем построения вейвлетных разложений на неравномерных сетках (подробнее см. [11, 19–21] и цитируемую там литературу).

В данной работе рассматривается квазилинейная интерполяция минимальными сплайнами [6, 8] и соответствующие телескопические системы вложенных пространств сплайнов на неравномерных сетках. Вообще говоря, существуют различные возможности построения как сплайн-вейвлетных разложений, так и базисных функций в пространстве вейвлетов [1, 2, 7, 9, 10, 15]. Известно, что для улучшения усредняющих свойств вейвлетов, например, для того, чтобы сделать их в том или ином смысле «более ортогональными» к масштабирующему пространству, можно использовать метод лифтинга (подъема), вычитая из каждого вейвлета несколько соседних масштабирующих функций более грубого разрешения [16, 18, 22]. В данной работе такая лифтинговая модификация применяется к сплайн-вейвлетам с несмещенным носителем [12]. Однако для сплайн-вейвлетов со смещенным носителем [5] применяется другая лифтинговая модификация, использующая

Ключевые слова: B-сплайн, минимальные сплайны, вейвлеты, сплайн-вейвлеты, вейвлетное разложение, неравномерная сетка, схема лифтинга.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации No. 075-00003-24-01 от 08.02.2024 (проект FSEE-2024-0003).

линейную комбинацию масштабирующих функций того же разрешения. Это приводит к построению достаточно произвольных (как полиномиальных, так и неполиномиальных) сплайн-вейвлетов на неравномерных сетках на отрезке. При этом формулы декомпозиции и реконструкции оказываются довольно простыми и допускают эффективную компьютерную реализацию.

§2. Пространство координатных сплайнов

Пусть $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}^1$ — множества целых и вещественных чисел соответственно. Через $C^r[a,b]$ обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, полагая $C^0[a,b] \stackrel{\text{def}}{=} C[a,b]$.

На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку Δ^L:

$$a = x_0^L < x_1^L < \ldots < x_{n-1}^L < x_n^L = b,$$

где $n = 2^L m$, причем $L, m \in \mathbb{Z}$, $L \geqslant 0$, $m \geqslant 1$.

Рассмотрим *порождающую* функцию $\rho \in C^1[a,b]$. Объекты, рассматриваемые на сетке Δ^L, будем снабжать верхним индексом L, например, $\rho_j^L \stackrel{\text{def}}{=} \rho(x_j^L)$, $j = 0, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть $\rho'(t) \neq 0$, $t \in [a,b]$. Тогда сплайн-функции $\phi_j^L(t)$, $j = 0, \ldots, n$, задаваемые на сетке Δ^L формулами*

$$\phi_0^L(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho_1^L - \rho(t)}{\rho_1^L - \rho_0^L}, & t \in [x_0^L, x_1^L), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t) - \rho_{j-1}^L}{\rho_j^L - \rho_{j-1}^L}, & t \in [x_{j-1}^L, x_j^L), \\ \dfrac{\rho_{j+1}^L - \rho(t)}{\rho_{j+1}^L - \rho_j^L}, & t \in [x_j^L, x_{j+1}^L), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\phi_n^L(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t) - \rho_{n-1}^L}{\rho_n^L - \rho_{n-1}^L}, & t \in [x_{n-1}^L, x_n^L], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

обладают следующими свойствами:

(1) *Линейная независимость: $\{\phi_j^L\}$ — линейно независимая система функций на отрезке $[a,b]$.*

(2) *Компактный носитель:* $\operatorname{supp}\phi_j^L = [x_{j-1}^L, x_{j+1}^L]$.
(3) *Непрерывность:* $\phi_j^L \in C[a,b]$, *причем* $\phi_j^L(x_i^L) = \delta_{j,i}$, *где* $\delta_{j,i}$ *— символ Кронекера.*
(4) *Положительность:* $\phi_j^L(t) > 0$, $t \in (x_{j-1}^L, x_{j+1}^L)$.
(5) *Разбиение единицы:* $\sum\limits_{j=0}^{n} \phi_j^L(t) = 1$, $t \in [a,b]$.

Доказательство. Учитывая, что отличие от нуля производной генерирующей функции $\rho'(t)$ на отрезке $[a,b]$ влечет строгую монотонность $\rho(t)$, доказательство непосредственно вытекает из приведенного в работе [6]. Заметим, что краевые функции имеют более «узкий» носитель $\operatorname{supp}\phi_0^L = [x_0^L, x_1^L]$ и $\operatorname{supp}\phi_n^L = [x_{n-1}^L, x_n^L]$; они положительны внутри своих носителей. □

Пространство

$$V^L \stackrel{\text{def}}{=} V^L(\Delta^L) = \left\{ s^L \mid s^L(t) = \sum_{j=0}^{2^L m} c_j^L\, \phi_j^L(t) \quad \forall\, c_j^L \in \mathbb{R}^1, t \in [a,b] \right\} \tag{1}$$

называется *пространством нормализованных линейных минимальных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов (второго порядка)* на сетке Δ^L. Сами сплайны будем называть *координатными минимальными сплайнами максимальной гладкости*. Очевидно, что размерность введенного конечномерного пространства есть

$$\dim V^L = 2^L m + 1.$$

При $\rho(t) = t$ сплайн-функции ϕ_j^L совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени (второго порядка), т.е. с одномерными функциями Куранта:

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_{j-1}^L}{x_j^L - x_{j-1}^L}, & t \in [x_{j-1}^L, x_j^L), \\ \dfrac{x_{j+1}^L - t}{x_{j+1}^L - x_j^L}, & t \in [x_j^L, x_{j+1}^L), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

§3. О вейвлетных разложениях фаберовского типа

Пусть сетка Δ^{L+1} получена двукратным измельчением сетки Δ^L путем добавления новых узлов $\xi_j^L \in (x_j^L, x_{j+1}^L)$, $j = 0, \ldots, 2^L m - 1$, т.е.

$$x_j^{L+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_{j/2}^L, & j = 2k,\ k = 0, \ldots, 2^L m, \\ \xi_{(j-1)/2}^L, & j = 2k-1,\ k = 1, \ldots, 2^L m. \end{cases}$$

Тогда справедливы *калибровочные соотношения* [20], которые представляют сплайны на разреженной сетке в виде линейной комбинации сплайнов на густой сетке:

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \phi_0^{L+1}(t) + p_{-1,2}^{L+1}\, \phi_1^{L+1}(t), & j = 0, \\ p_{j-1,0}^{L+1}\, \phi_{2j-1}^{L+1}(t) + p_{j-1,1}^{L+1}\, \phi_{2j}^{L+1}(t) & \\ \qquad + p_{j-1,2}^{L+1}\, \phi_{2j+1}^{L+1}(t), & j = 1, \ldots, 2^L m - 1, \\ p_{2^L m-1,0}^{L+1}\, \phi_{2^{L+1}m-1}^{L+1}(t) + \phi_{2^{L+1}m}^{L+1}(t), & j = 2^L m, \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты $p_{j,i}^{L+1} \in \mathbb{R}^1$, $i = 0, 1, 2$, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} p_{j,0}^{L+1} &= \frac{\rho_{2j+1}^{L+1} - \rho_{2j}^{L+1}}{\rho_{2j+2}^{L+1} - \rho_{2j}^{L+1}}, && j = 0, \ldots, 2^L m - 1, \\ p_{j,1}^{L+1} &= 1, && j = -1, \ldots, 2^L m - 1, \\ p_{j,2}^{L+1} &= \frac{\rho_{2j+4}^{L+1} - \rho_{2j+3}^{L+1}}{\rho_{2j+4}^{L+1} - \rho_{2j+2}^{L+1}}, && j = -1, \ldots, 2^L m - 2. \end{aligned}$$

Ввиду калибровочных соотношений (2), справедливо вложение пространств $V^L \subset V^{L+1}$, откуда можно построить вейвлетное разложение фаберовского типа

$$V^{L+1} = V^L \dotplus W^L, \tag{3}$$

где через $\dotplus$ обозначена прямая сумма пространств V^L и W^L.

Пространство вейвлетов W^L можно определить как дополнение пространства V^L до пространства V^{L+1} таким образом, что любая функция из пространства V^{L+1} может быть записана в виде суммы некоторой функции из пространства V^L и некоторой функции из пространства W^L. При этом существуют различные возможности построения базисных функций в пространстве W^L.

§4. Лифтинговая модификация несмещенных сплайн-вейвлетов

Здесь в качестве базисных функций в пространстве W^L будем использовать базисные функции из пространства V^{L+1} с центрами в нечетных узлах. Так получаются ленивые вейвлеты, которые не требуют дополнительных вычислений, являясь подмножеством масштабирующих функций (см. [12]). Ясно, что $\dim W^L = 2^L m$, причем выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств, т.е.

$$\dim V^{L+1} = \dim V^L + \dim W^L.$$

Составим из сплайн-функций ϕ_j^L, $j = 0, \ldots, 2^L m$, вектор-строку $\boldsymbol{\phi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\phi_0^L, \phi_1^L, \ldots, \phi_{2^L m}^L\right)$. Тогда существует матрица *уточняющей реконструкции масштабирующих функций* (или матрица *последовательного деления*) $\boldsymbol{P}^{L+1}$ размеров $(2^{L+1}m+1) \times (2^L m+1)$ такая, что

$$\boldsymbol{\phi}^L = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\, \boldsymbol{P}^{L+1}, \tag{4}$$

где элементы столбцов составлены из коэффициентов калибровочных соотношений (2):

$$\boldsymbol{P}^{L+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_{-1,2}^{L+1} & p_{0,0}^{L+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_{0,2}^{L+1} & p_{1,0}^{L+1} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{L+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{2^L m-2,0}^{L+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{2^L m-2,2}^{L+1} & p_{2^L m-1,0}^{L+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Обозначим ленивые базисные вейвлет-функции через

$$\psi_i^L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{2i+1}^{L+1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1,$$

и введем вектор-строку $\boldsymbol{\psi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\psi_0^L, \psi_1^L, \ldots, \psi_{2^L m-1}^L\right)$.

Поскольку пространство вейвлетов W^L по определению является подпространством V^{L+1}, можно представить вейвлет-функции ψ_i^L в виде линейной комбинации масштабирующих функций ϕ_j^{L+1}. Таким образом, существует матрица *уточняющей реконструкции вейвлет-функций* $\boldsymbol{Q}^{L+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(q_{i,j}^{L+1}\right)$ размера $(2^{L+1}m+1) \times 2^L m$ такая, что

$$\boldsymbol{\psi}^L = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\,\boldsymbol{Q}^{L+1}, \tag{6}$$

а ее элементы $q_{i,j}^{L+1}$ — нули, за исключением $q_{2k+1,k}^{L+1} = 1$, где $k = 0, \ldots, 2^L m - 1$, т.е.

$$\boldsymbol{Q}^{L+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Используя обозначения для блочных матриц, представления (4) и (6) можно записать в виде единого калибровочного соотношения для масштабирующих функций и вейвлетов

$$\left[\boldsymbol{\phi}^L \mid \boldsymbol{\psi}^L\right] = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right], \tag{8}$$

где матрица $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]$ называется матрицей *реконструкции (синтеза)*.

Чтобы улучшить усредняющие свойства ленивых вейвлетов, например, сделать их в том или ином смысле «более ортогональными» к пространству V^L, можно из каждого ленивого вейвлета вычесть несколько соседних масштабирующих функций более грубого разрешения.

Определим новые базисные вейвлет-функции

$$\begin{aligned} \Psi_i^L(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_i^L(t) - \alpha_i^{L+1}\phi_i^L(t) - \beta_{i+1}^{L+1}\phi_{i+1}^L(t) \\ &= \phi_{2i+1}^{L+1}(t) - \alpha_i^{L+1}\phi_i^L(t) - \beta_{i+1}^{L+1}\phi_{i+1}^L(t), \end{aligned} \tag{9}$$

$i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1$, и потребуем сохранения первых двух моментов, т.е.

$$\int_a^b \Psi_i^L(t)\,dt = 0, \qquad \int_a^b t\Psi_i^L(t)\,dt = 0.$$

Отсюда находим

$$\alpha_i^{L+1} = \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{i+1}^{L}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{i+1}^{L}(t)\,dt \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{i}^{L}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{i+1}^{L}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{i}^{L}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{i+1}^{L}(t)\,dt \end{vmatrix},$$

$$\beta_{i+1}^{L+1} = \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{i}^{L}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{i}^{L}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{i}^{L}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{i+1}^{L}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{i}^{L}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{i+1}^{L}(t)\,dt \end{vmatrix},$$

где $i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1$.

Из коэффициентов α_i^{L+1}, β_{i+1}^{L+1} составим матрицу $\boldsymbol{G}^{L+1}$ размеров $(2^L m + 1) \times 2^L m$:

$$\boldsymbol{G}^{L+1} = \begin{bmatrix} \alpha_0^{L+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \beta_1^{L+1} & \alpha_1^{L+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^{L+1} & \alpha_2^{L+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_{2^L m-1}^{L+1} & \alpha_{2^L m-1}^{L+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_{2^L m}^{L+1} \end{bmatrix}.$$

Запишем новые вейвлет-функции (9) в вектор-строку

$$\boldsymbol{\Psi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\Psi_0^L, \Psi_1^L, \ldots, \Psi_{2^L m-1}^L\right).$$

В силу представлений (4) и (6), справедлива цепочка равенств

$$\boldsymbol{\Psi}^L = \boldsymbol{\psi}^L - \boldsymbol{\phi}^L \boldsymbol{G}^{L+1} = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\left(\boldsymbol{Q}^{L+1} - \boldsymbol{P}^{L+1}\boldsymbol{G}^{L+1}\right).$$

Тогда единое калибровочное соотношение, аналогичное (8), для тех же масштабирующих функций и новых вейвлетов есть

$$\left[\boldsymbol{\phi}^L \mid \boldsymbol{\Psi}^L\right] = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right], \qquad (10)$$

где матрица реконструкции новых вейвлетов, определяется из матрицы реконструкции ленивых вейвлетов $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]$ равенством

$$\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1} - \boldsymbol{P}^{L+1}\boldsymbol{G}^{L+1}\right]. \tag{11}$$

Матрица $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}$ имеет вид (5), а матрица

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} = \begin{bmatrix} \xi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{1,0} & \xi_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{2,0} & \xi_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{3,0} & \xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \dots & 0 \\ 0 & \xi_{4,1} & \xi_{4,2} & \dots & 0 \\ 0 & \xi_{5,1} & \xi_{5,2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{6,2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{7,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{2^{L+1}m-3,2^Lm-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{2^{L+1}m-2,2^Lm-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{2^{L+1}m-1,2^Lm-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_{2^{L+1}m,2^Lm-1} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\xi_{0,0} = -\alpha_0^{L+1}, \quad \xi_{1,0} = 1 - \alpha_0^{L+1}p_{-1,2}^{L+1} - \beta_1^{L+1}p_{0,0}^{L+1},$$
$$\xi_{2,0} = -\beta_1^{L+1}, \quad \xi_{3,0} = -\beta_1^{L+1}p_{0,2}^{L+1},$$
$$\xi_{1,1} = -\alpha_1^{L+1}p_{0,0}^{L+1},\ \xi_{2,1} = -\alpha_1^{L+1},\ \xi_{3,1} = 1 - \alpha_1^{L+1}p_{0,2}^{L+1} - \beta_2^{L+1}p_{1,0}^{L+1},$$
$$\xi_{4,1} = -\beta_2^{L+1}, \quad \xi_{5,1} = -\beta_2^{L+1}p_{1,2}^{L+1},$$
$$\xi_{3,2} = -\alpha_2^{L+1}p_{1,0}^{L+1},\ \xi_{4,2} = -\alpha_2^{L+1},\ \xi_{5,2} = 1 - \alpha_2^{L+1}p_{1,2}^{L+1} - \beta_3^{L+1}p_{2,0}^{L+1},$$
$$\xi_{6,2} = -\beta_3^{L+1}, \quad \xi_{7,2} = -\beta_3^{L+1}p_{2,2}^{L+1},$$
$$\xi_{2^{L+1}m-3,2^Lm-1} = -\alpha_{2^Lm-1}^{L+1}p_{2^Lm-2,0}^{L+1}, \quad \xi_{2^{L+1}m-2,2^Lm-1} = -\alpha_{2^Lm-1}^{L+1},$$
$$\xi_{2^{L+1}m-1,2^Lm-1} = 1 - \alpha_{2^Lm-1}^{L+1}p_{2^Lm-2,2}^{L+1} - \beta_{2^Lm}^{L+1}p_{2^Lm-1,0}^{L+1},$$
$$\xi_{2^{L+1}m,2^Lm-1} = -\beta_{2^Lm}^{L+1}.$$

Из представлений (5) и (12) ясно, что матрица реконструкции $\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]$ разрежена. Как правило, матрицы декомпозиции (анализа), обратные к матрицам реконструкции, теряют разреженную структуру, поэтому для декомпозиции используют те или иные специальные методы, не осуществляя построение матриц декомпозиции в явном виде (см., например, [1,13–15]). В нашем случае матрица декомпозиции оказывается разреженной, причем перестановкой столбцов ее можно привести к пятидиагональной.

Теорема 2. *Обратная к* (11) *матрица* $\left[\boldsymbol{P}_{\Psi}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\Psi}^{L+1}\right]^{-1}$ *существует и имеет следующий вид:*

$$\left[\boldsymbol{P}_{\Psi}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\Psi}^{L+1}\right]^{-1} = \left[\frac{\boldsymbol{A}_{\Psi}^{L+1}}{\boldsymbol{B}_{\Psi}{}^{L+1}}\right], \tag{13}$$

где

$$\boldsymbol{B}_{\Psi}^{L+1} = \begin{bmatrix} -p_{-1,2}^{L+1} & 1 & -p_{0,0}^{L+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{0,2}^{L+1} & 1 & -p_{1,0}^{L+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -p_{2^L m-2,2}^{L+1} & 1 & -p_{2^L m-1,0}^{L+1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{\Psi}^{L+1} = \begin{bmatrix} \lambda_{0,0} & \lambda_{0,1} & \lambda_{0,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{2^L m-1,2^{L+1}m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{2^L m,2^{L+1}m} \end{bmatrix},$$

причем

$$\lambda_{0,0} = 1 - \alpha_0^{L+1} p_{-1,2}^{L+1}, \quad \lambda_{1,0} = -\beta_1^{L+1} p_{-1,2}^{L+1},$$

$$\lambda_{0,1} = \alpha_0^{L+1}, \quad \lambda_{1,1} = \beta_1^{L+1},$$

$$\lambda_{0,2} = -\alpha_0^{L+1} p_{0,0}^{L+1},\ \lambda_{1,2} = 1 - \alpha_1^{L+1} p_{0,2}^{L+1} - \beta_1^{L+1} p_{0,0}^{L+1},\ \lambda_{2,2} = -\beta_2^{L+1} p_{0,2}^{L+1},$$

$$\lambda_{1,3} = \alpha_1^{L+1}, \quad \lambda_{2,3} = \beta_2^{L+1},$$

$$\lambda_{1,4} = -\alpha_1^{L+1} p_{1,0}^{L+1}, \quad \lambda_{2,4} = 1 - \alpha_2^{L+1} p_{1,2}^{L+1} - \beta_2^{L+1} p_{1,0}^{L+1},$$

$$\lambda_{2^L m-1,2^{L+1}m-1} = \alpha_{2^L m-1}^{L+1}, \quad \lambda_{2^L m,2^{L+1}m-1} = \beta_{2^L m}^{L+1},$$

$$\lambda_{2^L m-1,2^{L+1}m} = -\alpha_{2^L m-1}^{L+1} p_{2^L m-1,0}^{L+1}, \quad \lambda_{2^L m,2^{L+1}m} = 1 - \beta_{2^L m}^{L+1} p_{2^L m-1,0}^{L+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим пятидиагональную матрицу

$$\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & \xi_{0,0} & & & & \\ p_{-1,2}^{L+1} & \xi_{1,0} & p_{0,0}^{L+1} & \xi_{1,1} & & \\ & \xi_{2,0} & 1 & \xi_{2,1} & \ddots & \\ & \xi_{3,0} & p_{0,2}^{L+1} & \xi_{3,1} & \ddots & \\ & & & \xi_{4,1} & \ddots & \\ & & & \xi_{5,1} & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p_{2^L m-1,0}^{L+1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

получаемую перестановкой столбцов матрицы (11) в соответствии с подстановкой

$$\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 2^L m & 2^L m+1 & 2^L m+2 & \dots & 2^{L+1} m \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2^{L+1} m & 1 & 3 & \dots & 2^{L+1} m-1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Матрицу, соответствующую перестановке столбцов (15), обозначим через P. Тогда верно представление

$$\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]' = \left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right] P. \quad (16)$$

Структура пятидиагональной матрицы (14) такова, что ее определитель удовлетворяет условию $\det\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]' = 1$, а, следовательно, существует обратная к (14) матрица $\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]'^{-1}$, которая также оказывается пятидиагональной:

$$\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]'^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix}
\lambda_{0,0} & \lambda_{0,1} & \lambda_{0,2} & & & & \\
-p^{L+1}_{-1,2} & 1 & -p^{L+1}_{0,0} & & & & \\
\lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} & & \\
 & & -p^{L+1}_{0,2} & 1 & -p^{L+1}_{1,0} & \ddots & \\
 & & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} & \ddots & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & \ddots & \lambda_{2^L m-1,2^{L+1}m} \\
 & & & & & \ddots & -p^{L+1}_{2^L m-1,0} \\
 & & & & & & \lambda_{2^L m,2^{L+1}m}
\end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Из представления (16) находим:

$$\left[\boldsymbol{P}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}}\right]^{-1} = P\left[\boldsymbol{P}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}}\right]^{\prime -1}.$$

Из предыдущего равенства следует, что для нахождения матрицы $\left[\boldsymbol{P}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}}\right]^{-1}$ к строкам матрицы (17) требуется применить перестановку обратную к (15), т.е. перестановку σ^{-1}, в которой записи образа и прообраза поменяны местами. Отсюда получаем искомое представление (13). $\square$

Для вектора, состоящего из коэффициентов аппроксимации, введем обозначение $\boldsymbol{c}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(c^L_0, c^L_1, \ldots, c^L_{2^L m}\right)^T$, где через T обозначена операция транспонирования. Запишем выражение (1) в векторном виде:

$$s^L(t) = \boldsymbol{\phi}^L(t)\,\boldsymbol{c}^L.$$

Вейвлет-коэффициенты аппроксимации обозначим через d^L_i, $i=0,1,\ldots,2^L m-1$, и введем вектор $\boldsymbol{d}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(d^L_0, d^L_1, \ldots, d^L_{2^L m-1}\right)^T$.

Ввиду разложения (3), любая функция из пространства V^{L+1} может быть записана в виде суммы некоторой функции из пространства V^L и некоторой функции из пространства W^L, причем справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} s^{L+1}(t) &= \boldsymbol{\phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{c}^{L+1} = \boldsymbol{\phi}^L(t)\,\boldsymbol{c}^L + \boldsymbol{\Psi}^L(t)\,\boldsymbol{d}^L \\ &= \boldsymbol{\phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{P}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}}\,\boldsymbol{c}^L + \boldsymbol{\phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{Q}^{L+1}_{\boldsymbol{\Psi}}\,\boldsymbol{d}^L. \end{aligned}$$

Пусть известны коэффициенты $\boldsymbol{c}^L$ и $\boldsymbol{d}^L$. Тогда коэффициенты $\boldsymbol{c}^{L+1}$ могут быть получены из коэффициентов $\boldsymbol{c}^L$ и $\boldsymbol{d}^L$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^{L+1} &= \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\,\boldsymbol{c}^L + \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\,\boldsymbol{d}^L = \left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]\left[\frac{\boldsymbol{c}^L}{\boldsymbol{d}^L}\right] \\ &= \left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1} - \boldsymbol{P}^{L+1}\boldsymbol{G}^{L+1}\right]\left[\frac{\boldsymbol{c}^L}{\boldsymbol{d}^L}\right].\end{aligned} \tag{18}$$

Формулы (18) называются формулами *реконструкции*, а матрицы $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}$ и $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}$ называются *фильтрами реконструкции.*

Рассмотрим обратный процесс разбиения известных коэффициентов $\boldsymbol{c}^{L+1}$ на более грубую версию $\boldsymbol{c}^L$ и уточняющие коэффициенты $\boldsymbol{d}^L$, который определяется матричными уравнениями

$$\boldsymbol{c}^L = \boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\boldsymbol{c}^{L+1}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{d}^L = \boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\boldsymbol{c}^{L+1}, \tag{20}$$

где матрицы $\boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}$ размеров $(2^L m + 1) \times (2^{L+1} m + 1)$ и $\boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}$ размеров $2^L m \times (2^{L+1} m + 1)$ определяются из соотношения (10) следующим образом:

$$\left[\boldsymbol{\phi}^L \mid \boldsymbol{\Psi}^L\right]\left[\frac{\boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}{\boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}\right] = \boldsymbol{\phi}^{L+1}. \tag{21}$$

Формулы (19)–(20) называются формулами *декомпозиции*, матрица $\left[\frac{\boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}{\boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}\right]$ — матрицей *декомпозиции (анализа)*, а матрицы $\boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}$ и $\boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}$ — *фильтрами декомпозиции.*

Матрицы в формулах (19) и (20) — это именно те матрицы (13), которые уже встречались ранее. Из соотношений (10) и (21) имеем:

$$\left[\frac{\boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}{\boldsymbol{B'}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}\right] = \left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}\right]^{-1} = \left[\frac{\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}{\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\Psi}}^{L+1}}\right] = \left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1} + \boldsymbol{G}^{L+1}\boldsymbol{B}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right], \tag{22}$$

где

$$\left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]^{-1}$$

$$
= \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-p^{L+1}_{-1,2} & 1 & -p^{L+1}_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -p^{L+1}_{0,2} & 1 & -p^{L+1}_{1,0} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -p^{L+1}_{2^L m-2,2} & 1 & -p^{L+1}_{2^L m-1,0}
\end{array}\right].
$$

Операция, зададаваемая последним равенством в соотношениях (18) и (22), называется *операцией подъема (обновления)* в схеме лифтинга.

§5. Лифтинговая модификация сплайн-вейвлетов со смещенным носителем

Теперь рассмотрим другой вариант (см. [5]) выбора базисных функций в пространстве W^L, заключающийся в использовании базисных функции из пространства V^{L+1} с центрами в четных узлах, при дополнительно накладываемом условии обнуления сплайна в последнем узле на отрезке $[a, b]$. В этом случае будем считать, что сплайн равен нулю при условии равенства нулю его значений на обоих концах одного элементарного сеточного интервала. Тогда соответствующие базисные функции удаляются из базисов рассматриваемых пространств V^{L+1}, V^L, W^L. Снабдим обозначения рассматриваемых пространств индексом «0»:

$$
V_0^L \stackrel{\text{def}}{=} V_0^L(\Delta^L) = \left\{ S^L \mid S^L(t) = \sum_{j=0}^{2^L m-1} C_j^L \, \phi_j^L(t) \ \ \forall\, C_j^L \in \mathbb{R}^1, t \in [a, b] \right\}, \tag{23}
$$

$$
\dim V_0^L = 2^L m.
$$

Тогда $\dim W_0^L = 2^L m$, и выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств:

$$
\dim V_0^{L+1} = \dim V_0^L + \dim W_0^L.
$$

Составим из сплайн-функций ϕ_j^L, $j = 0, \ldots, 2^L m - 1$, вектор-строку $\mathbf{\Phi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\phi_0^L, \phi_1^L, \ldots, \phi_{2^L m-1}^L\right)$. Тогда существует матрица *уточняющей реконструкции масштабирующих функций* (или матрица *последовательного деления*) $\mathfrak{P}^{L+1}$ размеров $2^{L+1}m \times 2^L m$ такая, что

$$\mathbf{\Phi}^L = \mathbf{\Phi}^{L+1}\,\mathfrak{P}^{L+1}, \tag{24}$$

где элементы столбцов составлены из коэффициентов калибровочных соотношений (2), с учетом того, что в каждом из пространств удалено по одной базисной функции:

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \phi_0^{L+1}(t) + p_{-1,2}^{L+1}\,\phi_1^{L+1}(t), & j = 0, \\ p_{j-1,0}^{L+1}\,\phi_{2j-1}^{L+1}(t) + p_{j-1,1}^{L+1}\,\phi_{2j}^{L+1}(t) & \\ \qquad +p_{j-1,2}^{L+1}\,\phi_{2j+1}^{L+1}(t), & j = 1, \ldots, 2^L m - 1. \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, матрица $\mathfrak{P}^{L+1}$ является подматрицей матрицы (5), т.е.

$$\boldsymbol{P}^{L+1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathfrak{P}^{L+1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & p_{2^L m,0}^{L+1} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right].$$

В силу калибровочных соотношений (25), справедливо вложение $V_0^L \subset V_0^{L+1}$; следовательно, аналогично (3), верно вейвлетное разложение

$$V_0^{L+1} = V_0^L \dotplus W_0^L. \tag{26}$$

Базисные вейвлет-функции обозначим через

$$\Theta_i^L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{2i}^{L+1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1, \tag{27}$$

и введем вектор-строку $\mathbf{\Theta}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\Theta_0^L, \Theta_1^L, \ldots, \Theta_{2^L m-1}^L\right)$.

Поскольку пространство вейвлетов W_0^L по определению является подпространством V_0^{L+1}, можно представить вейвлет-функции Θ_i^L в виде линейной комбинации масштабирующих функций ϕ_j^{L+1}. Таким образом, существует матрица *уточняющей реконструкции вейвлет-функций* $\mathfrak{Q}^{L+1}$ размеров $2^{L+1}m \times 2^L m$ такая, что

$$\mathbf{\Theta}^L = \mathbf{\Phi}^{L+1}\,\mathfrak{Q}^{L+1}, \tag{28}$$

где матрица $\mathfrak{Q}^{L+1}$ является подматрицей матрицы (7), т.е.

$$\boldsymbol{Q}^{L+1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \ldots & 0 \\ \hline & & \\ & \mathfrak{Q}^{L+1} & \\ & & \end{array}\right].$$

Запишем представления (24) и (28) в виде единого калибровочного соотношения для масштабирующих функций и вейвлетов:

$$\left[\boldsymbol{\Phi}^L \mid \boldsymbol{\Theta}^L\right] = \boldsymbol{\Phi}^{L+1}\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]. \tag{29}$$

Матрица $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]$ называется матрицей *реконструкции (синтеза)*.

Ввиду ограничений на базисы рассматриваемых пространств, улучшить полученные вейвлеты вычитанием соседних масштабирующих функций более грубого разрешения не получится. Поэтому будем вычитать масштабирующие функции того же разрешения.

Определим новые базисные вейвлет-функции по формулам

$$\begin{aligned} \Upsilon_i^L(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \Theta_i^L(t) - \mu_i^{L+1}\phi_{2i-1}^{L+1}(t) - \nu_{i+1}^{L+1}\phi_{2i+1}^{L+1}(t) \\ &= \phi_{2i}^{L+1}(t) - \mu_i^{L+1}\phi_{2i-1}^{L+1}(t) - \nu_{i+1}^{L+1}\phi_{2i+1}^{L+1}(t), \end{aligned} \tag{30}$$

$i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1$, и потребуем сохранения первых двух моментов, т.е.

$$\int_a^b \Upsilon_i^L(t)\,dt = 0, \qquad \int_a^b t\Upsilon_i^L(t)\,dt = 0.$$

Отсюда находим

$$\mu_i^{L+1} = \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{2i}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{2i}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{2i-1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{2i-1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \end{vmatrix},$$

$$\nu_{i+1}^{L+1} = \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{2i-1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{2i}^{L+1}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{2i-1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{2i}^{L+1}(t)\,dt \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \int_a^b \phi_{2i-1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b \phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \\ \int_a^b t\,\phi_{2i-1}^{L+1}(t)\,dt & \int_a^b t\,\phi_{2i+1}^{L+1}(t)\,dt \end{vmatrix},$$

где $i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1$.

Будем считать, что коэффициент $\mu_0^{L+1} = 0$, причем он «обнуляет» соответствующую функцию, перед которой встречается.

Из коэффициентов μ_i^{L+1} и ν_{i+1}^{L+1} составим матрицу $\mathfrak{G}^{L+1}$ размеров $(2^{L+1}m) \times 2^L m$:

$$\mathfrak{G}^{L+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \nu_1^{L+1} & \mu_1^{L+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2^{L+1} & \mu_2^{L+1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_{2^L m-1}^{L+1} & \mu_{2^L m-1}^{L+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_{2^L m}^{L+1} \end{bmatrix}.$$

Запишем новые вейвлет-функции (30) в вектор-строку

$$\boldsymbol{\Upsilon}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\Upsilon_0^L, \Upsilon_1^L, \dots, \Upsilon_{2^L m-1}^L\right).$$

Ввиду представления (28), справедлива цепочка равенств

$$\boldsymbol{\Upsilon}^L = \boldsymbol{\Theta}^L - \boldsymbol{\Phi}^{L+1}\mathfrak{G}^{L+1} = \boldsymbol{\Phi}^{L+1}\left(\mathfrak{Q}^{L+1} - \mathfrak{G}^{L+1}\right). \tag{31}$$

Тогда единое калибровочное соотношение, аналогичное (29), для тех же масштабирующих функций и новых вейвлетов имеет вид

$$\left[\boldsymbol{\Phi}^L \mid \boldsymbol{\Upsilon}^L\right] = \boldsymbol{\Phi}^{L+1}\left[\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\right], \tag{32}$$

где матрица реконструкции новых вейвлетов определяется из матрицы $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]$ равенством

$$\left[\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1} - \mathfrak{G}^{L+1}\right].$$

Вводя обозначение $\boldsymbol{C}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(C_0^L, C_1^L, \dots, C_{2^L m-1}^L\right)^T$ для вектора, состоящего из коэффициентов аппроксимации, запишем (23) в векторном виде как

$$S^L(t) = \boldsymbol{\Phi}^L(t)\,\boldsymbol{C}^L.$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации обозначим через D_i^L, $i = 0, 1, \dots, 2^L m - 1$, и введем вектор

$$\boldsymbol{D}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(D_0^L, D_1^L, \dots, D_{2^L m-1}^L\right)^T.$$

Ввиду разложения (26), любая функция из пространства V_0^{L+1} может быть записана в виде суммы некоторой функции из пространства V_0^L и некоторой функции из пространства W_0^L, причем справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} S^{L+1}(t) &= \boldsymbol{\Phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{C}^{L+1} = \boldsymbol{\Phi}^{L}(t)\,\boldsymbol{C}^{L} + \boldsymbol{\Upsilon}^{L}(t)\,\boldsymbol{D}^{L} \\ &= \boldsymbol{\Phi}^{L+1}(t)\,\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\,\boldsymbol{C}^{L} + \boldsymbol{\Phi}^{L+1}(t)\,\mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\,\boldsymbol{D}^{L}. \end{aligned} \tag{33}$$

Пусть известны коэффициенты $\boldsymbol{C}^L$ и $\boldsymbol{D}^L$. Тогда коэффициенты $\boldsymbol{C}^{L+1}$ могут быть получены из коэффициентов $\boldsymbol{C}^L$ и $\boldsymbol{D}^L$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}^{L+1} &= \mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\,\boldsymbol{C}^{L} + \mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\,\boldsymbol{D}^{L} \\ &= \left[\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^L \\ \hline \boldsymbol{D}^L \end{bmatrix} = \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1} - \mathfrak{G}^{L+1}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^L \\ \hline \boldsymbol{D}^L \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{34}$$

Формулы (34) называются формулами *реконструкции*, а матрицы $\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}$ и $\mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}$ называются *фильтрами реконструкции*.

Заметим, что матрица реконструкции

$$\left[\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\Upsilon}}^{L+1}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_{-1,2}^{L+1} & p_{0,0}^{L+1} & 0 & \dots & 0 & -\nu_1 & -\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & p_{0,2}^{L+1} & p_{1,0}^{L+1} & \dots & 0 & 0 & -\nu_2 & -\mu_2 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & p_{1,2}^{L+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & -\nu_3 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & p_{2^Lm-3,0}^{L+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & p_{2^Lm-3,2}^{L+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_{2^Lm-1}^{L+1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\nu_{2^Lm}^{L+1}
\end{array}\right]$$

разрежена, однако обратная к ней матрица разреженную структуру теряет. Поэтому мы не будем формулировать в явном виде аналог теоремы 2, а вместо этого будем работать с некоторой более простой обратной матрицей.

Рассмотрим равенство (24) покомпонентно. Разделим базисные функции $(L+1)$-го уровня на две группы. Те функции, которые на сетке Δ^{L+1} имеют центр в узле сетки Δ^L, соберем в вектор-строку $\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\phi_0^{L+1}, \phi_2^{L+1}, \ldots, \phi_{2^{L+1}m-2}^{L+1}\right)$. Вообще говоря, это и есть вейвлеты (27), т.е. $\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1} = \mathbf{\Theta}^L$. Оставшиеся базисные функции $(L+1)$-го уровня соберем в вектор-строку $\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\phi_1^{L+1}, \phi_3^{L+1}, \ldots, \phi_{2^{L+1}m-1}^{L+1}\right)$. Матрицу, которая соответствует перестановке, переводящей вектор-столбец $\left[\mathbf{\Phi}^{L+1}\right]^T$ в вектор-столбец $\left[\dfrac{\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1}}{\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1}}\right]$, обозначим через $\mathfrak{T}$. Тогда из равенства (24) следует, что

$$\mathbf{\Phi}^L = \mathbf{\Phi}^{L+1}\,\mathfrak{T}^T\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{P}^{L+1} = \left[\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \mid \mathbf{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1}\right]\left[\frac{\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1}}{\mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}^{L+1}}\right], \tag{35}$$

где матрица $\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1}$ размеров $2^L m \times 2^L m$ имеет вид

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1} = \left[\begin{array}{cccccc} p_{-1,2}^{L+1} & p_{0,0}^{L+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_{0,2}^{L+1} & p_{1,0}^{L+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{2^L m-3,2}^{L+1} & p_{2^L m-2,0}^{L+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{2^L m-2,2}^{L+1} \end{array}\right],$$

причем обратная к ней матрица $\left[\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1}\right]^{-1}$ уже является не плотной, а верхней треугольной.

Поскольку $\mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}^{L+1} = I$, где I — единичная матрица размеров $2^L m \times 2^L m$, то из (35) выводим

$$\mathbf{\Phi}^L = \mathbf{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1} + \mathbf{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1}\,\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1}. \tag{36}$$

Отсюда получаем новое представление единого калибровочного соотношения (29) для вейвлетов $\mathbf{\Theta}^L$:

$$\left[\mathbf{\Phi}^L \mid \mathbf{\Theta}^L\right] = \left[\mathbf{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \mid \mathbf{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1}\right]\left[\begin{array}{cc} \mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1} & O \\ I & I \end{array}\right], \tag{37}$$

где O — нулевая матрица размеров $2^L m \times 2^L m$. Обратная матрица к матрице реконструкции в представлении (37) есть

$$\left[\begin{array}{cc} \mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1} & O \\ I & I \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \left[\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1}\right]^{-1} & O \\ -\left[\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1}\right]^{-1} & I \end{array}\right].$$

Воспользуемся, как и ранее, перестановочной матрицей $\mathfrak{T}$. Тогда из равенства (31) получаем

$$\boldsymbol{\Upsilon}^L = \boldsymbol{\Theta}^L - \boldsymbol{\Phi}^{L+1}\,\mathfrak{T}^T\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{G}^{L+1} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1} - \left[\boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \mid \boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1}\right]\left[\frac{\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1}}{\mathfrak{G}_{\mathfrak{o}}^{L+1}}\right], \quad (38)$$

где матрица $\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1}$ размеров $2^L m \times 2^L m$ имеет вид

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} = \begin{bmatrix} \nu_1^{L+1} & \mu_1^{L+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2^{L+1} & \mu_2^{L+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_{2^L m-1}^{L+1} & \mu_{2^L m-1}^{L+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_{2^L m}^{L+1} \end{bmatrix},$$

а матрица $\mathfrak{G}_{\mathfrak{o}}^{L+1}$ тех же размеров оказывается нулевой, $\mathfrak{G}_{\mathfrak{o}}^{L+1} = O$. Поэтому, продолжая цепочку равенств (38), находим

$$\boldsymbol{\Upsilon}^L = \boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1} - \boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1}\,\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1}. \quad (39)$$

Объединяя формулы (36) и (39), получаем новое представление единого калибровочного соотношения (32):

$$\left[\boldsymbol{\Phi}^L \mid \boldsymbol{\Upsilon}^L\right] = \left[\boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \mid \boldsymbol{\Phi}_{\mathfrak{o}}^{L+1}\right]\begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1} & -\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \\ I & I \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Применяя, например, дополнение по Шуру, можно найти обратную матрицу к матрице реконструкции в представлении (40):

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1} & -\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \\ I & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}^{L+1} & \mathfrak{M}^{L+1}\,\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \\ -\mathfrak{M}^{L+1} & I - \mathfrak{M}^{L+1}\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathfrak{M}^{L+1} & O \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица $\mathfrak{M}^{L+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1} + \mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1}\right]^{-1}$ является верхней треугольной.

Теперь из равенства (33) и нового единого калибровочного соотношения (40) легко получаются формулы реконструкции для известных коэффициентов $\boldsymbol{C}^L$ и $\boldsymbol{D}^L$

$$\left[\frac{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{n}}^{L+1}}{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{o}}^{L+1}}\right] = \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}^{L+1} & -\mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \\ I & I \end{bmatrix}\left[\frac{\boldsymbol{C}^L}{\boldsymbol{D}^L}\right],$$

$$\boldsymbol{C}^{L+1} = \mathfrak{T}^T \left[\frac{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{n}}^{L+1}}{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{o}}^{L+1}} \right],$$

и формулы декомпозиции для известных коэффициентов $\boldsymbol{C}^{L+1}$

$$\left[\frac{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{n}}^{L+1}}{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{o}}^{L+1}} \right] = \mathfrak{T}\, \boldsymbol{C}^{L+1},$$

$$\left[\frac{\boldsymbol{C}^{L}}{\boldsymbol{D}^{L}} \right] = \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{M}^{L+1} & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathfrak{G}_{\mathfrak{n}}^{L+1} \\ O & I \end{bmatrix} \left[\frac{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{n}}^{L+1}}{\boldsymbol{C}_{\mathfrak{o}}^{L+1}} \right].$$

Полученная форма записи вейвлет-преобразования с новым улучшенным базисом соответсвует схеме лифтинга.

Список литературы

1. Ю. К. Демьянович, *Сплайн-вэйвлеты при однократном локальном укрупнении сетки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 97–118.
2. Ю. К. Демьянович, А. С. Пономарев, *О реализации сплайн-всплескового разложения первого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 33–73.
3. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам.* — М.-Ижевск., 2004.
4. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* — М., 1980.
5. О. М. Косогоров, А. А. Макаров, С. В. Макарова, *О матричном представлении фильтров, соответствующих сплайн-вейвлетам со смещенным носителем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 156–168.
6. Л. П. Лившиц, А. А. Макаров, С. В. Макарова, *О квазилинейной интерполяции минимальными сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **524** (2023), 94–111.
7. А. А. Макаров, *О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка.* — Пробл. матем. анал. **38** (2008), 47–60.
8. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* — Пробл. матем. анал. **60** (2011), 25–38.
9. А. А. Макаров, *Алгоритмы вэйвлетного уточнения пространств сплайнов первого порядка.* — Труды СПИИРАН **19** (2011), 203–220.
10. А. А. Макаров, *Алгоритмы вэйвлетного сжатия пространств линейных сплайнов.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. **2** (2012), 41–51.
11. А. А. Макаров, *О двух алгоритмах вейвлет-разложения пространств линейных сплайнов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 277–293.
12. А. А. Макаров, С. В. Макарова, *О блоке фильтров в сплайн-вейвлетном преобразовании на неравномерной сетке.* — Сиб. ж. вычисл. матем. **3** (2021), 299–311.
13. Э. Столниц , Т. ДеРоуз , Д. Салезин, *Вейвлеты в компьютерной графике.* — Ижевск, 2002.

14. С. Уэлстид, *Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии.* — М., 2003.
15. Б. М. Шумилов, *Алгоритмы с расщеплением вейвлет-преобразования сплайнов первой степени на неравномерных сетках.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **56**, No. 7 (2016), 1236–1247.
16. J. Carnicer, W. Dahmen, J. Peña, *Local decomposition of refinable spaces and wavelets.* — Appl. Comput. Harmonic Analys. **3** (1996), 127–153.
17. G. Faber, *Über stetige functionen.* — Math. Ann. **66** (1908), 81–94.
18. M. Lounsbery, T. De Rose, J. Warren, *Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type.* — ACM Trans. Graphics **16**, No. 1 (1997), 34–73.
19. T. Lyche, K. Mørken, F. Pelosi, *Stable, linear spline wavelets on nonuniform knots with vanishing moments.* — Comput. Aided Geom. Design **26** (2009), 203–216.
20. A. Makarov, S. Makarova, *On lazy Faber's type decomposition for linear splines.* — AIP Conf. Proc. **2164** (2019), 110006.
21. S. Makarova, A. Makarov, *On linear spline wavelets with shifted supports.* — Lect. Notes Comp. Sci. **11974** (2020), 430–437.
22. W. Sweldens, P. Schröder, *Building your own wavelets at home.* — Wavelets in Computer Graphics ACM SIGGRAPH Course notes (1996), 15–87.

Makarov A. A., Makarova S. V. Lifting modifications of spline wavelets with unshifted and shifted supports.

The paper considers systems of embedded spaces of minimal splines on nonuniform grids. In order to improve the averaging properties of spline wavelets with unshifted and shifted supports, lifting modifications using a linear combination of scaling functions of a coarser or the same resolution level are applied. Simple decomposition and reconstruction formulas, which allow for an efficient computer implementation, are obtained.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ",
ул. Профессора Попова, 5,
197022, С.-Петербург, Россия
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

Поступило 21 октября 2024 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: st122359@student.spbu.ru