Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 534, 2024 г.

А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев

НЕРАВЕНСТВА ФРОБЕНИУСА И СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ ЦЕПНОГО РАНГА

§1. Введение

Цепные матрицы естественно возникают, если представить, что элементы матрицы – это клетки шахматной доски, по доске перемещается ладья, которой разрешено останавливаться только на ненулевых элементах. Неотрицательная матрица называется цепной, если ладья может обойти все ее положительные клетки таким способом. Понятие цепной матрицы как матрицы, любые две строки которой содержат ненулевой элемент в одном и том же столбце, было введено Хартвилом и Максоном в работе [9]. Для расширения понятия цепных матриц позже было введено понятие цепного ранга – комбинаторного инварианта неотрицательных матриц, показывающего, на какое минимальное число блоков, являющихся цепными матрицами, можно разбить исходную матрицу, см. определение 3.4. Оказалось, что этот инвариант обладает рядом свойств, аналогичных свойствам обычного ранга матриц. Он применяется для исследования цепного индекса, примитивных матриц и структуры полугрупп неотрицательных матриц, см., например, работы [1–4]. В частности, исследовано арифметическое поведение цепного ранга и в работе [1] получена верхняя оценка цепного ранга произведения двух матриц. Однако вопрос о нижней оценке до сих пор оставался открытым.

Целью настоящей работы является доказательство аналога неравенства Фробениуса для цепного ранга. В качестве следствия удается вывести нижнюю оценку цепного ранга произведения двух матриц и, тем самым, установить справедливость неравенства Сильвестра для функции цепного ранга. Для доказательства неравенства Фробениуса построено отображение решетки разбиений множества из n элементов в решетку разбиений множества из m элементов, где n и m – размеры рассматриваемых матриц, ассоциированное с цепным рангом. Показано, как свойства этого отображения определяются свойствами

Ключевые слова: неотрицательные матрицы, цепные матрицы, цепной ранг, решетки разбиений.

цепного ранга матрицы. В итоге, рассматриваемую проблему удается полностью решить за счет использования методов теории решеток.

Подробное изложение основ теории решеток читатель может найти в монографии Биркгофа [6], см. также мнографии [7] и [8]. В частности, решеткам разбиений посвящены работы Уитмэна [12] и Оре [10].

Работа построена следующим образом. В §2 вводятся базовые определения и обсуждаются основные свойства решеток разбиений, которые понадобятся в дальнейшем. В §3 определяется отображение разбиений, ассоциированное с комбинаторной структурой неотрицательной матрицы. Доказано, что построенные отображения являются композицией вложения и проекции подходящих решеток, и установлена их связь с цепным рангом. В §4 получен аналог неравенства Фробениуса для цепного ранга и некоторые его следствия. Для этого введены понятия цепного ядра и образа, которые являются аналогами ядра и образа линейного оператора, и доказаны аналоги классических теорем об арифметическом поведении цепного ранга.

§2. Решетки разбиений

Для дальнейшего изложения материала нам потребуются основные понятия теории решеток. Решетка – это частично упорядоченное множество X, такое что для любых двух его элементов x, y существует их супремум $x \vee y$ (join) и инфинум $x \wedge y$ (meet), см. [7].

В этой работе мы рассматриваем решетки разбиений фиксированного конечного множества. Пусть $\Pi(X)$ обозначает решетку разбиений множества X. Множество всех подмножеств X обозначается через 2^X. Мы обозначаем через $\mathbf{n}$ множество $\{1, 2, \dots, n\}$ и изучаем решетку разбиений $\Pi(\mathbf{n})$. Разбиения записываются в виде $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Множества α_i, $i = 1, \dots, s$, называются блоками разбиения α, $s = |\alpha|$. Частичный порядок на решетке разбиений определяется следующим образом.

Определение 2.1. *Пусть* $\alpha, \beta \in \Pi(\mathbf{n})$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$. *Говорят, что* α *грубее (является укрупнением)* β *или* β *мельче (является измельчением)* α *и пишут* $\alpha \leqslant \beta$, *если для любого блока* β_i *разбиения* β *найдется такой блок* α_j *разбиения* α, *что* $\beta_i \subseteq \alpha_j$.

Предложение 2.2. *Множество* $\Pi(\mathbf{n})$, *упорядоченное согласно определению* 2.1, *является решеткой.*

Доказательство. В [8, глава V, §4] решеткой разбиений называется множество разбиений с порядком, обратным порядку из определения 2.1. При обращении порядка супремум переходит в инфинум и наоборот, поэтому множество разбиений с порядком из определения 2.1 тоже является решеткой. □

Супремум $\alpha \vee \beta$ двух разбиений α и β – это самое крупное разбиение γ такое, что $\gamma \geqslant \alpha$ и $\gamma \geqslant \beta$. Аналогично, инфинум $\alpha \wedge \beta$ - это самое мелкое разбиение δ, которое является укрупнением и α, и β.

Определение 2.3. *Диаграмма Хассе* [7, 1.15] *решетки X определяется следующим образом: элементы $a, b \in X$ соединены линией тогда и только тогда, когда $a \leqslant b$ и нет такого элемента $c \in X$, отличного от a и b, что $a \leqslant c \leqslant b$. При этом a изображается ниже b.*

Пример 2.4. Рассмотрим диаграмму Хассе решетки $\Pi(3)$:

$$\begin{tikzcd}
& (\{1\},\{2\},\{3\}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(\{1\},\{2,3\}) \arrow[dr, dash] & (\{1,3\},\{2\}) \arrow[d, dash] & (\{1,2\},\{3\}) \arrow[dl, dash] \\
& (\{1,2,3\}) &
\end{tikzcd}$$

Таким образом,

$$(\{1\},\{2,3\}) \wedge (\{1,3\},\{2\}) = (\{1,2,3\}),$$

так как $(\{1,2,3\})$ — это единственное разбиение, которое грубее разбиения $(\{1\},\{2,3\})$ и $(\{1,3\},\{2\})$. Аналогично, $(\{1,3\},\{2\}) \wedge (\{1,2\},\{3\})$ и $(\{1\},\{2,3\}) \wedge (\{1,2\},\{3\})$ тоже равны $(\{1,2,3\})$.

При этом

$$(\{1\},\{2,3\}) \vee (\{1,3\},\{2\}) = (\{1,2\},\{3\}) \vee (\{1,3\},\{2\})$$

$$= (\{1\},\{2,3\}) \vee (\{1,2\},\{3\}) = (\{1\},\{2\},\{3\}).$$

Определение 2.5. *Пусть X, Y – решетки.*

1. *Отображение $f : X \to Y$ называется гомоморфизмом решеток, если для любых $a, b \in X$ справедливы соотношения*

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

2. *Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.*
3. *Гомоморфизм $f : X \to Y$, для которого отображение $f : X \to \ f(X)$ является изоморфизмом, называется вложением.*

Решетки разбиений имеют следующее универсальное свойство.

Теорема 2.6 ([11, стр. 21])**.** *Любая конечная решетка вкладывается в конечную решетку разбиений.*

Обозначение 2.7. Обозначим разбиение $(\{1, \ldots, n\}) \in \Pi(\mathbf{n})$ через $\mathbf{0}$. Это разбиение грубее любого другого в $\Pi(\mathbf{n})$. Обозначим через θ разбиение

$$(\{1\}, \ldots, \{n\}) \in \Pi(\mathbf{n}),$$

которое является измельчением любого другого разбиения в $\Pi(\mathbf{n})$.

Можно записать $\mathbf{0} = \inf \Pi(\mathbf{n}) = \bigwedge \Pi(\mathbf{n})$ и $\theta = \sup \Pi(\mathbf{n}) = \bigvee \Pi(\mathbf{n})$. В примере 2.4, в частности, $\mathbf{0} = (\{1, 2, 3\})$ и $\theta = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$.

Определение 2.8. *Пусть X – частично упорядоченное множество и $Q \subseteq X$. Подмножество Q называется полуидеалом (альтернативно – порядковым идеалом,* [7, 1.27]) *множества X, если для любых $b \in Q$, $a \in X$ из $a \leqslant b$ следует $a \in Q$.*

Определение 2.9. *Пусть X – решетка. Непустой полуидеал $J \subseteq X$ называется идеалом решетки X, если из $a, b \in J$ следует $a \vee b \in J$.*

Обозначение 2.10. Пусть $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$ – разбиение. Обозначим через $U(\alpha)$ множество всех разбиений из $\Pi(\mathbf{n})$, которые грубее, чем α.

Предложение 2.11. *Если $Q \subseteq \Pi(\mathbf{n})$ является полуидеалом и $\alpha \in X$, то $U(\alpha) \subseteq X$.*

Доказательство. Следствие определения 2.8. $\square$

Пример 2.12. В решетке $\Pi(3)$ из примера 2.4 есть девять непустых полуидеалов:

$$Q_1 = \mathbf{0},$$

$$Q_2 = \Pi(3) = U(\theta),$$

$$Q_3 = U((\{1\},\{2,3\})) = \{(\{1\},\{2,3\}),\mathbf{0}\},$$

$$Q_4 = U((\{1,2\},\{3\})) = \{(\{1,2\},\{3\}),\mathbf{0}\},$$

$$Q_5 = U((\{1,3\},\{2\})) = \{(\{1,3\},\{2\}),\mathbf{0}\},$$

$$Q_6 = Q_3 \cup Q_4,$$

$$Q_7 = Q_3 \cup Q_5,$$

$$Q_8 = Q_4 \cup Q_5,$$

$$Q_9 = Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5.$$

С помощью предложения 2.11 нетрудно убедиться, что других полуидеалов в $\Pi(3)$ нет.

Из этих девяти полуидеалов только первые пять – идеалы.

Теорема 2.13. *Множество $U \subseteq \Pi(\mathbf{n})$ является идеалом решетки $\Pi(\mathbf{n})$ тогда и только тогда, когда $U = U(\alpha)$ для какого-то разбиения $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$.*

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$ множество $U(\alpha)$ является идеалом решетки $\Pi(\mathbf{n})$. По определению, $U(\alpha)$ является полуидеалом, при этом для любых разбиений $\beta, \gamma \in U(\alpha)$ имеем $\alpha \geqslant \beta$ и $\alpha \geqslant \gamma$, откуда $\alpha \geqslant \beta \vee \gamma$ и, следовательно, $\beta \vee \gamma \in U(\alpha)$, поэтому $U(\alpha)$ – это идеал.

Теперь пусть $U \subseteq \Pi(\mathbf{n})$ – какой-то идеал. Рассмотрим разбиение $\alpha = \bigvee U$. Тогда $\alpha \in U$, а для любого $\beta \in U$ выполняется $\alpha \geqslant \beta$, откуда $U = U(\alpha)$. □

Определение 2.14. *Размерностью* $\dim U$ *полуидеала* $U \subseteq \Pi(\mathbf{n})$ *называется величина* $\max_{\alpha \in U}\{|\alpha|\}$.

Замечание 2.15. Если $U = U(\alpha) \subseteq \Pi(\mathbf{n})$, то размерность $\dim U$ идеала U равна $|\alpha|$.

Теорема 2.16 ([7, предложение 2.19])**.** *Пусть X, Y – решетки. Биективное отображение $f : X \to Y$ является изоморфизмом решеток тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in X$*

$$a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b).$$

Любой идеал $U \subseteq \Pi(\mathbf{n})$ изоморфен решетке $\Pi(\mathbf{m})$ при $m = \dim U$. В этой работе нам понадобится явное определение этого изоморфизма, которое будет представлено ниже. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \subseteq \Pi(\mathbf{n})$. Тогда для каждого $\beta \leqslant \alpha$ справедливо разложение

$$\beta = \Big(\bigsqcup_{k=1}^{r_1} \alpha_{i_1^k}, \bigsqcup_{k=1}^{r_2} \alpha_{i_2^k}, \ldots, \bigsqcup_{k=1}^{r_t} \alpha_{i_t^k} \Big), \tag{1}$$

где $t = |\beta|$ и $i_l^k \in \mathbf{s}$.

Определение 2.17. *Пусть $U(\alpha) \subseteq \Pi(\mathbf{n})$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Отображение*

$$\phi_\alpha : U(\alpha) \to \Pi(\mathbf{s})$$

определяется следующим образом: для любого $\beta \in U(\alpha)$

$$\phi_\alpha(\beta) = (\{i_1^1, \ldots, i_1^{r_1}\}, \{i_2^1, \ldots, i_2^{r_2}\}, \ldots, \{i_t^1, \ldots, i_t^{r_t}\}), \tag{2}$$

где индексы i_p^q определены формулой (1), поскольку $\beta \leqslant \alpha$.

Теорема 2.18. *Для любого разбиения $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$ ϕ_α является изоморфизмом решеток.*

Доказательство. Заметим, что ϕ_α — это биекция: по образу $\phi_\alpha(\beta)$ однозначно восстанавливается разбиение β и наоборот. Из выражений (1) и (2) видно, что для любых разбиений $\beta, \gamma \in U(\alpha)$ условие $\beta \leqslant \gamma$ эквивалентно условию $\phi_\alpha(\beta) \leqslant \phi_\alpha(\gamma)$, что, по теореме 2.16, означает, что ϕ_α – это изоморфизм. □

Обозначение 2.19. Пусть α_i — произвольное подмножество $\mathbf{n}$ и пусть $e_i, i = 1, \ldots, n,$ — ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда через e_{α_i} обозначим вектор $\sum\limits_{j \in \alpha_i} e_j$.

Например, $e_{\{1,3\}} = (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Определение 2.20. *Для разбиения $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$ через U_α обозначим следующее линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$:*

$$U_\alpha = \langle \{e_{\alpha_i} | \alpha_i \in \alpha\} \rangle.$$

Замечание 2.21. $\dim U_\alpha = \dim U(\alpha) = |\alpha|$, так как $|\alpha|$ равно количеству векторов в базисе U_α.

Определение 2.22. *Положим $W_n = \{U_\alpha | \alpha \in \Pi(\mathbf{n})\}$.*

Теорема 2.23. *Множество W_n, упорядоченное по включению, является решеткой.*

Если $U, V \in W_n$, то

(1) $U \wedge V = U \cap V$,

(2) $U \vee V = U + V$.

Отображение $\psi : \Pi(\mathbf{n}) \to W_n$, заданное формулой $\psi(\alpha) = U_\alpha$, является изоморфизмом решеток.

Доказательство. Равенства $U \wedge V = U \cap V$ и $U \vee V = U + V$ следуют из определений.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \Pi(\mathbf{n})$. Если $\alpha \leqslant \beta$, то $U_\alpha \subseteq U_\beta$ по определению. Если $U_\alpha \subseteq U_\beta$, то для любого блока $\alpha_i \in \alpha$ верно $e_{\alpha_i} = e_{\beta_{j_1}} + \cdots + e_{\beta_{j_k}}$. Это означает, что

$$\alpha_i = \beta_{j_1} \sqcup \cdots \sqcup \beta_{j_k}.$$

Так как любой блок $\alpha_i \in \alpha$ представляется в таком виде, получаем, что $\alpha \leqslant \beta$ в решетке $\Pi(\mathbf{n})$. Тогда из теоремы 2.16 и биективности ψ_α следует, что ψ_α – изоморфизм. □

Пример 2.24. Продолжая пример 2.4, рассмотрим диаграмму Хассе решетки W_3:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^3 \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle \arrow[dr, no head] & \langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle \arrow[d, no head] & \langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle \arrow[dl, no head] \\
 & \langle(1,1,1)\rangle &
\end{tikzcd}$$

§3. Отображения решеток разбиений и цепной ранг

В этом параграфе мы рассматриваем цепной ранг матрицы как ранг соответствующего отображения решеток разбиений.

Мы обозначаем через $\mathcal{P}$ множество всех неотрицательных матриц любых размеров без нулевых строк и столбцов, а через $\mathcal{P}_{n\times m}$ – множество $n \times m$ матриц из $\mathcal{P}$.

Определение 3.1. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$. Будем говорить, что строки i и j этой матрицы пересекаются, если существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant m$, что $(a_{ik}) > 0$ и $(a_{jk}) > 0$.*

Определение 3.2. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$. Будем говорить, что строки i и j связаны цепочкой, если существует такая последовательность строк $k_1, \dots, k_t$, что $i = k_1, k_t = j$ и k_i пересекается с k_{i+1} при $i = 1, \dots, t-1$.*

Предложение 3.3 ([1, лемма 2.1])**.** *Для матрицы $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ отношение связанности цепочкой является отношением эквивалентности на множестве ее строк.*

Хорошо известно ([12], [8, глава V, параграф 4.1]), что отношения эквивалентности на множестве X образуют решетку, изоморфную решетке $\Pi(X)$. Действительно, любое отношение эквивалентности задает разбиение на классы эквивалентности и наоборот. Непосредственно проверяется, что эта биекция является изоморфизмом.

Определение 3.4 ([1, определение 3.1])**.** *Для матрицы $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ количество классов эквивалентности по отношению связанности цепочкой называется цепным рангом и обозначается* $\operatorname{crk}(A)$. *Если* $\operatorname{crk}(A) = 1$, *то такая матрица называется цепной.*

Введенные классы эквивалентности задают разбиение множества строк матрицы A, и, что то же самое, разбиение множества $\mathbf{n}$. *Это разбиение назовем цепным разбиением матрицы A.*

Пример 3.5. Рассмотрим матрицу $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку M не имеет нулевых строк и столбцов, то $M \in \mathcal{P}_{4\times 4}$. Строки 1 и 3 пересекаются, как и строки 2 и 4. Поэтому $\operatorname{crk}(M) = 2$, цепное разбиение этой матрицы – $(\{1,3\},\{2,4\})$.

Определение 3.6. *Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathcal{P}_{n\times m}$ определим ассоциированный оператор $\mathcal{A}$: $2^{\mathbf{n}} \setminus \{0\} \to 2^{\mathbf{m}} \setminus \{0\}$ следующим образом: для любого непустого $\alpha \subseteq \mathbf{n}$ полагаем*

$$\alpha\mathcal{A} = \{j \in m |\ \exists i \in \alpha : (a_{ij}) > 0\}.$$

Пример 3.7. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\{1,2\}\mathcal{A} = \{1,2,3\},$$
$$\{1,3\}\mathcal{A} = \{1\},$$
$$\{2\}\mathcal{A} = \{2,3\}.$$

Цепной ранг A равен 2, цепное разбиение – $(\{1,3\},\{2\})$, так как строки 1 и 3 пересекаются.

Предложение 3.8 ([1, стр. 7])**.** *Матрица $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ не является цепной тогда и только тогда, когда найдется такое разбиение $\{\alpha, \bar{\alpha}\}$ множества $\mathbf{n}$, что множества $\alpha\mathcal{A}$ и $\bar{\alpha}\mathcal{A}$ образуют разбиение множества $\mathbf{m}$.*

В примере 3.7 матрица A не является цепной, а разбиение из предложения 3.8 – это $(\{1,3\},\{2\})$.

В этой работе мы расширяем понятие ассоциированного комбинаторного оператора до отображения из $\Pi(\mathbf{n})$ в $\Pi(\mathbf{m})$. Затем мы исследуем свойства этого отображения с точки зрения теории решеток и устанавливаем, как его свойства связаны с матрицей этого отображения. Эта связь позволит доказать неравенство Фробениуса для цепного ранга.

Определим отображение из $\Pi(\mathbf{n})$ в $\Pi(\mathbf{m})$, соответствующее некоторому ассоциированному оператору $\mathcal{A}$ (или, равносильно, матрице $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$).

Определение 3.9. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \Pi(\mathbf{n})$. Определим множество*

$$K_\alpha = \{(\rho_1, \dots, \rho_r) \in \Pi(\mathbf{m}) | \forall \alpha_i \in \alpha \ \exists \rho_j : \alpha_i\mathcal{A} \subseteq \rho_j\} \tag{3}$$

всех таких разбиений ρ, что для каждого блока α_i его образ $\alpha_i\mathcal{A}$ содержится в одном из блоков ρ.

Образ $\alpha\mathcal{A} \in \Pi(\mathbf{m})$ разбиения α определяется следующим образом:

$$\alpha\mathcal{A} = \bigvee K_\alpha. \tag{4}$$

Образ разбиения α можно получить с помощью следующей процедуры, которую можно рассматривать как конструктивное определение.

Алгоритм 3.10. Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \Pi(\mathbf{n})$.

Начальный шаг. *Построим множество $\Omega_0 = \{\alpha_1\mathcal{A}, \ldots, \alpha_s\mathcal{A}\}$ образов блоков из α.*

Цикл алгоритма. *Если найдется пара пересекающихся элементов*

$$\beta_1, \beta_2 \in \Omega_k; \quad \beta_1 \cap \beta_2 \neq \varnothing,$$

то строим новое множество $\Omega_{k+1} = (\Omega_k \setminus \{\beta_1, \beta_2\}) \cup \{\beta_1 \cup \beta_2\}$, т.е. объединяем пересекающиеся множества β_1, β_2 в одно. Если пересекающихся множеств в Ω_k нет, то алгоритм останавливается.

Множество Ω_0 конечно, причем либо $|\Omega_{k+1}| < |\Omega_k|$, либо Ω_k не имеет пересекающихся множеств, и алгоритм завершает работу на множестве Ω_k. Следовательно, алгоритм всегда заканчивает свою работу за конечное число шагов и останавливается на множестве Ω_l, элементы которого не пересекаются. Множество Ω_l является результатом работы алгоритма.

Предложение 3.11. *Результатом работы алгоритма* 3.10 *является разбиение $\alpha\mathcal{A}$ множества* $\mathbf{m}$.

Доказательство. Так как $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$, то для любого $i \in \mathbf{m}$ существует такое множество $\alpha_j\mathcal{A} \in \Omega_0$, что $i \in \alpha_j\mathcal{A}$. Кроме того, в Ω_l нет пересекающихся множеств, поэтому результатом работы алгоритма является разбиение множества $\mathbf{m}$. Обозначим это разбиение через $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$.

Заметим, что $\beta \in K_\alpha$. Действительно, любой блок $\beta_i \in \beta$ является объединением некоторых $\alpha_{j_1}\mathcal{A}, \ldots, \alpha_{j_k}\mathcal{A}$, поэтому β удовлетворяет условию

$$\forall \alpha_i \in \alpha\ \exists \beta_j : \alpha_i\mathcal{A} \subseteq \beta_j$$

из определения множества K_α.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p) \in K_\alpha$. Выберем любой блок разбиения α, который для удобства обозначим через α_1. Предположим, без ограничения общности, что $\alpha_1\mathcal{A} \subseteq \gamma_1 \in \gamma$ и $\alpha_1\mathcal{A} \subseteq \beta_1 \in \beta$, причем $\beta_1 = \alpha_1\mathcal{A} \cup \alpha_2\mathcal{A} \cup \ldots \cup \alpha_q\mathcal{A}$. Докажем, что $\beta_1 \subseteq \gamma_1$.

Если $q = 1$, то $\beta_1 = \alpha_1\mathcal{A} \subseteq \gamma_1$.

Если же $q > 1$, то существует такой индекс t_1, $1 < t_1 \leqslant q$, что $\alpha_1\mathcal{A}$ пересекается с $\alpha_{t_1}\mathcal{A}$, откуда $\alpha_{t_1}\mathcal{A} \subset \gamma_1$ по определению множества K_α. Если бы образ $\alpha_1\mathcal{A}$ не пересекался ни с одним другим образом, он бы был одним из блоков разбиения β. Аналогично, множество $\alpha_1\mathcal{A} \cup \alpha_{t_1}\mathcal{A}$

обязано пересекаться с множеством $\alpha_{t_2}\mathcal{A}$, где $1 < t_2 \leqslant q$, $t_2 \neq t_1$. Тогда $\alpha_{t_2}\mathcal{A} \subset \gamma_1$, и так далее для всех множеств $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. В итоге получаем, что $\alpha_1\mathcal{A} \cup \ldots \cup \alpha_q\mathcal{A} \subseteq \gamma_1$, откуда $\beta_1 \subseteq \gamma_1$.

В силу произвольности выбора блока α_1, мы доказали, что $\beta \geqslant \gamma$ для любого $\gamma \in K_\alpha$. Так как $\beta \in K_\alpha$, это означает, что $\beta = \bigvee K_\alpha$. □

Пример 3.12. Покажем, какому отображению разбиений соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ из примера 3.7. Имеем:

$$\begin{aligned} \theta\mathcal{A} &= (\{1\}, \{2,3\}), \\ (\{1,2\}, \{3\})\mathcal{A} &= \mathbf{0}, \\ (\{1\}, \{2,3\})\mathcal{A} &= \mathbf{0}, \\ (\{1,3\}, \{2\})\mathcal{A} &= (\{1\}, \{2,3\}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(\{1,2\}, \{3\}) \vee (\{1\}, \{2,3\}) = \theta,$$

но

$$\theta\mathcal{A} \neq (\{1,2\}, \{3\})\mathcal{A} \vee (\{1\}, \{2,3\})\mathcal{A} = \mathbf{0} \vee \mathbf{0},$$

поэтому $\mathcal{A}$ не является гомоморфизмом решеток. Следовательно, в общем случае, отображения, задаваемые матрицами согласно определению 3.9, не являются гомоморфизмами решеток.

Лемма 3.13. *Умножение матриц согласовано с операцией композиции ассоциированных отображений решеток, т.е. если $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$, $B \in \mathcal{P}_{m\times p}$ и $C = AB$, то для любого разбиения $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$ верно*

$$(\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \alpha\mathcal{C}.$$

Доказательство. По определению 3.9, $\alpha\mathcal{A}$ однозначно задается образами блоков $\alpha_i \in \alpha$, тогда как образы блоков $\alpha_i = \{j_1, \ldots, j_k\}$, в свою очередь, задаются образами своих одноэлементных подмножеств $\{j_1\}, \ldots, \{j_k\}$. Поэтому достаточно доказать, что для любого $i \in \mathbf{n}$ имеет место равенство

$$(\{i\}\mathcal{A})\mathcal{B} = \{i\}\mathcal{C}.$$

По определению 3.6, $\{i\}\mathcal{A} = \{j | (a_{ij}) > 0\}$. Значит,

$$(\{i\}\mathcal{A})\mathcal{B} = \{k \in \mathbf{p} | \ \exists j \in \mathbf{m} : \ (a_{ij}) > 0, \ (b_{jk}) > 0\}.$$

Правая часть равенства есть в точности множество $\{k \in \mathbf{p} | (c_{ik}) > 0\}$. □

Мы охарактеризуем отображения, соответствующие матрицам из $\mathcal{P}_{n\times m}$, в терминах теории решеток.

Определение 3.14. *Пусть X и Y – частично упорядоченные множества. Говорят, что отображение $f : X \to Y$ сохраняет порядок, если для любых $x, y \in X$ из $x \leqslant y$ следует $f(x) \leqslant f(y)$.*

Предложение 3.15. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$. Тогда отображение*

$$\mathcal{A} : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{m})$$

сохраняет порядок.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \Pi(\mathbf{n})$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \leqslant \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$. Вспоминая формулу (4), рассмотрим произвольное разбиение

$$\gamma \in K_\alpha = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in \Pi(\mathbf{m}) | \forall \alpha_i \in \alpha \ \exists \gamma_j : \alpha_i \mathcal{A} \subseteq \gamma_j\},$$

где K_α – это множество из определения 3.9. Так как $\beta \geqslant \alpha$, для любого $\beta_i \in \beta$ найдется такой блок $\alpha_j \in \alpha$, что $\beta_i \subseteq \alpha_j$, откуда $\beta_i \mathcal{A} \subseteq \alpha_j \mathcal{A}$ и, следовательно, образ любого β_i содержится в одном из блоков γ_k разбиения γ:

$$\forall \beta_i \in \beta \ \exists \gamma_k : \beta_i \mathcal{A} \subseteq \gamma_k.$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$\gamma \in K_\beta = \{(\rho_1, \ldots, \rho_r) \in \Pi(\mathbf{m}) | \forall \beta_i \in \beta \ \exists \rho_j : \beta_i \mathcal{A} \subseteq \rho_j\}.$$

В силу произвольности выбора γ, это означает, что

$$K_\alpha \subseteq K_\beta.$$

Тогда, по определению 3.9, мы получаем: $\alpha\mathcal{A} = \bigvee K_\alpha \leqslant \beta\mathcal{A} = \bigvee K_\beta$. □

Определение 3.16. *Отображение $f = f_\alpha : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{n})$ такое, что для любого разбиения $\beta \in \Pi(\mathbf{n})$ верно $f_\alpha(\beta) = \beta \wedge \alpha$, называется проекцией на разбиение α.*

Пример 3.17. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Соответствующее отображение $\mathcal{A} : \Pi(\mathbf{4}) \to \Pi(\mathbf{4})$ является проекцией на разбиение $(\{1, 2\}, \{3, 4\})$.

Замечание 3.18. Если $\beta \in U(\alpha)$ и $f_\alpha : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{n})$ – проекция на α, то $f_\alpha(\beta) = \beta$.

Предложение 3.19. *Образ* $f_\alpha(\Pi(\mathbf{n}))$ *проекции* $f_\alpha : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{n})$ – *это в точности идеал* $U(\alpha)$.

Доказательство. Так как для любого $\beta \in U(\alpha)$ выполняется равенство $f_\alpha(\beta) = \beta$, то $U(\alpha) \subseteq f_\alpha(\Pi(\mathbf{n}))$. Для любого $\gamma \in \Pi(\mathbf{n})$ имеем $\gamma \wedge \alpha \in U(\alpha)$, откуда $f_\alpha(\Pi(\mathbf{n})) \subseteq U(\alpha)$. □

Лемма 3.20. *Если* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ *и* $\mathrm{crk}A = k$, *то существуют такие матрицы-перестановки* P *и* Q, *что*

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

где каждый из блоков $A_s, s = 1, \ldots, k$, *является цепной матрицей.*

Доказательство. Из [9, лемма 1.3] получаем, что существуют такие матрицы-перестановки P и Q, что матрица PAQ – блочно-диагональная с p цепными блоками на диагонали для некоторого p, а из [1, предложение 3.3] известно, что для любых матриц-перестановок P, Q верно $\mathrm{crk}(PAQ) = \mathrm{crk}A$, откуда $p = k$. □

Предложение 3.21. *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ *и* ω – *цепное разбиение матрицы* A. *Тогда* $|\omega\mathcal{A}| = |\omega|$.

Доказательство. Пусть $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$. Предположим, что для каких-то $i, j \in \mathbf{s}$ множества $\omega_i\mathcal{A}$ и $\omega_j\mathcal{A}$ пересекаются, так что найдется такое $k \in \mathbf{m}$, что $k \in \omega_i\mathcal{A}$ и $k \in \omega_j\mathcal{A}$. Тогда, по определению цепного разбиения, $\omega_i = \omega_j$.

Если между множествами $\omega_i\mathcal{A}$ и $\omega_j\mathcal{A}$ нет пересечений при $i \neq j$, то $(\omega_1\mathcal{A}, \ldots, \omega_s\mathcal{A})$ – это разбиение множества $\mathbf{m}$ и $|\omega| = |\omega\mathcal{A}|$. □

Следствие 3.22. *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ *и* ω – *цепное разбиение матрицы* A. *Тогда для любого разбиения* $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$, *такого что* $\alpha \leqslant \omega$, *выполняется равенство* $|\alpha| = |\alpha\mathcal{A}|$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Без ограничения общности рассмотрим два блока $\alpha_1 = \omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \omega_{k_1}$ и $\alpha_2 = \omega_{k_1+1} \sqcup \ldots \sqcup \omega_{k_2}$. Множества $\omega_i\mathcal{A}$ и $\omega_j\mathcal{A}$ не пересекаются, если $i \neq j$. Так как

$$(\omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \omega_{k_1})\mathcal{A} = \omega_1\mathcal{A} \sqcup \ldots \sqcup \omega_{k_1}\mathcal{A},$$

то множества $\alpha_1\mathcal{A}$ и $\alpha_2\mathcal{A}$ также не пересекаются. □

Лемма 3.23. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ и ω – цепное разбиение матрицы A. Тогда для любого разбиения $\alpha \in \Pi(\mathbf{n})$ верно $(\alpha \wedge \omega)\mathcal{A} = \alpha\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ и $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$. Если для каких-то двух множеств α_i, α_j существует такое ω_k, что $\alpha_i \cap \omega_k \neq \varnothing$ и $\alpha_j \cap \omega_k \neq \varnothing$, то в разбиении $\alpha\mathcal{A}$ образы множеств α_i, α_j являются подмножествами одного блока:

$$\alpha_i\mathcal{A} \cup \alpha_j\mathcal{A} \subseteq \rho_x \in \alpha\mathcal{A}. \tag{5}$$

Действительно, если $p \in \alpha_i \cap \omega_k$ $q \in \alpha_j \cap \omega_k$, то, так как $p, q \in \omega_k$, получаем, что p и q связаны цепочкой. По определению 3.2, это означает, что существует такая последовательность чисел $p = v_1, v_2, \dots, v_r = q$, что при $l = 1, \dots, r-1$

$$\{v_l\}\mathcal{A} \cap \{v_{l+1}\}\mathcal{A} \neq \varnothing.$$

Обозначим через α_{k_l} тот блок разбиения α, для которого $v_l \in \alpha_{k_l}$. Не все эти блоки обязательно различны, но $\alpha_i = \alpha_{k_1}$ и $\alpha_j = \alpha_{k_r}$. Тогда при $i = 1, \dots, r-1$

$$\alpha_{k_i}\mathcal{A} \cap \alpha_{k_{i+1}}\mathcal{A} \neq \varnothing.$$

Следовательно, по алгоритму 3.10, все образы $\alpha_{k_l}\mathcal{A}$ окажутся в одном и том же блоке ρ_x разбиения $\alpha\mathcal{A}$.

Таким образом, $\alpha_i\mathcal{A}, \alpha_j\mathcal{A} \subseteq \rho_x$.

Мы показали, что если существует такой блок ω_k, что $\alpha_i \cap \omega_k \neq \varnothing$ и $\alpha_j \cap \omega_k \neq \varnothing$, то выполняется (5).

Так как $\mathcal{A}$ сохраняет порядок и $\alpha \wedge \omega \leqslant \alpha$, верно $\alpha\mathcal{A} \geqslant (\alpha \wedge \omega)\mathcal{A}$. Предположим, что $\alpha\mathcal{A} > (\alpha \wedge \omega)\mathcal{A}$. Тогда без ограничения общности можно считать, что существует такой блок $\sigma_1 \in (\alpha \wedge \omega)\mathcal{A}$, что

$$\sigma_1 = \rho_1 \sqcup \ldots \sqcup \rho_r,$$

где $\rho_i \in \alpha\mathcal{A}$, причем $r > 1$.

Нам осталось лишь вывести из этого, что существует пара таких блоков α_{j_1} и α_{j_2}, что $\alpha_{j_1}\mathcal{A} \subseteq \rho_{k_1} \in \alpha\mathcal{A}$ и $\alpha_{j_2}\mathcal{A} \subseteq \rho_{k_2} \in \alpha\mathcal{A}$, где $\rho_{k_1} \neq \rho_{k_2}, \rho_{k_1} \sqcup \rho_{k_2} \subseteq \sigma_1$, но при этом для этих блоков $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}$ выполняется (5). Действительно, (5) противоречит нашему предположению, что $\rho_{k_1} \neq \rho_{k_2}$.

Заметим, что $|\alpha \wedge \omega|\mathcal{A} = |\alpha \wedge \omega|$ по следствию 3.22, что означает, что блок σ_1 есть в точности образ одного блока $\delta_1 \in (\alpha \wedge \omega)$:

$$\sigma_1 = \delta_1\mathcal{A}.$$

Пусть, без ограничения общности, $\rho_1 \subseteq \sigma_1$ представляется в виде

$$\rho_1 = \alpha_1\mathcal{A} \cup \ldots \cup \alpha_p\mathcal{A}.$$

Тогда обозначим $H = \alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_p$, откуда $H\mathcal{A} = \rho_1$. Введем множество J всех таких $\omega_i \in \omega$, что $\omega_i \cap H \neq \varnothing$. Пусть, без ограничения общности, $J = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$. Введем $K = \bigsqcup J = \omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \omega_q$. Тогда $H \subseteq K$. Если $H \neq K$, то найдется такое ω_j, которое не содержится целиком в H. Это ω_j обязано пересекаться как с неким $\alpha_i \subseteq H$, так и с хотя бы одним блоком α_l, который не содержится в H, откуда для блоков α_i, α_l, выполняется (5), и теорема доказана.

Пусть $H = K$. Тогда $\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_p = \omega_1 \sqcup \ldots \sqcup \omega_q$, откуда следует, что множество $H = K$ – это объединение некоторого количества (возможно, одного) блоков разбиения $\alpha \wedge \omega$, т.е.

$$H = K = \delta_{l_1} \sqcup \ldots \sqcup \delta_{l_r}, \quad \delta_i \in (\alpha \wedge \omega), \quad r \geqslant 1.$$

Так как $H\mathcal{A} = \rho_1 \subset \sigma_1 = \delta_1\mathcal{A}$, получается, что $H = \delta_1$, но тогда $\rho_1 = \sigma_1$. Противоречие, ведь блок σ_1 должен содержать более одного блока разбиения $\alpha\mathcal{A}$. □

Следствие 3.24. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ и ω – цепное разбиение матрицы A. Тогда $\omega\mathcal{A} = \theta\mathcal{A}$.*

Доказательство. Из леммы 3.23 получаем $(\theta\wedge\omega)\mathcal{A}=\theta\mathcal{A}$, но $\theta \wedge \omega=\omega$. □

Следующая теорема характеризует отображения решеток, введенные в начале этого параграфа.

Теорема 3.25. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ и ω – цепное разбиение матрицы A. Тогда $\mathcal{A} : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{m})$ представляется в виде $\mathcal{A} = g \circ f_\omega$, где отображение $g : U(\omega) \to \Pi(\mathbf{m})$ является вложением, то есть $g : U(\omega) \to U(g(\omega))$ – изоморфизм, а отображение $f_\omega : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{n})$ является проекцией на ω.*

Доказательство. Пусть $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_s)$, тогда, по предложению 3.21,

$$\omega\mathcal{A} = (\omega_1\mathcal{A}, \ldots, \omega_s\mathcal{A}) = (\delta_1, \ldots, \delta_s).$$

По определению 3.9, для любого $\alpha \leqslant \omega$, если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ и

$$\alpha_i = \omega_{k_i^1} \sqcup \ldots \sqcup \omega_{k_i^{t(i)}}, \tag{6}$$

то

$$\alpha_i\mathcal{A} = \omega_{k_i^1}\mathcal{A} \sqcup \ldots \sqcup \omega_{k_i^{t(i)}}\mathcal{A}. \tag{7}$$

Из формул (6) и (7) видно, что для любых $\alpha, \beta \in U(\omega)$ неравенство $\alpha \leqslant \beta$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha\mathcal{A} \leqslant \beta\mathcal{A}$. По теореме 2.16, это означает, что биективное отображение

$$g : U(\omega) \to U(\omega\mathcal{A}) \subseteq \Pi(\mathbf{m}),$$

$$g(\alpha) = \alpha\mathcal{A}$$

является изоморфизмом, и можно записать

$$\alpha\mathcal{A} = (\alpha \wedge \omega)\mathcal{A} = g(\alpha \wedge \omega) = g(f_\omega(\alpha)). \qquad \square$$

§4. Неравенство Фробениуса для цепного ранга

4.1. Ранее известные неравенства с цепным рангом. Известно, что свойства цепного ранга в чем-то схожи со свойствами обычного ранга матриц. Рассмотрим, например, свойства ранга произведения матриц.

Теорема 4.1 ([1, теорема 3.1]). *Если для матриц $A, B \in \mathcal{P}$ существует произведение AB, то*

$$\mathrm{crk}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{crk}(A), \mathrm{crk}(B)\}.$$

Теорема 4.2 ([1, предложение 3.3]). *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$, а P, Q — матрицы-перестановки степени n и m соответственно. Тогда*

$$\mathrm{crk}(PAQ) = \mathrm{crk}(A).$$

Как доказано в [3, лемма 3.7], множество матриц с максимально возможным цепным рангом есть в точности множество матриц-перестановок.

В работе [3] рассмотрены свойства цепного индекса.

Определение 4.3. *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$. Цепной индекс матрицы A – это наименьшее натуральное k, для которого $\mathrm{crk}(A^k) = 1$. Если такого k не существует, то цепной индекс полагается равным нулю.*

Для получения верхней границы цепного индекса была доказана следующая теорема.

Теорема 4.4 ([3, теорема 3.5]). *Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\mathrm{crk}(A^{k+1}) = \mathrm{crk}(A^k)$, то $\mathrm{crk}(A^{k+t}) = \mathrm{crk}(A^k)$ при всех $t \in \mathbb{N}$.*

4.2. Доказательство неравенства Фробениуса.

Определение 4.5. *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ *и пусть* $\mathcal{A} : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{m})$ – *соответствующее отображение решеток.*

(i) *Цепной образ* $\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$ *отображения* $\mathcal{A}$ *– это множество*

$$\{\alpha \in \Pi(\mathbf{m})|\ \exists\beta \in \Pi(\mathbf{n}) : \beta\mathcal{A} = \alpha\}.$$

(ii) *Цепное ядро* $\mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$ *отображения* $\mathcal{A}$*– это множество*

$$\{\alpha \in \Pi(\mathbf{n})|\alpha\mathcal{A} = \mathbf{0}\}.$$

Теорема 4.6. *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$. *Тогда*

(i) *цепное ядро* $\mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$ *отображения* $\mathcal{A}$ *– это полуидеал;*

(ii) *цепной образ* $\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$ *отображения* $\mathcal{A}$ *– это идеал* $U = U(\theta\mathcal{A})$*;*

(iii) $\dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A} = \mathrm{crk}A$.

Доказательство. (i) следует из того, что отображение $\mathcal{A}$ сохраняет порядок.

(ii) следует из теоремы 3.25.

(iii) Если ω – цепное разбиение матрицы A, то $\mathrm{crk}(A) = |\omega| = |\theta\mathcal{A}|$. □

Пример 4.7. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Имеем:

$$\{1\}\mathcal{A} = \{1\}, \quad \{2\}\mathcal{A} = \{2,3\}, \quad \{3\}\mathcal{A} = \{2\}.$$

Запишем образы всех разбиений из решетки $\Pi(\mathbf{3})$:

$$\begin{aligned}
(\{1\},\{2\},\{3\})\mathcal{A} &= (\{1\},\{2,3\}),\\
(\{1\},\{2,3\})\mathcal{A} &= (\{1\},\{2,3\}),\\
(\{1,2\},\{3\})\mathcal{A} &= (\{1,2,3\}) = \mathbf{0},\\
(\{1,3\},\{2\})\mathcal{A} &= (\{1,2,3\}) = \mathbf{0},\\
(\{1,2,3\})\mathcal{A} &= (\{1,2,3\}) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Множество $\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$ – действительно идеал, состоящий из всех разбиений, являющихся укрупнениями разбиения $(\{1\},\{2,3\})$. С другой стороны, множество $\mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$, состоящее из трех разбиений, является полуидеалом, но не идеалом, так как $(\{1,2\},\{3\}) \vee (\{1,3\},\{2\}) = \theta$, но $\theta\mathcal{A} \neq \mathbf{0}$.

Лемма 4.8. *Пусть* $\alpha, \beta \in \Pi(\mathbf{n})$. *Тогда*

$$|\alpha \wedge \beta| + n \geqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Доказательство. Так как решетка $\Pi(\mathbf{n})$ изоморфна решетке W_n, то это неравенство можно записать для линейных подпространств $U_\alpha, U_\beta \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\dim(U_\alpha \cap U_\beta) + n \geqslant \dim U_\alpha + \dim U_\beta.$$

Данное неравенство выполняется для любых подпространств U_α, U_β в $\mathbb{R}^n$, так как

$$n \geqslant \dim(U_\alpha + U_\beta) = \dim U_\alpha + \dim U_\beta - \dim(U_\alpha \cap U_\beta). \qquad \square$$

Теорема 4.9 (Аналог теоремы о ранге)**.** *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$. *Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A} = n + 1.$$

Доказательство. Пусть ω – цепное разбиение матрицы A. Тогда $\alpha \in \operatorname{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$ в том и только том случае, когда $\alpha \wedge \omega = \mathbf{0}$. Доказательство этого утверждения состоит из двух частей.

1. Сначала докажем, что $\dim \operatorname{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A} \leqslant n + 1 - \dim \operatorname{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$.

Мы уже показали, что $|\omega| = \dim \operatorname{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$. Предположим, что найдется такое $\alpha \in \operatorname{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$, что $|\alpha| > n + 1 - |\omega|$. По лемме 4.8,

$$|\alpha \wedge \omega| \geqslant |\alpha| + |\omega| - n,$$

откуда

$$|\alpha \wedge \omega| > 1,$$

что противоречит нашему предположению, что $\alpha \wedge \omega \in \operatorname{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$.

2. Осталось доказать, что $\dim \operatorname{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A} \geqslant n+1-\dim \operatorname{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}$. Построим такое разбиение α, что $|\alpha| = n + 1 - |\omega|$ и $\alpha \wedge \omega = \mathbf{0}$. Пусть $|\omega| = s$ и

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s).$$

Обозначим через k_i мощность $|\omega_i|$, а через p – количество блоков разбиения ω, в которых больше одного элемента. Тогда, без ограничения общности, можно считать, что

$$(\omega_1, \ldots, \omega_s) = \bigl(\{i_1^1, \ldots, i_{k_1}^1\}, \{i_1^2, \ldots, i_{k_2}^2\}, \\ \ldots, \{i_1^p, \ldots, i_{k_p}^p\}, \{j_{p+1}\}, \{j_{p+2}\}, \ldots, \{j_s\}\bigr),$$

где $k_l > 1$ при $l = 1, \ldots, p$ и $k_l = 1$ при $l = p + 1, \ldots, s$. Построим новое разбиение α следующим образом.

2.1. При $l < p+1$ и $1 < m < k_l$ элемент i^l_m лежит в своем одноэлементном блоке разбиения α. Также i^1_1 образует одноэлементный блок, если $p > 0$.

2.2. Каждая пара $i^l_{k_l}, i^{l+1}_1$ при $l = 1, \ldots, p-1$ образует двухэлементный блок разбиения α.

2.3. Наконец, при $p < s$ элементы $i^p_{k_p}$ и все j_t лежат в одном блоке разбиения α. Если $p = s$, то $i^p_{k_p}$ образует одноэлементный блок.

Таким образом,

$$\alpha = (\{i^1_1\}, \{i^1_2\}, \ldots, \{i^1_{k_1-1}\}, \{i^1_{k_1}, i^2_1\}, \{i^2_2\}, \ldots, \{i^2_{k_2-1}\},$$

где

$$\ldots$$

$$\{i^{p-1}_{k_{p-1}}, i^p_1\}, \{i^p_2\}, \ldots, \{i^p_{k_p-1}\}, \{i^p_{k_p}, j_1, \ldots, j_s\}).$$

При $i = 1, \ldots, s-1$ множества ω_i и ω_{i+1} лежат в одном блоке разбиения $\omega \wedge \alpha$. Действительно, для любой пары ω_i, ω_{i+1} найдется такой двухэлементный блок ρ разбиения α, что $\rho \cap \omega_i \neq \varnothing$ и $\rho \cap \omega_{i+1} \neq \varnothing$. Поэтому $\omega \wedge \alpha = \mathbf{0}$,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{p} (k_i - 1) + 1.$$

Но так как при $i > p$ имеем $k_i = 1$, то сумму можно переписать в виде

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{s} (k_i - 1) + 1,$$

где $k_1 + \cdots + k_s = n$, откуда

$$|\alpha| = n - s + 1$$

и, следовательно, $|\alpha| = n + 1 - |\omega| = n + 1 - \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} \mathcal{A}$. □

Обозначение 4.10. Пусть $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$, $\mathcal{A} : \Pi(\mathbf{n}) \to \Pi(\mathbf{m})$ и $U \subseteq \Pi(\mathbf{n})$ – идеал решетки $\Pi(\mathbf{n})$. Обозначим через $\mathcal{A}_U$ ограничение отображения $\mathcal{A} : U \to \Pi(\mathbf{m})$. Образ и ядро отображения $\mathcal{A}_U$ соответственно определяются как

$$\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} \mathcal{A}_U = \{\alpha \in \Pi(\mathbf{m}) |\ \exists \beta \in U : \beta\mathcal{A} = \alpha\}$$

и

$$\mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}} \mathcal{A}_U = \{\alpha \in U | \alpha\mathcal{A} = \mathbf{0}\}.$$

Следствие 4.11. *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ *и* U *– идеал в решетке* $\Pi(\mathbf{n})$. *Тогда*

$$\dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}_U + \dim \mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}_U = \dim U + 1.$$

Доказательство. Идеал $U = U(\alpha)$ изоморфен $\Pi(\mathbf{s})$, где $s = |\alpha|$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Матрица $F \in \mathcal{P}_{s\times n}$, в которой $(F)_{ij} = 1$, если $j \in \alpha_i$, и 0 в противном случае, задает вложение $\phi_\alpha = \mathcal{F} : \Pi(\mathbf{s}) \to \Pi(\mathbf{n})$, такое что $\phi_\alpha(\Pi(\mathbf{s})) = U$.

Так как $\mathcal{F}$ является вложением, $\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{F}\mathcal{A} = \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}_U$ и $\mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{F}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{A}_U$. Но, по лемме 3.13, для матрицы $FA \in \mathcal{P}_{s\times m}$ имеем

$$\dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}}\mathcal{F}\mathcal{A} + \dim \mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}}\mathcal{F}\mathcal{A} = s + 1. \qquad \square$$

Теорема 4.12 (Неравенство Фробениуса для цепного ранга)**.** *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}, B \in \mathcal{P}_{m\times p}, C \in \mathcal{P}_{p\times q}$. *Тогда*

$$\mathrm{crk}(AB) + \mathrm{crk}(BC) \leqslant \mathrm{crk}(ABC) + \mathrm{crk}(B).$$

Доказательство. Имеем:

$$\dim \mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}} C_{\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} B} = \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} B - \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} BC + 1,$$

$$\dim \mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}} C_{\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} AB} = \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} AB - \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} ABC + 1.$$

Так как $\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} AB \subseteq \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} B$, то

$$\dim \mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}} C_{\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} B} \geqslant \dim \mathrm{Ker}_{\mathrm{ch}} C_{\mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} AB},$$

откуда

$$\dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} B - \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} BC + 1 \geqslant \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} AB - \dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} ABC + 1.$$

Вспомним, что $\dim \mathrm{Im}_{\mathrm{ch}} M = \mathrm{crk}(M)$. Мы получили неравенство Фробениуса для цепного ранга. $\square$

Следствие 4.13 (Неравенство Сильвестра)**.** *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times m}$ *и пусть* $C \in \mathcal{P}_{m\times p}$. *Тогда*

$$\mathrm{crk}(A) + \mathrm{crk}(C) \leqslant \mathrm{crk}(AC) + m.$$

Доказательство. Запишем неравенство Фробениуса для матрицы $B = E \in \mathcal{P}_{m\times m}$:

$$\mathrm{crk}(AE) + \mathrm{crk}(EC) \leqslant \mathrm{crk}(AC) + \mathrm{crk}(E),$$
$$\mathrm{crk}(A) + \mathrm{crk}(C) \leqslant \mathrm{crk}(AC) + m. \qquad \square$$

Теперь, с учетом теоремы 4.1, мы имеем и верхнюю, и нижнюю границы цепного ранга произведения двух матриц.

Следующее следствие обобщает теорему 4.4.

Следствие 4.14. *Пусть* $A \in \mathcal{P}_{n\times n}$. *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ *верно неравенство*

$$\mathrm{crk}(A^k) - \mathrm{crk}(A^{k+1}) \leqslant \mathrm{crk}(A^{k-1}) - \mathrm{crk}(A^k).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{crk}(AB) + \mathrm{crk}(BC) \leqslant \mathrm{crk}(ABC) + \mathrm{crk}(B).$$

Положим $B = A^{k-1}$ и $C = A$. Тогда

$$\mathrm{crk}(A^k) + \mathrm{crk}(A^k) \leqslant \mathrm{crk}(A^{k+1}) + \mathrm{crk}(A^{k-1}). \qquad \square$$

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. А. Альпину за введение в предмет и ценные обсуждения.

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 5–25.
2. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 5–20.
3. Ю. А. Альпин, А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Верхняя граница цепного индекса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2023), 5–17.
4. Ю. А. Альпин, А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Цепные свойства полугрупп неотрицательных матриц.* — Сиб. электр. матем. изв., принято к публикации (2024).
5. В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, *Комбинаторика неотрицательных матриц.* ТВП, 2000.
6. G. Birkhoff, *Lattice Theory.* American Mathematical Society, 1967.
7. B. A. Davey, H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge University Press, 2002.
8. G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation.* Birkhäuser, Basel, 2011.
9. D. J. Hartfiel, C. J. Maxson, *The chainable matrix, a special combinatorial matrix.* — Discrete Math. **12** (1975), 245–256.
10. O. Ore, *Theory of Equivalence Relations.* —J. Symb. Logic **8**, No.1 (1943), 55-56.
11. P. Pudlák, J. Tuma, *Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice.* — Algebra Universalis **10** (1980), 74–95.
12. P. M. Whitman, *Lattices, equivalence relations, and subgroups.* — Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 507–522 .

Guterman A. E., Shafeev E. R. Frobenius and Sylvester inequalities for the chainable rank.

This paper shows that any nonnegative $n \times m$ matrix free of zero rows and columns determines a map of the partition lattice of the set of cardinality n into the partition lattice of the set of cardinality m. These maps have certain properties similar to those of linear maps on vector spaces. In particular, for such maps the rank function is correctly defined and possesses a number of properties of the ordinary rank, including an upper bound for the rank of a matrix product. However, so far no lower bound has been established. In this paper, the counterpart of the Frobenius inequality for the above rank function is proved and, as a corollary, the Sylvester bound, providing a lower bound for the rank of a matrix product, is obtained.

Университет Бар-Илан,
5290002 Рамат-Ган, Израиль
E-mail: alexander.guterman@biu.ac.il

Поступило 15 октября 2024 г.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
119991 Москва, Россия;
Московский центр
фундаментальной и прикладной математики,
119991, Москва, Россия
E-mail: shafeev.ev@yandex.ru