Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 534, 2024 г.

Л. Ю. Колотилина

SSDD МАТРИЦЫ И ИХ СООТНОШЕНИЯ С ДРУГИМИ ПОДКЛАССАМИ КЛАССА НЕВЫРОЖДЕННЫХ $\mathcal{H}$-МАТРИЦ

§1. Введение и предварительные сведения

В последние годы были опубликованы многочисленные статьи, посвященные определению и изучению различных матричных классов, содержащих класс матриц со строгим диагональным преобладанием (Strictly Diagonally Dominant, SDD матриц) и содержащихся в классе невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, см., например, [1–6,8,9,13–24,26,29,31] и приведенные в них ссылки.

В данной работе мы вводим в рассмотрение новый класс матриц, называемых SSDD (Schur-SSD) матрицами. Этот класс естественным образом возникает в контексте невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и оказывается подклассом этого класса. Кроме того, наряду с SDD матрицами класс SSDD матриц также содержит и ряд более широких подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц, активно изучавшихся в последние годы. Среди таких подклассов мы упомянем классы матриц Дашница–Зусмановича (DZ) [1, 5], матриц типа Дашница–Зусмановича (DZ-type, или DZT) [31], матриц Островского–Брауэра (OB) [11,25], SOB матриц [20], матриц типа CKV (CKV-type, или CKVT) [14], S-SDD матриц [15, 19, 28], SDD_1 [8, 26] и SDD_k [29] матриц, а также классы GSDD_1 и GSDD_1^* матриц [9,18]. С другой стороны, как будет показано ниже, SSDD матрицы сами образуют подкласс класса обобщенных матриц Некрасова (GN) [6], класса SD-SDD матриц [9], и класса PH-матриц [21].

Определение SSDD матрицы, основанное на выделении некоторого подмножества множества ее строк, обладающих строгим диагональным преобладанием, и требованием того, чтобы соответствующее дополнение по Шуру матрицы сравнения было бы SDD матрицей, будет приведено в следующем §2. В этом же параграфе мы специфицируем

Ключевые слова: SSDD матрицы, $\mathcal{H}$-матрицы, SDD матрицы, S-SDD матрицы, SDD_k матрицы, GSDD_1 матрицы, PH-матрицы, SD-SDD матрицы, l_∞-норма обратной матрицы, верхние оценки.

используемые обозначения и основные определения, а также напоминаем некоторые известные результаты, используемые в дальнейшем.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 1$. Через $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$ мы обозначаем множество индексов, и если S – подмножество множества $\langle n\rangle$, то $\bar S = \langle n\rangle\backslash S$ – дополнение S в $\langle n\rangle$; $|S|$ обозначает мощность множества S. Через

$$r_i(A) = \sum_{j\in\langle n\rangle\backslash\{i\}} |a_{ij}|, \quad i = 1,\dots,n,$$

обозначаются абсолютные строчные суммы матрицы A;

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, \quad j \neq i.$$

Также мы полагаем

$$r_i^S(A) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} |a_{ij}|, & i\in S,\\ \sum\limits_{j\in S} |a_{ij}|, & i\notin S. \end{cases}$$

Через

$$R_A = \{i \in \langle n\rangle : \ |a_{ii}| > r_i(A)\}$$

мы обозначаем множество номеров строк матрицы A, имеющих строгое диагональное преобладание. Через $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j,\\ -|a_{ij}|, & i\neq j, \end{cases}$$

обозначается матрица сравнения для A.

Следуя [26], мы используем обозначение

$$p_i(A) = \sum_{j\in R_A\backslash\{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\overline{R_A}}(A), \quad i = 1,\dots,n.$$

Если $S, T \subseteq \langle n\rangle$ – непустые подмножества множества $\langle n\rangle$, то $A[S,T] = (a_{ij})_{\substack{i\in S\\ j\in T}}$ – это прямоугольная подматрица матрицы A, образованная строками с номерами из S и столбцами с номерами из T; главная подматрица $A[S,S]$ также обозначается через $A[S]$.

Пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$. Тогда через A/S мы обозначаем дополнение по Шуру подматрицы $A[S]$ в A, т.е.

$$A/S = A[\bar S] - A[\bar S, S]A[S]^{-1}A[S,\bar S],$$

естественно, в предположении, что подматрица $A[S]$ обратима.

Через I_n (или просто I) обозначается единичная матрица порядка $n \geqslant 1$.

$e^{(n)} = e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор порядка $n \geqslant 1$.

Векторные и матричные неравенства понимаются покомпонентно.

На протяжении данной работы используются следующие определения.

Определение 1.1. *Говорят, что матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *имеет строгое диагональное преобладание, или является SDD (Strictly Diagonally Dominant) матрицей, если*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 1.2 ([11,25])**.** *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *называется матрицей Островского–Брауэра (OB матрицей), если*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A), \quad i \neq j, \quad i,j = 1, \dots, n.$$

Некоторые авторы, следуя [22], называют OB матрицы DSDD (Doubly Strictly Diagonally Dominant) матрицами.

Определение 1.3 ([20])**.** *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *не имеющая нулевых строк, называется SOB (Sparse Ostrowski–Brauer) матрицей, если*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A), \quad \text{для} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0.$$

Определение 1.4 ([15,28])**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subset \langle n \rangle$ *– непустое подмножество множества индексов. Матрица* A *называется* S*-SDD (*S*-Strictly Diagonally Dominant) матрицей, если выполнены следующие два условия:*

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \;\; i \in S$$

и

$$\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\right] > r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A)$$
$$\text{для всех} \;\; i \in S \;\; \text{и всех} \;\; j \in \bar S.$$

Замечание 1.1. Следуя [9], в определении 1.4 мы допускаем равенство $S = \langle n \rangle$, так что SDD матрицы могут рассматриваться как $\langle n \rangle$-SDD матрицы.

Заметим, что матрицы, которые мы здесь называем S-SDD матрицами, впервые появились в работе [19], где было показано, что они являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. По сути тот же матричный класс рассматривался также в работах [2, 3, 24] и [23].

Определение 1.5 ([1], также см. [5]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется DZ матрицей, если существует такой индекс $i \in \langle n\rangle$, что для всех $j \neq i$, $j \in \langle n\rangle$, выполняется неравенство*

$$|a_{ii}| \left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right] > |a_{ji}|\, r_i(A). \tag{1.1}$$

Определение 1.6 ([31]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется DZT матрицей, если для каждого $j \in \langle n\rangle$ найдется такой индекс $i_j \neq j$, что*

$$|a_{i_j i_j}| \Big(|a_{jj}| - r_j^{i_j}(A)\Big) > |a_{j i_j}|\, r_{i_j}(A).$$

Заметим, что, как показано в статье [5], матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является DZT матрицей, если условие (1.1) выполнено для каждого $j \notin R_A$ при некотором $i_j \neq j$, необходимо принадлежащем R_A.

Класс DZT матриц содержится в более общем классе CKVT матриц, введенном в работе [14]. Представленное ниже определение эквивалентно исходному, но представлено в несколько другой, более простой форме.

Определение 1.7 ([14]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется CKVT (CKV-type) матрицей, если либо $R_A = \langle n\rangle$, т.е. A – SDD матрица, либо для каждого $j \in \overline{R_A}$ найдется такое подмножество $S_j \subseteq R_A$, что*

$$\Big[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\Big] \Big[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\Big] > r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S_j.$$

SDD_1 матрицы, представляющие собой обобщение SDD матриц, определяются следующим образом.

Определение 1.8 ([26]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется SDD_1 матрицей, если*

$$|a_{ii}| > p_i(A) \quad \text{для всех} \quad i \notin R_A.$$

Недавно было предложено следующее обобщение SDD_1 матриц.

Определение 1.9 ([29]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется SDD_k матрицей, $k \geqslant 1$, если*

$$|a_{ii}| > p_i^{(k)}(A) \quad \textit{для всех} \quad i \notin R_A,$$

где $p_i^{(1)}(A) = p_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$, и при $k \geqslant 2$

$$p_i^{(k)}(A) = \sum_{j\in R_A\setminus\{i\}} |a_{ij}| \frac{p_j^{(k-1)}(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\overline{R_A}}(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Еще одно обобщение SDD_1 матриц приводится в следующем определении.

Определение 1.10 ([18]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, для которой $R_A \neq \varnothing$, называется $GSDD_1$ матрицей, если выполнены следующие два условия:*

$$r_i(A) > p_i^{R_A}(A) \quad \textit{для всех} \quad i \in R_A$$

и

$$\Big[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)\Big] \Big[|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)\Big] > r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A)$$
$$\textit{для всех} \;\; i \in R_A \quad \textit{и всех} \;\; j \in \overline{R_A},$$

где

$$p_k^{R_A}(A) = \sum_{j\in R_A\setminus\{k\}} |a_{kj}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad k \in \langle n\rangle.$$

Отметим, что в исходном определении, данном в работе [18], предположение о том, что $R_A \neq \varnothing$, отсутствует; его необходимость была указана в [9], где было предложено следующее альтернативное определение обобщенных SDD_1 матриц.

Определение 1.11 ([9]). *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется $GSDD_1^*$ матрицей, если*

$$|a_{jj}| > r_j^{\overline{R_A}}(A) \quad \textit{для всех} \;\; j \in \overline{R_A}$$

и

$$\Big[r_i(A) - p_i^{R_A}(A)\Big] \Big[|a_{jj}| - r_j^{\overline{R_A}}(A)\Big] > r_i^{\overline{R_A}}(A)\, p_j^{R_A}(A)$$
$$\textit{для всех} \quad i \in R_A \quad \textit{и всех} \;\; j \in \overline{R_A}.$$

Заметим, что в том случае, когда $R_A \neq \varnothing, \langle n\rangle$, классы $\{\mathrm{GSSD}_1\}$ и $\{\mathrm{GSDD}_1^*\}$ совпадают.

Как будет показано ниже, все определенные выше матричные классы оказываются подклассами класса SSDD матриц. Напротив, классы матриц, определения которых приводятся ниже, содержат класс SSDD матриц.

Определение 1.12 ([9]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть S – непустое подмножество множества $\langle n\rangle$. Матрица A называется SD-SDD матрицей, если найдется такая невырожденная диагональная матрица $D = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, где $d_i = 1$ для $i \in \bar{S}$, что отмасштабированная матрица $B = AD$ является S-SDD матрицей.*

Ясно, что класс SD-SDD матриц содержит класс S-SDD матриц, класс GSDD_1 матриц A таких, что $R_A \neq \varnothing$, а также и класс GSDD_1^* матриц A таких, что $R_A \neq \langle n\rangle$. С другой стороны, поскольку (см., например, [15]) S-SDD матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами, то и SD-SDD образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Определение 1.13 ([21]). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть*

$$\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^{s} S_i \tag{1.2}$$

– разбиение множества индексов на s, $1 \leqslant s \leqslant n$, непустых непересекающихся подмножеств. Обозначим

$$A^{(i_1,\dots,i_s)} := \begin{pmatrix} |a_{i_1 i_1}| - r_{i_1}^{S_1}(A) & -r_{i_1}^{S_2}(A) & \cdots & -r_{i_1}^{S_s}(A) \\ -r_{i_2}^{S_1}(A) & |a_{i_2 i_2}| - r_{i_2}^{S_2}(A) & \cdots & -r_{i_2}^{S_s}(A) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -r_{i_s}^{S_1}(A) & -r_{i_s}^{S_2}(A) & \cdots & |a_{i_s i_s}| - r_{i_s}^{S_s}(A) \end{pmatrix},$$

$$i_j \in S_j, \quad j = 1, \dots, s. \tag{1.3}$$

Матрица A называется PH- (Partitioned $\mathcal{H}$-) матрицей относительно разбиения (1.2)*, если все агрегированные матрицы* (1.3) *являются невырожденными $\mathcal{M}$-матрицами.*

В заключение данного параграфа мы напомним некоторые результаты, которые нам потребуются ниже.

Следующая теорема указывает диагональные матрицы, которые преобразуют SDD_k матрицы без строгого диагонального преобладания в SDD матрицы.

Теорема 1.1 ([13, 29]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– это* SDD_k *матрица,* $k \geqslant 1$ *и* $R_A \neq \langle n\rangle$ *и пусть матрица* $B^{(k)}$ *определяется соотношением*

$$B^{(k)} = A\Delta^{(k)},$$

где

$$\Delta^{(k)} = \mathrm{diag}\,\{\delta_1^{(k)},\dots,\delta_n^{(k)}\},\quad \delta_i^{(k)} = \begin{cases} \frac{p_i^{(k-1)}(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon, & i\in R_A,\\ 1, & i\in\overline{R_A},\end{cases}\quad k\geqslant 1,$$

$$p_i^{(0)}(A) = r_i(A),\quad i=1,\dots,n,$$

и $0 < \varepsilon < \min_{i\in\langle n\rangle} \frac{|a_{ii}|-p_i^{(k-1)}(A)}{r_i^{R_A}(A)}$. *Тогда* $B^{(k)}$ *является SDD матрицей.*

Теорема 1.2 ([9, предложения 2.2 и 2.5]). *Матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *такая, что* $R_A \neq \varnothing, \langle n\rangle$, *является* $GSDD_1$ *(или, что то же самое,* $GSDD_1^*$*) матрицей тогда и только тогда, когда матрица* $B = A\Delta_A$, *где*

$$\Delta_A = \mathrm{diag}\,\{\delta_1,\dots,\delta_n\},\quad \delta_i = \begin{cases} \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, & i\in R_A,\\ 1, & i\in\overline{R_A},\end{cases}$$

является R_A*-SDD матрицей.*

Теорема 1.3 ([4, теорема 2.2]). *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^{s} S_i$, $1 \leqslant s \leqslant n$, *– разбиение множества индексов* $\langle n\rangle$ *на* s *непустых непересекающихся подмножеств. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) A *является PH-матрицей относительно рассматриваемого разбиения;*

(ii) $\mathcal{M}(A)v > 0$, *т.е. матрица* A *имеет строгое обобщенное диагональное преобладание с положительным вектором* $v = (v_i)$ *таким, что*

$$v_i = c_j \quad \text{для всех} \quad i\in S_j,\quad j=1,\dots,s.$$

Ниже мы приведем некоторые известные верхние оценки для нормы l_∞ некоторых матриц. Первая из них обобщает классическую верхнюю оценку для $\|A^{-1}\|_\infty$, независимо установленную в работах [10, 27].

Теорема 1.4 ([7,30]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– SDD матрица и пусть* $Q \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $r \geqslant 1$. *Тогда*

$$\|A^{-1}Q\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{r_i(Q)}{|a_{ii}|-r_i(A)}.$$

Теорема 1.5 ([9]). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SD-SDD матрицей для непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$ и пусть $D = \operatorname{diag}\{d_1,\dots,d_n\}$, где $d_i = 1$ при $i \in \bar{S}$, – невырожденная диагональная матрица такая, что $B = (b_{ij}) = AD$ является S-SDD матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S, j\in \bar{S}} \max\left\{\frac{|b_{ii}| - r_i^S(B) + r_j^S(B)}{\Delta_{ij}^S},\ \omega\ \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)}{\Delta_{ij}^S}\right\},$$

где

$$\omega = \max_{i\in S} d_i$$

и

$$\Delta_{ij}^S = \left[|b_{ii}| - r_i^S(B)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] - r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(B), \quad i\in S,\ j\in\bar{S}.$$

Теорема 1.6 ([21]). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, является PH-матрицей относительно разбиения*

$$\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^{s} S_i, \quad 1 \leqslant s \leqslant n,$$

множества индексов $\langle n\rangle$ на s непустых непересекающихся подмножеств. Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_s} \|(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_s)})^{-1}\|_\infty,$$

где максимум берется по всем $i_k \in S_k$, $k = 1,\dots,s$.

Оставшаяся часть работы построена следующим образом. В §2 мы даем определение S-SSDD матриц, где $S \subset \langle n\rangle$, исследуем их свойства, приводим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы матрица являлась S-SSDD матрицей, а также рассматриваем отношения включения, связывающие этот матричный класс с некоторыми другими подклассами класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, содержащими SDD матрицы. Заключительный §3 посвящен верхним оценкам $\|A^{-1}\|_\infty$ для S-SSDD матрицы A.

§2. SSDD матрицы, их свойства и соотношения с некоторыми другими подклассами класса $\mathcal{H}$-матриц

Мы начнем данный параграф с определения SSDD матриц, которые являются основным объектом изучения данной работы.

Определение 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* S – *непустое собственное подмножество множества индексов* $\langle n\rangle$. *Будем говорить, что* A *является* S*-SSDD матрицей, если* $S \subseteq R_A$ *и дополнение по Шуру матрицы сравнения* $\mathcal{M}(A)/S$ *имеет строгое диагональное преобладание. Кроме того, будем говорить, что* A *является SSDD матрицей, если*

$$A \in \{\mathrm{SSDD}\} := \bigcup_{\substack{S\neq\varnothing,\langle n\rangle,\\ S\subseteq R_A}} \{S\text{-SSDD}\},$$

т.е. A *является* S*-SSDD матрицей для некоторого непустого собственного подмножества* $S \subset \langle n\rangle$.

Заметим, что, в соответствии с приведенным выше определением, A является S-SSDD матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является S-SSDD матрицей.

Ясно, что если A – S-SSDD матрица, $\pi \in S_n$ – перестановка степени n, а P_π – соответствующая матрица-перестановка, то $P_\pi A P_\pi^T$ является $\pi(S)$-SSDD матрицей.

Отсюда следует, что если A есть S-SSDD матрица, то, не теряя общности, мы можем предполагать, что она имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A[S] & A[S,\bar S] \\ A[\bar S, S] & A[\bar S] \end{bmatrix}.$$

В этом случае, в соответствии с определением данным в [6], A является блочной 2×2 обобщенной матрицей Некрасова (GN матрицей) и, следовательно, она является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. Отсюда немедленно вытекает, что S-SSDD матрицы образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно, если воспользоваться разложением

$$\mathcal{M}(A) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -|A[\bar S, S]|\mathcal{M}(A[S])^{-1} & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{M}(A[S]) & -|A[S,\bar S]| \\ 0 & \mathcal{M}(A)/S \end{bmatrix}$$

матрицы $\mathcal{M}(A)$ в произведение двух монотонных матриц.

С другой стороны, поскольку для любой SDD матрицы A и произвольного $S \neq \varnothing, \langle n\rangle$ дополнение по Шуру $\mathcal{M}(A)/S$ также является SDD матрицей [12], ясно, что все классы $\{S\text{-SSDD}\}$ содержат класс $\{\mathrm{SDD}\}$.

Следующее свойство SSDD матриц проверяется элементарно.

Предложение 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть Δ – невырожденная диагональная матрица порядка n. Тогда для любого непустого собственного подмножества S множества $\langle n\rangle$ матрицы A и ΔA являются S-SSDD матрицами одновременно, т.е. множество всех S-SSDD матриц инвариантно относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы.*

Для того, чтобы установить еще одно свойство инвариантности S-SSDD матриц, мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$ и пусть матрица $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$B[S] = I_{|S|}, \quad B[\bar{S}] = I_{|\bar{S}|}, \quad B[S,\bar{S}] = 0. \tag{2.1}$$

Тогда $A/S = (BA)/S$.

Доказательство. Переставив, если это необходимо, строки и столбцы матриц A и B, мы можем предполагать, не теряя общности, что

$$A = \begin{bmatrix} A[S] & A[S,\bar{S}] \\ A[\bar{S},S] & A[\bar{S}] \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I_{|S|} & 0 \\ B[\bar{S},S] & I_{|\bar{S}|} \end{bmatrix}.$$

Тогда мы имеем:

$$BA = \begin{bmatrix} A[S] & A[S,\bar{S}] \\ A[\bar{S},S] + B[\bar{S},S]\,A[S] & A[\bar{S}] + B[\bar{S},S]\,A[S,\bar{S}] \end{bmatrix},$$

и желаемое соотношение проверяется непосредственно. □

Поскольку в условиях леммы 2.1 строки с номерами $i \in S$ матриц $\mathcal{M}(A)$ и $B\mathcal{M}(A)$ совпадают, откуда вытекает, что $S \subseteq R_A$ тогда и только тогда, когда $S \subseteq R_{B\mathcal{M}(A)}$, то, применяя лемму 2.1 к матрице $\mathcal{M}(A)$, мы получаем следующее свойство инвариантности S-SSDD матриц.

Предложение 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subseteq R_A$ – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$. Предположим, что матрица $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ удовлетворяет условиям* (2.1)*. Тогда A является S-SSDD матрицей в том и только том случае, когда $B\mathcal{M}(A)$ является S-SSDD матрицей.*

Установим теперь свойство монотонности SSDD матриц.

Предложение 2.3. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, есть S-SSDD матрица, где S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$, и если $S \subset T \subseteq R_A$, $T \neq \langle n\rangle$, то A также является и T-SSDD матрицей.*

Доказательство. Не теряя общности, предположим, что A является $\mathcal{M}$-матрицей. Поскольку $T \subseteq R_A$ по условию, нам остается показать, что A/T является SDD матрицей. По условию, матрица A/S имеет строгое диагональное преобладание. Следовательно, ее дополнение по Шуру $(A/S)/(T \setminus S)$ также имеет строгое диагональное преобладание [12]. Теперь для того, чтобы показать, что A/T есть SDD матрица, остается воспользоваться хорошо известным соотношением

$$A/T = (A/S)/(T \setminus S)$$

(которое легко получается с помощью LU разложения). $\square$

Ниже мы рассмотрим некоторые подклассы класса SSDD матриц. Сперва рассмотрим SSDD матрицы, соответствующие двум частным случаям $|\bar{S}| = 1$ и $|S| = 1$.

В том случае, когда $|\bar{S}| = 1$, по крайней мере $n-1$ строка матрицы A имеет строгое диагональное преобладание, так что условие $\mathcal{M}(A)/S \in \{\text{SDD}\}$, равносильно условию $\mathcal{M}(A)/S \neq 0$, или $\mathcal{M}(A)/S \in \mathcal{H}$. Итак, в данном случае, S-SSDD матрицы – это $\mathcal{H}$-матрицы, имеющие не более одной строки без строгого диагонального преобладания. Такие матрицы рассматривались в статье [17].

В противоположном случае, когда $|S| = 1$ и $S = \{i\}$, $i \in R_A$, условие, что $\mathcal{M}(A)/S$ является SDD матрицей, принимает вид

$$|a_{jj}| - r_j^i(A) > |a_{ii}|^{-1}|a_{ji}|r_i(A) \quad \text{для всех} \quad j \neq i,$$

или

$$|a_{ii}|[|a_{jj}| - r_j^i(A)] > |a_{ji}|r_i(A) \quad \text{для всех} \quad j \neq i, \tag{2.2}$$

что означает, что A есть матрица Дашница–Зусмановича (DZ матрица), см. определение 1.5. Таким образом, *DZ матрицы, удовлетворяющие условию* (2.2) *при* $i \in R_A$, *образуют подкласс класса SSDD матриц.* Как будет показано ниже, в действительности все DZ матрицы являются SSDD матрицами.

Заметим, что OB матрицы заведомо являются DZ матрицами. Действительно, из условия

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A) \quad \text{для всех} \quad i \neq j \tag{2.3}$$

следует, что не более чем одна строка матрицы A может не иметь строгого диагонального преобладания. Если A есть SDD матрица, то условие (2.2) выполняется тривиальным образом. Если же $i \notin R_A$, то для всякого $j \neq i$, используя (2.3) и неравенство $|a_{ii}| \leqslant r_i(A)$, мы выводим:

$$\begin{aligned}|a_{ii}|(|a_{jj}| - r_j^i(A)) &> r_i(A)\, r_j(A) - |a_{ii}| r_j^i(A) \\ &\geqslant (r_j(A) - r_j^i(A))\, r_i(A) = |a_{ji}| r_i(A),\end{aligned}$$

так что A есть DZ матрица. Следовательно, A является и невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, имеющей единственную строку без строгого диагонального преобладания.

Как легко понять, DZ матрицы образуют подкласс класса S-SDD матриц. Следующее предложение утверждает, что для любого непустого собственного подмножества $S \subset \langle n \rangle$ S-SDD матрицы являются SSDD матрицами. В частности, DZ матрицы являются SSDD матрицами.

Предложение 2.4. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – S-SDD матрица, где S – непустое собственное подмножество множества $\langle n \rangle$. Тогда либо $S \subseteq R_A$ и A – это S-SSDD матрица, либо $\bar{S} \subseteq R_A$ и A – это $\bar{S}$-SSDD матрица. Следовательно, всякая S-SDD матрица является SSDD матрицей.*

Доказательство. Из определения 1.4 следует, что A является S-SDD тогда и только тогда, когда она является $\bar{S}$-SDD матрицей и хотя бы одно из множеств S и $\bar{S}$ состоит из строк, имеющих строгое диагональное преобладание. Предположим для начала, что $S \subseteq R_A$. В этом случае, чтобы доказать, что A является S-SSDD матрицей, нужно показать, что

$$\mathcal{M}(A[\bar{S}])e > |A[\bar{S}, S]|\, \mathcal{M}(A[S])^{-1} |A[S, \bar{S}]| e. \tag{2.4}$$

Для этого, используя теорему 1.4, для произвольного $j \in \bar{S}$ мы выводим:

$$\begin{aligned}\left\{|A[\bar{S}, S]|\, \mathcal{M}(A[S])^{-1} |A[S, \bar{S}]| e\right\}_j &\leqslant \left\{|A[\bar{S}, S]| \max_{i\in S} \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}\, e\right\}_j \\ &= \frac{r_{i_0}^{\bar{S}}(A)}{|a_{i_0 i_0}| - r_{i_0}^S(A)} r_j^S(A), \quad \text{где} \quad i_0 \in S.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Поскольку A является S-SDD матрицей, то из (2.5) следует, что

$$\left\{|A[\bar{S},S]|\,\mathcal{M}(A[S])^{-1}|A[S,\bar{S}]|e\right\}_j < |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) = \left\{\mathcal{M}(A[\bar{S}])e\right\}_j \quad \text{для всех} \quad j\in\bar{S}.$$

Этим доказано неравенство (2.4) и установлено, что A есть S-SSDD матрица.

Случай $\bar{S}\subseteq R_A$ рассматривается аналогично. □

Установленные выше результаты можно суммировать в виде следующей цепочки включений:

$$\{\text{SDD}\}\subset\{\text{OB}\}\subset\{\text{DZ}\}\subset\{S\text{-SDD}\}\subset\{\text{SSDD}\}. \tag{2.6}$$

Ниже мы установим еще две цепочки включений, соединяющие SDD матрицы с SSDD матрицами, а именно:

$$\{\text{SDD}\}\subset\{\text{DZT}\}\subset\{\text{CKVT}\}\subset\{\text{SSDD}\} \tag{2.7}$$

и

$$\{\text{SDD}\}\subset\{\text{SOB}\}\subset\{\text{CKVT}\}\subset\{\text{SSDD}\}. \tag{2.8}$$

Заметим сперва, что из определений 1.6 и 1.7 немедленно следует, что DZT матрицы A являются CKVT матрицами при $S_j=\{i_j\}$ для всех $j\in\overline{R_A}$. Следовательно, для доказательства (2.7) и (2.8) остается показать, что $\{\text{SOB}\}\subset\{\text{CKVT}\}\subset\{\text{SSDD}\}$. Первое из этих включений устанавливается в следующем предложении.

Предложение 2.5. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, – SOB матрица, т.е. A не имеет нулевых строк и*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A) \quad \textit{для всех} \quad i\neq j \quad \textit{таких, что} \quad a_{ji}\neq 0. \tag{2.9}$$

Тогда A является CKVT матрицей, причем $S_j=\{i\in R_A : a_{ji}\neq 0\}$, $j\in\overline{R_A}$.

Доказательство. Если A есть SDD матрица, то доказывать нечего.

Поэтому предположим, что $\overline{R_A}\neq\varnothing$. Пусть $j\in\overline{R_A}$. Обозначим

$$S_j=\{i\in\langle n\rangle :\ i\neq j \text{ и } a_{ji}\neq 0\}.$$

Из (2.9) немедленно следует, что $a_{jk}=0$ для всех $k\in\overline{R_A}$, так что $S_j\subseteq R_A$. Таким образом,

$$r_j(A)=r_j^{S_j}(A), \quad r_j^{\overline{S_j}}(A)=0. \tag{2.10}$$

Поскольку, в силу (2.9), $|a_{jj}| > 0$, то, используя (2.10), мы заключаем, что

$$|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A) = |a_{jj}| > 0.$$

Следовательно, для того, чтобы доказать, что A является CKVT матрицей, нам остается показать, что для любого $i \in S_j$ выполнено неравенство

$$\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right] |a_{jj}| > r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A). \tag{2.11}$$

Для этого, используя неравенство из (2.9), соотношение $r_j(A) \geqslant |a_{jj}|$ и (2.10), мы выводим:

$$\begin{aligned} |a_{ii}|\,|a_{jj}| &> \left[r_i^{S_j}(A) + r_i^{\overline{S_j}}(A)\right] r_j(A) \\ &= r_i^{S_j}(A)\, r_j(A) + r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A) \\ &\geqslant r_i^{S_j}(A)|a_{jj}| + r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A). \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (2.11) установлено. $\square$

Для завершения доказательства включений (2.7) и (2.8) остается установить следующий результат.

Предложение 2.6. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – CKVT матрица такая, что для каждого $j \in \overline{R_A}$ неравенство*

$$\left[|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A)\right] > r_i^{\overline{S_j}}(A)\, r_j^{S_j}(A) \tag{2.12}$$

выполняется для некоторого непустого подмножества $S_j \subseteq R_A$ и для всех $i \in S_j$.

Тогда для любого подмножества $T \neq \langle n\rangle$ такого, что

$$\bigcup_{j\in\overline{R_A}} S_j \subseteq T \subseteq R_A,$$

A является T-SSDD матрицей.

Доказательство. В том случае, когда A есть SDD матрица, результат очевиден.

Поэтому предположим, что $\overline{R_A} \neq \varnothing$ и обозначим

$$S = \bigcup_{j\in\overline{R_A}} S_j,$$

откуда следует, что $S \subseteq R_A$. Не теряя общности, предположим, что

$$A = \begin{bmatrix} A[S] & A[S,\bar{S}] \\ A[\bar{S},S] & A[\bar{S}] \end{bmatrix},$$

и определим матрицу

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} I_{|S|} & 0 \\ * & I_{|\bar{S}|} \end{bmatrix},$$

полагая

$$b_{jk} = 0, \quad \text{если} \quad j \in R_A \quad \text{или} \quad j \in \overline{R_A} \text{ и } k \notin S_j, \qquad j \in \bar{S},\, k \in S,$$

и

$$B[j,S_j] = |A[j,S_j]|\,\mathcal{M}(A[S_j])^{-1}, \quad j \in \overline{R_A}.$$

Ясно, что умножение слева матрицы $\mathcal{M}(A)$ на B равносильно блочному исключению ее элементов на позициях (j,k), где $j \in \overline{R_A}$ и $k \in S_j$. Следовательно, для матрицы $C = B\mathcal{M}(A)$ мы имеем

$$r_j(C) = r_j^{\overline{S_j}}(C), \quad j \in \overline{R_A}. \tag{2.13}$$

Теперь мы покажем, что все строки $j \in \overline{R_A}$ матрицы C имеют строгое диагональное преобладание.

Пусть $j \in \overline{R_A}$. Тогда, ввиду (2.13), требуется показать, что

$$|a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A) > |A[j,S_j]|\,\mathcal{M}(A[S_j])^{-1}|A[S_j,\overline{S_j}]|e. \tag{2.14}$$

Поскольку $A[S_j]$ является SDD матрицей, то, по теореме 1.4, мы имеем

$$\mathcal{M}(A[S_j])^{-1}|A[S_j,\overline{S_j}]|e \leqslant \max_{i\in S_j} \frac{r_i^{\overline{S_j}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^{S_j}(A)}e,$$

откуда следует, что

$$|A[j,S_j]|\,\mathcal{M}(A[S_j])^{-1}|A[S_j,\overline{S_j}]|e \leqslant \frac{r_{i_0}^{\overline{S_j}}(A)}{|a_{i_0i_0}| - r_{i_0}^{S_j}(A)} r_j^{S_j}(A), \quad \text{где } i_0 \in S_j.$$

Теперь для того, чтобы установить (2.14), остается заметить, что, в силу (2.12),

$$\frac{r_{i_0}^{\overline{S_j}}(A)}{|a_{i_0i_0}| - r_{i_0}^{S_j}(A)} r_j^{S_j}(A) < |a_{jj}| - r_j^{\overline{S_j}}(A).$$

Таким образом, $B\mathcal{M}(A)$ является SDD матрицей, и из предложения 2.2 следует, что A является S-SSDD матрицей.

Наконец, то утверждение, что A является T-SSDD матрицей при $T \neq \langle n \rangle$ и $S \subseteq T \subseteq R_A$, немедленно следует из предложения 2.3. $\square$

Из предложений 2.5 и 2.6 мы получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является SOB матрицей, то она является и T-SSDD матрицей для любого $T \neq \langle n \rangle$ такого, что*

$$\bigcup_{j\in\overline{R_A}} \{i \in R_A :\ a_{ji} \neq 0\} \subseteq T \subseteq R_A.$$

В следующей теореме установлены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы A была S-SSDD матрицей при $S \subseteq R_A$.

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subseteq R_A$, $S \neq \varnothing, \langle n \rangle$. Тогда A является S-SSDD матрицей в том и только том случае, когда*

$$|a_{jj}| > \sum_{i\in S} |a_{ji}| v_i + r_j^{\bar{S}}(A) \quad \text{для всех} \quad j \in \bar{S}, \tag{2.15}$$

где мы полагаем

$$v = (v_i) = \mathcal{M}(A[S])^{-1}\, |A[S,\bar{S}]| e. \tag{2.16}$$

Доказательство. По определению, поскольку $S \subseteq R_A$, то A является S-SSDD матрицей тогда и только тогда, когда дополнение по Шуру $\mathcal{M}(A)/S$ имеет строгое диагональное преобладание.

Из определения (2.16) вектора v следует, что

$$|A[\bar{S},S]|\, \mathcal{M}(A[S])^{-1}\, |A[S,\bar{S}]| e = |A[\bar{S},S]| v,$$

так что при любом $j \in \bar{S}$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \{(\mathcal{M}(A)/S)e\}_j &= \{\mathcal{M}(A[\bar{S}])e - |A[\bar{S},S]| v\}_j \\ &= |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) - \sum_{i\in S} |a_{ji}| v_i. \end{aligned}$$

Этим показано, что условие (2.15) выполнено тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}(A)/S$ является SDD матрицей. $\square$

Заметим, что для вектора v, определенного в (2.16), верно соотношение

$$\mathcal{M}(A[S]) v = |A[S,\bar{S}]| e. \tag{2.17}$$

Поскольку $S \subseteq R_A$, то $\mathcal{M}(A[S])e > |A[S,\bar{S}]|e$, и из (2.17) вытекает, что

$$v < e. \tag{2.18}$$

Пусть теперь $S = R_A$. Тогда из (2.17) и (2.18) следует, что при всех $i \in R_A$

$$|a_{ii}|v_i = \sum_{j \in R_A \setminus \{i\}} |a_{ij}|v_j + r_i^{\overline{R_A}}(A) \leqslant r_i(A),$$

так что

$$v_i \leqslant \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in R_A. \tag{2.19}$$

Аналогично, из (2.17) и (2.19) для $i \in R_A$ мы получаем:

$$|a_{ii}|v_i \leqslant \sum_{j \in R_A \setminus \{i\}} |a_{ij}| \frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} + r_i^{\overline{R_A}}(A) = p_i(A),$$

где величины $p_i(A)$, $i \in \langle n \rangle$, определены в §1. Отсюда следует, что

$$v_i \leqslant \frac{p_i(A)}{|a_{ii}|} = \frac{p_i^{(1)}(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in R_A.$$

Рассуждая по индукции, мы также заключаем, что

$$v_i \leqslant \frac{p_i^{(k)}(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in R_A, \quad k \geqslant 1. \tag{2.20}$$

Теперь мы готовы показать, что SDD_k матрицы являются SSDD матрицами.

Предложение 2.7. *Если $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, является SDD_k матрицей, где $k \geqslant 1$, то A является R_A-SSDD матрицей.*

Доказательство. Используя (2.20) и определение 1.9, для $k \geqslant 2$ мы выводим:

$$\sum_{i \in R_A} |a_{ji}|v_i + r_j^{\overline{R_A}}(A)$$
$$\leqslant \sum_{i \in R_A} |a_{ji}| \frac{p_i^{(k-1)}(A)}{|a_{ii}|} + r_j^{\overline{R_A}}(A) = p_j^{(k)}(A) < |a_{jj}|, \quad j \in \overline{R_A},$$

и тот факт, что A есть R_A-SSDD матрица, немедленно вытекает из теоремы 2.1.

Случай $k = 1$ рассматривается аналогично, но с использованием (2.19) вместо (2.20). □

Ниже мы предлагаем естественное обобщение SDD_k матриц. С этой целью, для заданного непустого собственного подмножества $S \subseteq R_A$ мы определяем векторы $v^{(k)} = (v_i^{(k)})_{i\in S}$, $k \geqslant -1$, полагая

$$v^{(-1)} = e$$

и

$$v_i^{(k)} = |a_{ii}|^{-1} \left(\sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}| v_j^{(k-1)} + r_i^{\bar{S}}(A) \right), \quad i \in S, \quad k \geqslant 0. \tag{2.21}$$

Ясно, что

$$v_i^{(0)} = \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in S,$$

а если $S = R_A$, то при $k \geqslant 1$ имеем

$$v_i^{(k)} = \frac{p_i^{(k)}(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in R_A.$$

Заметим, что поскольку $S \subseteq R_A$, то с помощью (2.21), используя индукцию, нетрудно убедиться, что

$$e = v^{(-1)} > v^{(0)} \geqslant v^{(1)} \geqslant \cdots . \tag{2.22}$$

Определение 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subseteq R_A$. Будем говорить, что A является S-*SDD_k матрицей, где $k \geqslant 0$, если

$$\sum_{i\in S} |a_{ji}| v_i^{(k-1)} + r_j^{\bar{S}}(A) < |a_{jj}| \quad \text{для всех} \quad j \in \bar{S}. \tag{2.23}$$

Заметим, что, ввиду (2.22), имеют место включения

$$\{S\text{-SDD}_0\} \subseteq \{S\text{-SDD}_1\} \subseteq \{S\text{-SDD}_2\} \subseteq \cdots .$$

Ясно, что в соответствии с определением 2.2, если $S = \varnothing$ или же $S = \langle n \rangle$, то A является S-SDD_k матрицей при $k \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда она имеет строгое диагональное преобладание; также A является S-SDD_0 матрицей тогда и только тогда, когда она является SDD матрицей.

По существу, обобщение SDD_k матриц, предложенное в определении 2.2, состоит в замене множества R_A на произвольное подмножество $S \subseteq R_A$.

Следующая теорема устанавливает соотношение между S-SSDD и S-SDD_k матрицами.

Теорема 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subseteq R_A$, $S \neq \varnothing, \langle n\rangle$. *Тогда* A *является* S-*SSDD матрицей в том и только том случае, когда* A *является* S-SDD_k *матрицей при некотором* $k \geqslant 0$.

Доказательство. Покажем сперва, что

$$v^{(k)} \geqslant v, \quad k \geqslant -1, \tag{2.24}$$

где вектор v определен в (2.16). Действительно, используя (2.22) и определение (2.21) векторов $v^{(k)}$, $k \geqslant 0$, мы выводим:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathcal{M}(A[S])v^{(k)}\right\}_i &= |a_{ii}|v_i^{(k)} - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}|v_j^{(k)} \\
&\geqslant |a_{ii}|v_i^{(k)} - \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}|v_j^{(k-1)} \\
&= r_i^{\bar S}(A) = \left\{|A[S,\bar S]|e\right\}_i, \quad i \in S.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\mathcal{M}(A[S])v^{(k)} \geqslant |A[S,\bar S]|e = \mathcal{M}(A[S])v,$$

откуда следует, что

$$v^{(k)} \geqslant v, \quad k \geqslant 0.$$

Оставшееся неравенство $v^{(-1)} = e > v$ уже установлено, см. (2.18).

Теперь предположим, что A есть S-SDD$_k$ матрица, где $k \geqslant 0$. Используя неравенства (2.24) и (2.23), для произвольного $k \geqslant 0$ мы выводим:

$$\sum_{i\in S} |a_{ji}|v_i + r_j^{\bar S}(A) \leqslant \sum_{i\in S} |a_{ji}|v_i^{(k-1)} + r_j^{\bar S}(A) < |a_{jj}|, \quad j \in \bar S.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.1, A есть S-SSDD матрица.

Обратно, пусть A является S-SSDD матрицей. В силу определения (2.16), вектор v является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{M}(A[S])v = |A[S,\bar S]|e. \tag{2.25}$$

Применяя метод простых итераций (метод Якоби) к системе линейных алгебраических уравнений (2.25) с начальным приближением $v^{(-1)} = e$, мы получаем последовательность приближенных решений $\left\{v^{(k)}\right\}_{k\geqslant 0}$ уравнения (2.25). Поскольку $A[S]$ является SDD матрицей, то эта последовательность сходится к точному решению v, т.е.

$$v^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v.$$

Отсюда следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$v^{(k-1)} - v \leqslant \varepsilon e, \quad \text{где} \quad k \geqslant k_\varepsilon. \tag{2.26}$$

Положим

$$\eta = \min_{j \in \bar{S}} \left\{ |a_{jj}| - \sum_{i \in S} |a_{ji}| v_i - r_j^{\bar{S}}(A) \right\} \tag{2.27}$$

и заметим, что, по теореме 2.1, $\eta > 0$. Выберем ε таким образом, что

$$\varepsilon < \frac{\eta}{\max_{j \in \bar{S}} r_j^S(A)}. \tag{2.28}$$

Тогда, с помощью (2.27), (2.26) и (2.28) мы выводим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in S} |a_{ji}| v_i^{(k-1)} + r_j^{\bar{S}}(A) \\
&\qquad = \left[\sum_{i \in S} |a_{ji}| v_i + r_j^{\bar{S}}(A) \right] + \sum_{i \in S} |a_{ji}| (v_i^{(k-1)} - v_i) \\
&\qquad \leqslant (|a_{jj}| - \eta) + \varepsilon r_j^S(A) < |a_{jj}|, \quad j \in \bar{S}.
\end{aligned}$$

Тем самым доказано, что при всех $k \geqslant k_\varepsilon$ A является S-SDD$_k$ матрицей. □

Прежде чем вернуться к S-SSDD матрицам, мы приведем условие, достаточное для того, чтобы A была S-SDD$_k$ матрицей, $k \geqslant 0$.

Предложение 2.8. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subseteq R_A$. Если при некотором $k \geqslant 1$ вектор $v^{(k-1)}$ удовлетворяет условию*

$$v_i^{(k-1)} r_j^S(A) < |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) \quad \textit{для всех} \quad i \in S \quad \textit{и всех} \quad j \in \bar{S}, \tag{2.29}$$

то A является S-SDD$_k$ матрицей.

Доказательство. Используя (2.29), мы выводим:

$$\sum_{i \in S} |a_{ji}| v_i^{(k-1)} \leqslant \max_{i \in S} \{v_i^{(k-1)}\}\, r_j^S(A) < |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A).$$

Но, в силу определения 2.2, это в точности означает, что A есть S-SDD$_k$ матрица. □

Заметим, что при $k = 1$ условие (2.29) принимает вид

$$\frac{r_i(A)\, r_j^S(A)}{|a_{ii}|} < |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \quad \text{и всех} \quad j \in \bar{S}. \tag{2.30}$$

Как легко убедиться, при $i \in S$

$$\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} \geqslant \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)},$$

так что из (2.30) вытекает, что

$$\frac{r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)} < |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A),$$

или

$$\bigl[|a_{ii}| - r_i^S(A)\bigr] \Bigl[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\Bigr] > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A), \quad i \in S, \quad j \in \bar{S}.$$

Этим показано, что матрицы, для которых выполняется условие (2.30), являются S-SDD матрицами.

С другой стороны, если $\bar{S} = 1$, скажем, $\bar{S} = \{j\}$, то (2.30) принимает вид

$$r_i(A)\, r_j(A) < |a_{ii}|\, |a_{jj}|, \quad i \neq j,$$

и мы приходим к такому следствию предложения 2.8.

Следствие 2.2. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является OB матрицей, то A является S-SDD$_k$ матрицей, где $|S| = n - 1$ и $k \geqslant 1$.*

В противоположном случае, когда $|S| = 1$, скажем $S = \{i\}$, неравенство (2.30) равносильно условию

$$r_i(A)\, |a_{ji}| < |a_{ii}|\, (|a_{jj}| - r_j^i(A)) \quad \text{для всех} \quad j \neq i,$$

и из предложения 2.8 вытекает следующий результат.

Следствие 2.3. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является DZ матрицей, то A является S-SDD$_k$ матрицей при $|S| = 1$ и $k \geqslant 1$.*

Теперь мы представим характеризацию SSDD матриц в терминах диагональных матриц, трансформирующих их в SDD матрицы.

Теорема 2.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subseteq R_A$, $S \neq \langle n\rangle, \varnothing$. Тогда A является S-SSDD матрицей в том и только том случае, когда существует диагональная матрица $D = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$ такая, что $d_i = 1$ для всех $i \in \bar{S}$, а матрица $B{=}AD$ имеет строгое диагональное преобладание.*

Доказательство. Предположим сперва, что A – S-SSDD матрица. Если $R_A = \langle n \rangle$, то $B = AI_n$ является SDD матрицей. Пусть теперь $R_A \neq \langle n \rangle$. Тогда мы имеем

$$\mathcal{M}(A[S])e > |A[S, \bar{S}]|e, \qquad (2.31)$$

а также

$$(\mathcal{M}(A)/S)e > 0,$$

что означает, что

$$\mathcal{M}(A[\bar{S}])e > |A[\bar{S}, S]| \, \mathcal{M}(A[S])^{-1}|A[S, \bar{S}]|e. \qquad (2.32)$$

Определим вектор v так же, как и в теореме 2.1, т.е. положим

$$v := \mathcal{M}(A[S])^{-1}|A[S, \bar{S}]|e. \qquad (2.33)$$

Тогда неравенство (2.32) можно записать в виде

$$\mathcal{M}(A[\bar{S}])e > |A[\bar{S}, S]|v. \qquad (2.34)$$

В частности, из (2.31) и (2.34) следует, что обе главные подматрицы $A[S]$ и $A[\bar{S}]$ имеют строгое диагональное преобладание. Заметим, что, в силу (2.33),

$$\mathcal{M}(A[S])v = |A[S, \bar{S}]|e. \qquad (2.35)$$

Положим

$$u := v + \alpha e, \quad \text{где} \quad \alpha > 0. \qquad (2.36)$$

Тогда вектор $u = (u_i)$ положителен, а, ввиду (2.36), (2.35) и (2.31), мы имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(A[S])u &= \mathcal{M}(A[S])v + \alpha\mathcal{M}(A[S])e \\ &> |A[S, \bar{S}]|e + \alpha|A[S, \bar{S}]|e = (1 + \alpha)|A[S, \bar{S}]|e > |A[S, \bar{S}]|e.\end{aligned}$$

Установленное неравенство показывает, что строки матрицы $B = AD$, где

$$D = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}, \quad d_i = \begin{cases} u_i, & i \in S, \\ 1, & i \notin S, \end{cases}$$

с номерами из S имеют строгое диагональное преобладание при любом $\alpha > 0$, т.е. $S \subseteq R_B$. Таким образом, для завершения доказательства остается убедиться, что строки матрицы B с номерами из $\bar{S}$ также имеют строгое диагональное преобладание.

Действительно, требуемое неравенство

$$\mathcal{M}(A[\bar{S}])e > |A[\bar{S}, S]|(v + \alpha e)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{M}(A[\bar{S}])e > |A[\bar{S}, S]|\mathcal{M}(A[S])^{-1}|A[S, \bar{S}]|e + \alpha|A[\bar{S}, S]|e,$$

т.е.

$$\{(\mathcal{M}(A)/S)\, e\}_j > \alpha \left\{|A[\bar{S}, S]|e\right|\}_j = \alpha r_j^S(A), \quad j \in \bar{S}. \tag{2.37}$$

Если $r_j^S(A) = 0$, то неравенство (2.37) выполняется тривиальным образом, поскольку $\mathcal{M}(A)/S$ является SDD матрицей по условию. В том же случае, когда $r_j^S(A) \neq 0$, для того, чтобы выполнялось неравенство (2.37), достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\alpha < \frac{\{(\mathcal{M}(A)/S)e\}_j}{r_j^S(A)} \quad \text{для всех} \quad j \in \bar{S}.$$

Следовательно, мы выбираем α таким образом, чтобы

$$\alpha < \alpha_0 := \min_{\substack{j \in \bar{S}: \\ r_j^S(A) \neq 0}} \frac{\{(\mathcal{M}(A)/S)e\}_j}{r_j^S(A)}.$$

Поскольку мы рассматриваем тот случай, когда A не является SDD матрицей, то существует индекс $j \in \bar{S}$ такой, что

$$0 < \left\{\mathcal{M}(A[\bar{S}])e\right\}_j \leqslant r_j^S(A),$$

откуда следует, что $\{(\mathcal{M}(A)/S)e]\}_j \leqslant r_j^S(A)$, так что $\alpha_0 \leqslant 1$.

Итак, мы доказали, что при всех $\alpha \in (0,\ \alpha_0)$ B является SDD матрицей.

Обратно, предположим, что $B = AD$ – SDD матрица и что $D[\bar{S}] = I$. Поскольку, по условию теоремы, $S \subseteq R_A$, то для доказательства того факта, что A есть S-SSDD матрица, остается установить, что $\mathcal{M}(A)/S$ есть SDD матрица. Действительно, как легко проверить, $\mathcal{M}(A)/S = \mathcal{M}(B)/S$, и остается заметить, что дополнение по Шуру $\mathcal{M}(B)/S$ SDD матрицы B само является SDD матрицей. □

Заметим, что теорема 2.3 не только утверждает существование требуемых диагональных матриц D, но и дает метод их нахождения.

Выведем некоторые следствия из теоремы 2.3.

Заметим, прежде всего, что из теоремы 2.3 немедленно следует предложение 2.3.

Кроме того, из теоремы 2.3 также следует предложение 2.4. Действительно, при $S \subseteq R_A$ для S-SDD матрицы A существует положительное число γ такое, что матрица AD_γ^S имеет строгое диагональное преобладание (см. [19], а также [28, доказательство теоремы 3.11]). Здесь и ниже мы используем обозначение

$$D_\gamma^S = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\}, \quad d_i = \begin{cases} \gamma, & i \in S, \\ 1, & i \notin S. \end{cases} \tag{2.38}$$

Следовательно, по теореме 2.3, A является S-SSDD матрицей. Тот случай, когда $\bar{S} \subseteq R_A$, рассматривается аналогично.

На основе теорем 2.1 и 2.3 легко получить альтернативное доказательство предложения 2.7.

Комбинируя теорему 1.2 с теоремой 2.3, мы заключаем, что в том случае, когда $R_A \neq \varnothing, \langle n \rangle$, класс SSDD матриц содержит еще один известный подкласс.

Следствие 2.4. *Если $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, A является $GSDD_1$ (и $GSDD_1^*$) матрицей и $R_A \neq \varnothing, \langle n \rangle$, то A является и R_A-SSDD матрицей.*

Доказательство. По теореме 1.2, матрица $B = A\Delta_A$ является R_A-SDD матрицей. Следовательно, как отмечено выше, матрица $BD_\gamma^{R_A} = A(\Delta_A D_\gamma^{R_A})$ имеет строгое диагональное преобладание при некотором $\gamma > 0$. Наконец, применяя теорему 2.3, мы заключаем, что A является R_A-SSDD матрицей. $\square$

Теорема 2.3 также позволяет установить соотношение между S-SSDD и SD-SDD матрицами.

Теорема 2.4. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n \rangle$. Тогда A является S-SSDD матрицей в том и только том случае, когда $S \subseteq R_A$ и A является SD-SDD матрицей.*

Доказательство. Если A – S-SSDD матрица, то $S \subseteq R_A$ по определению. Поскольку любая SDD матрица является S-SDD матрицей для любого непустого собственного подмножества $S \subset \langle n \rangle$, тот факт, что S-SSDD матрица A является SD-SDD матрицей немедленно следует из теоремы 2.3 и определения 1.12 SD-SDD матриц.

Обратно, пусть A является SD-SDD матрицей и пусть $B = AD$ является S-SDD матрицей, где диагональная матрица D такова, что $D[\bar{S}] = I$. Тогда для матрицы D_γ^S, определенной в (2.38), произведение $BD_\gamma^S = A(DD_\gamma^S)$ является SDD матрицей. Следовательно, по теореме 2.3, при $S \subseteq R_A$ A является S-SSDD матрицей. $\square$

Заметим, что утверждение предложения 2.4 легко выводится также и из теоремы 2.4. Действительно, пусть, для определенности, $S \subseteq R_A$. Поскольку S-SDD матрица A заведомо является SD-SDD матрицей, то, в силу теоремы 2.4, она является и S-SSDD матрицей.

Последняя теорема этого параграфа немедленно вытекает из теоремы 2.3 и характеризации PH-матриц, содержащейся в теореме 1.3. Она утверждает, что SSDD матрицы являются частным случаем PH-матриц; тем самым она также дает нетривиальные примеры PH-матриц.

Теорема 2.5. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SSDD матрицей, где $S = \{i_1, \ldots, i_{|S|}\}$, $1 \leqslant |S| < n$. Тогда A является PH-матрицей относительно разбиения*

$$\pi = \{i_1\} \cup \cdots \cup \{i_{|S|}\} \cup \bar{S}$$

множества $\langle n \rangle$ порядка $|S| + 1$.

Заметим, что, в силу теоремы 1.3, порядок разбиения π в теореме 2.5 можно уменьшить, если некоторые из элементов d_i, $i \in S$, масштабирующей матрицы D, которая трансформирует A в SDD матрицу, равны друг другу или 1.

Напомним, что, в соответствии с предложением 2.3, если $S \neq \varnothing, \langle n \rangle$, то S-SSDD матрица A также является и T-SSDD матрицей для любого множества T такого, что $S \subseteq T \subsetneqq \langle n \rangle$. В этой связи, естественно возникает вопрос, когда S-SSDD матрица является и $\widetilde{S}$-SSDD матрицей для некоторого непустого множества $\widetilde{S} \subsetneqq S$. Ясно, что если $S \subset R_A = \langle n \rangle$, то A является $\{i\}$-SSDD матрицей для любого $i \in S$. Если же матрица не имеет строгого диагонального преобладания, то частичный ответ на поставленный вопрос дает следующий результат.

Предложение 2.9. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SSDD матрицей, где $S \neq \varnothing$ и $R_A \neq \langle n \rangle$, и пусть $B = AD$ является SDD матрицей, где $D = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$ и $d_i = 1$ для всех $i \in \bar{S}$. Тогда A является $\widetilde{S}$-SSDD матрицей, где*

$$\widetilde{S} = \{i \in S : \ d_i < 1\},$$

и, следовательно, также и T-SSDD матрицей для любого множества T такого, что $\widetilde{S} \subseteq T \subseteq R_A$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $\widetilde{S} \neq \varnothing$. Действительно, рассуждая от противного, предположим, что $d_i \geqslant 1$ для всех $i \in S$, так что $D \geqslant I_n$. Тогда при всех $j \in \overline{R_A} \neq \varnothing$ мы имеем

$$r_j(B) \geqslant r_j(A) \geqslant |a_{jj}| = |b_{jj}|,$$

что противоречит предположению о том, что B является SDD матрицей.

Определим диагональную матрицу

$$\widetilde{D} = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}, \quad \widetilde{d}_i = \begin{cases} d_i, & i \in \widetilde{S}, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и заметим, что $\widetilde{D} \leqslant I_n$ и $\widetilde{D} \leqslant D$. Покажем, что $A\widetilde{D}$ является SDD матрицей.

Действительно, при $j \in \bar{S}$ мы имеем:

$$r_j(A\widetilde{D}) \leqslant r_j(AD) = r_j(B) < |b_{jj}| = |a_{jj}| = |a_{jj}\widetilde{d}_j|.$$

Если $i \in \widetilde{S}$, то $\widetilde{d}_i = d_i < 1$, а, поскольку $D \geqslant \widetilde{D}$, то

$$|a_{ii}\widetilde{d}_i| = |a_{ii}d_i| > r_i(AD) \geqslant r_i(A\widetilde{D}).$$

В том оставшемся случае, когда $i \in S \setminus \widetilde{S}$, мы имеем: $\widetilde{d}_i = 1$, $\widetilde{D} \leqslant I_n$ и, так как $S \subseteq R_A$, то $|a_{ii}| > r_i(A)$. Используя последние соотношения, мы выводим:

$$|a_{ii}\widetilde{d}_i| = |a_{ii}| > r_i(A) \geqslant r_i(A\widetilde{D}).$$

Таким образом, $A\widetilde{D}$ является SDD матрицей, так что, в силу теоремы 2.3, A является и $\widetilde{S}$-SSDD матрицей. □

Отметим, что в тех случаях, когда в трансформирующей матрице D имеются элементы $d_i \geqslant 1$, $i \in S$, предложение 2.9 позволяет уменьшить порядок разбиения π множества $\langle n \rangle$, относительно которого SSDD матрица A является PH-матрицей.

§3. Верхние оценки для $\|A^{-1}\|_\infty$

В этом параграфе представлены некоторые верхние оценки для l_∞-нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ обратной к SSDD матрице A.

Первый результат немедленно следует из теорем 1.6 и 2.5.

Теорема 3.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является* S-*SSDD матрицей, где* $1 \leqslant |S| < n$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{j\in\bar{S}} \|A_j^{-1}\|_\infty, \tag{3.1}$$

где мы используем обозначение

$$A_j = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(A[S]) & -|A[S,\bar{S}]|e \\ -|A[j,S]| & |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) \end{bmatrix}, \quad j \in \bar{S}. \tag{3.2}$$

Заметим, что для вычисление правой части оценки (3.1) требуется определить (или оценить сверху) l_∞-нормы $|\bar{S}|$ $\mathcal{M}$-матриц A_j порядка $|S|+1$, которые различаются только последними строками. Заметим также, что, наряду с исходной матрицей A, все матрицы A_j являются S-SSDD матрицами, и у каждой из них имеется не более одной строки без строгого диагонального преобладания.

Таким образом, с помощью теоремы 3.1 задача оценки сверху нормы обратной к S-SSDD матрице A сводится к той же задаче для S-SSDD матриц A_j, $j \in \bar{S}$, порядка $|S|+1$. Заметим, что в том случае, когда масштабирующая матрица D такая, что AD имеет строгое диагональное преобладание, известна явно и $d_i \geqslant 1$ для некоторых $i \in S$ или же некоторые из диагональных элементов совпадают друг с другом, множество S можно уменьшить и/или разбиение множества $\langle n\rangle$, неявно используемое в теореме 3.1, можно заменить на более грубое, так что порядок матриц, возникающих вместо матриц (3.2), будет меньше.

Для получения следующего результата S-SSDD матрицу нужно рассмотреть как SD-SDD матрицу и применить теоремы 2.4 и 1.5. Также, основываясь на предложении 2.9, мы можем предположить без потери общности, что масштабирующая матрица удовлетворяет условию $D \leqslant I_n$.

Теорема 3.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является* S-*SSDD матрицей, где* $1 \leqslant |S| < n$, *и пусть матрица* $B = (b_{ij}) = AD$ *имеет строгое диагональное преобладание, где*

$$D = \operatorname{Diag}\{d_1, \ldots, d_n\}, \quad d_i < 1,\ i \in S \quad \textit{и} \quad d_i = 1,\ i \in \bar{S}.$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S, j\in\bar{S}} \max\left\{\frac{|b_{ii}| - r_i^S(B) + r_j^S(B)}{\Delta_{ij}^S},\ \omega\frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)}{\Delta_{ij}^S}\right\},$$

где

$$\omega = \max_{i\in S} d_i,$$

и

$$\Delta_{ij}^S = \left[|b_{ii}| - r_i^S(B)\right]\left[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\right] - r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(B), \quad i \in S,\ j \in \bar S.$$

Ясно, что теоремы 3.1 и 3.2 можно использовать совместно, т.е. теорему 3.2 можно применить к матрицам (3.2), принимая во внимание тот факт, что, в условиях теоремы 3.2, все матрицы

$$B_j = A_j \begin{bmatrix} D[S] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad j \in \bar S,$$

имеют строгое диагональное преобладание. Однако, как легко убедиться, результирующая оценка будет совпадать с оценкой теоремы 3.2.

Обе теоремы 3.1 и 3.2 основаны (неявно или явно) на существовании масштабирующей матрицы D такой, что AD – SDD матрица. С другой стороны, следующая теорема устанавливается с использованием определения SSDD матриц.

Теорема 3.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SSDD матрицей, где $1 \leqslant |S| < n$. Положим*

$$\xi = \min_{i\in S}\{|a_{ii}| - r_i^S(A)\} \tag{3.3}$$

и определим вектор $v = (v_i)$, как в §2, т.е. положим

$$v = \mathcal{M}(A[S])^{-1}|A[S,\bar S]|e. \tag{3.4}$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in S}\frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)},\ \max_{j\in\bar S}\frac{1 + \xi^{-1} r_j^S(A)}{|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A) - \sum_{i\in S}|a_{ji}v_i|}\right\}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Не теряя общности, предположим, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A[S] & A[S,\bar S] \\ A[\bar S, S] & A[\bar S] \end{bmatrix}.$$

Тогда для матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$ имеет место блочное 2×2 LU разложение

$$\mathcal{M}(A) = LU = \begin{bmatrix} I_{|S|} & 0 \\ -|A[\bar S, S]|\mathcal{M}(A[S])^{-1} & I_{|\bar S|} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{M}(A[S]) & -|A[S,\bar S]| \\ 0 & \mathcal{M}(A)/S \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

причем матрица U имеет строгое диагональное преобладание. Из (3.6) следует, что

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty = \|U^{-1}q\|_\infty, \tag{3.7}$$

где мы используем обозначение

$$q = L^{-1}e = \begin{bmatrix} e \\ |A[\bar{S}, S]\mathcal{M}(A[S])^{-1}e + e \end{bmatrix}.$$

Поскольку подматрица $\mathcal{M}(A[S])$ заведомо является SDD матрицей, то, в силу теоремы 1.4 и определения (3.3), мы имеем:

$$\|\mathcal{M}(A[S])^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i^S(A)} = \xi^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$q_k \leqslant \begin{cases} 1, & k \in S, \\ 1 + \xi^{-1} r_k^S(A), & k \in \bar{S}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Теперь, используя соотношения (3.7) и (3.8) и применяя теорему 1.4 к SDD матрице U, мы выводим

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{i\in S} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}, \quad \max_{j\in\bar{S}} \frac{1 + \xi^{-1} r_j^S(A)}{\{(\mathcal{M}(A)/S)e\}_j} \right\}. \tag{3.9}$$

Заметим, что, в силу (3.4),

$$\begin{aligned} \{(\mathcal{M}(A)/S)e\}_j &= \{(\mathcal{M}(A)[\bar{S}])e - |A[\bar{S}, S]|v\}_j \\ &= |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) - \sum_{i\in S} |a_{ji}| v_i, \quad j \in \bar{S}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Теперь из (3.9) и (3.10) следует, что

$$\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{i\in S} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}, \max_{j\in\bar{S}} \frac{1 + \xi^{-1} r_j^S(A)}{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) - \sum\limits_{i\in S} |a_{ji}| v_i} \right\},$$

и для завершения доказательства теоремы нам остается лишь напомнить, что для $\mathcal{H}$-матрицы A справедливо неравенство

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty.$$

□

В качестве следствия теоремы 3.3 мы легко получаем следующий результат.

Следствие 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является S-SDD_k матрицей, где $1 \leqslant |S| < n$ и $k \geqslant 1$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in S}\frac{1}{|a_{ii}|-r_i(A)},\ \max_{j\in\bar S}\frac{1+\xi^{-1}r_j^S(A)}{|a_{jj}|-r_j^{\bar S}(A)-\sum\limits_{i\in S}|a_{ji}|v_i^{(k-1)}}\right\},\tag{3.11}$$

где векторы $v^{(k)} = (v_i^{(k)})$, $k \geqslant 0$, определяются в соответствии с (2.21).

Доказательство. Оценка (3.11) немедленно следует из теоремы 2.2, теоремы 3.3 и неравенства $v \leqslant v^{(k)}$, $k \geqslant -1$, см. (2.24). □

Замечание 3.1. В применении к матрицам A_j, $j \in \bar S$, определенным в (3.2), теорема 3.3 дает оценки

$$\|A_j^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\in S}\frac{1}{|a_{ii}|-r_i(A)},\ \frac{1+\xi^{-1}r_j^S(A)}{|a_{jj}|-r_j^{\bar S}(A)-\sum\limits_{i\in S}|a_{ji}|v_i}\right\},\quad j\in\bar S,$$

комбинируя которые с теоремой 3.1, мы снова приходим к оценке (3.5).

Список литературы

1. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации их спектра.* — Ж. вычисл. мат. мат. физ. **10**, No. 5 (1970), 1092–1097.
2. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
4. Л. Ю. Колотилина, *Характеризация PM- и PH-матриц в терминах диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 110–120.
5. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
6. Л. Ю. Колотилина, *Об одном блочном обобщении матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 138–155).
7. Л. Ю. Колотилина, *Верхние оцнки для $\|A^{-1}Q\|_\infty$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 77–87.
8. Л. Ю. Колотилина, *Об SDD_1 матрицах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2022), 88–112.
9. Л. Ю. Колотилина, *Об SDD_1 матрицах и их обобщениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **524** (2023), 74–93.

10. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
11. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix.* II. — Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.
12. D. Carlson, T. Markham, *Schur complements of diagonally dominant matrices.* — Czech. Math. J. **29** (1979), 246–251.
13. X. Cheng, Y. Li, L. Liu, Y. Wang, *Infinity norm upper bounds for the inverse of* SDD_1 *matrices.* — AIMS Math. **7**, No. 5 (2022), 8847–8860.
14. D. L. Cvetković, L. Cvetković, C. Q. Li, *CKV-type matrices with applications.* — Linear Algebra Appl. **608** (2021), 158–184.
15. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
16. P. F. Dai, *A note on diagonal dominance, Schur complements and some classes of H-matrices and P-matrices.* — Adv. Comput. Math. **42** (2016), 1–4.
17. K. Doroslovački, D. Cvetković, *On matrices with only one non-SDD row.* — Mathematics **11** (2023), 2382.
18. Ping-Fan Dai, Jinping Li, Shaoyu Zhao, *Infinity norn bounds for the inverse for* $GSDD_1$ *matrices using scaling matrices.* — Comput. Appl. Math. **42** (2023), 121.
19. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonal dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **169** (1992), 257–268.
20. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. **364** (2003), 65–80.
21. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain* M*- and* H*-matrices.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 692–702.
22. Bishan Li, M. J. Tsatsomeros, *Doubly diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl. **261** (1997), 221–235.
23. Y. Li, Y. Wang, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of GDSDD matrices.* — Mathematics **10** (2022), 186.
24. J. Liu, Y. Huang, F. Zhang, *The Schur complements of generalized doubly diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl. **378** (2004), 231–244.
25. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
26. J. M. Peña, *Diagonal dominance, Schur complements and some classes of* H*-matrices and P-matrices.* — Adv. Comput. Math. **35** (2011), 357–373.
27. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
28. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*. Springer, 2004.
29. Xiaodong Wang, Feng Wang, *Infinity norm upper bounds for the inverse of* SDD_k *matrices.* — AIMS Math. **8**, No. 10 (2023), 24999–25016.
30. X. R. Yong, *Two properties of diagonally dominant matrices.* — Numer. Linear Algebra **3** (1996), 173–177.
31. Jianxing Zhao, Qilong Liu, Chaoqian Li, Yaotang Li, *Dashnic–Zusmanovich type matrices: a new subclass of nonsingular H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **552** (2018), 277–287.

Kolotilina L. Yu. SSDD matrices and relations with other subclasses of the nonsingular $\mathcal{H}$-matrices.

The paper introduces into consideration a new matrix class of the so-called SSDD (Schur SDD) matrices, which contains the class of SDD (strictly diagonally dominant) matrices and is itself contained in the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices. The definition of an SSDD matrix A is based on distinguishing a subset S of its strictly diagonally dominant rows and requiring that the Schur complement $\mathcal{M}(A)/S$ of its comparison matrix be an SDD matrix. Properties of SSDD matrices and their relations with other subclasses of the class of $\mathcal{H}$-matrices are considered. In particular, it is shown that such known matrix classes as those of OB, SOB, DZ, DZT (DZ-type), CKV-type, S-SDD, SDD_1, SDD_k, GSDD_1, and also GSDD_1^* matrices all are contained in the class of SSDD matrices. On the other hand, the SSDD matrices themselves are simultaneously PH- and SD-SDD matrices and, up to symmetric row and column permutations, they coincide with the block 2×2 generalized Nekrasov matrices, the so-called GN matrices. Also some upper bounds for the l_∞-norm of the inverse to an SSDD matrix are established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 30 августа 2024 г.