Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 534, 2024 г.

А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, К. Д. Муханов

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ВЗАИМНО ОРТОГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Важным объектом исследований в различных кольцах и алгебрах являются определенные на них бинарные отношения. Одним из эффективных подходов к их изучению является введение соответствующих графов отношений. Вершинами такого графа являются элементы некоторого подмножества кольца, при этом две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие элементы состоят в этом отношении. На данный момент основной интерес представляют графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля.

В настоящей работе мы сосредоточимся на изучении отношения ортогональности в алгебре всех квадратных матриц порядка n над произвольным полем и в алгебре верхнетреугольных матриц. Матрицы A и B будем называть ортогональными, если $AB = BA = 0$. Граф ортогональности матриц порядка n над полем был впервые введён в работе Бахадлы, Гутермана и Марковой [1]. Было доказано, что при $n = 2$ этот граф несвязен и диаметр его компонент связности не превосходит 2, а при $n \geqslant 3$ он связен и имеет диаметр 4. В статье [3] аналогичные утверждения были доказаны для кольца матриц над телом. Позднее Стырт [5] рассмотрел граф ортогональности кольца матриц над коммутативным кольцом: было доказано, что граф ортогональности кольца матриц порядка не меньше 2 над коммутативным нецелостным кольцом связен и имеет диаметр либо 3, либо 4.

В работе [7] был также рассмотрен граф ортогональности алгебры верхнетреугольных матриц над полем. Было доказано, что для матриц порядка не меньше 3 этот граф связен и его диаметр равен 4.

Отметим, что отношение ортогональности матриц играет центральную роль в целом ряде фундаментальных и прикладных вопросов, см.

Ключевые слова: матрицы, верхнетреугольные матрицы, графы отношений, граф ортогональности, алгебраические многообразия, конечномерные алгебры.

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 22-11-00052.

работы [2, 12, 13], в которых изучаются частичные порядки на матричной алгебре и отображения, монотонные относительно этих порядков. Матричные порядки широко используются в различных областях алгебры и имеют применение в математической статистике и других областях математики [8].

Алгебраическая геометрия предлагает еще один способ изучения графов отношений, а именно, через связанные с ними аффинные алгебраические многообразия. Так, в работе [10] были рассмотрены множества пар элементов, находящихся в графе коммутативности алгебры квадратных матриц на расстоянии, не превосходящем заданное число d. Было доказано, что если $d = 2$ или поле алгебраически замкнуто, то такое множество является аффинным алгебраическим многообразием. Для многообразия пар элементов на расстоянии не больше 2 были описаны неприводимые компоненты и найдены их размерности. Также было показано, что если поле не является алгебраически замкнутым, то множество, соответствующее $d > 2$, не всегда является многообразием.

Целью данной работы является перенос результатов статьи [10] на случай графа ортогональности алгебры квадратных матриц порядка n. В отличие от графа коммутативности, рассматриваемые множества пар элементов являются аффинными многообразиями над любым полем. Тем не менее, для разложения многообразия на неприводимые компоненты при $d = 1$ и доказательства неприводимости многообразий при $d \in \{2, 3\}$ требуется предположение о бесконечности поля.

Работа построена следующим образом: В §2 приведены основные определения, обозначения и утверждения, используемые в работе. §3 посвящён многообразию пар взаимно ортогональных матриц, в частности, перечислены его неприводимые компоненты и вычислены их размерности. В §§4 и 5 соответственно показано, что пары матриц, допускающие расстояние 2 и 3, образуют неприводимые многообразия над любым бесконечным полем. В §6 рассмотрены аналогичные многообразия в алгебре верхнетреугольных матриц и приведено разложение этих многообразий на неприводимые компоненты. Наконец, в §7 дано обобщение полученных результатов на произвольные (возможно, неассоциативные) конечномерные алгебры. В частности, из теоремы 7.1 следует, что множество элементов конечномерной алгебры, находящихся на расстоянии не более n, является аффинным алгебраическим многообразием над алгебраически замкнутым полем, а теорема 7.4 обобщает этот результат на случай произвольного поля при $n = 2$. В §8 описаны перспективы обобщения изучаемых многообразий на проективный случай и даны примеры соответствующих многообразий, возникающих в различных конечномерных алгебрах.

§2. Предварительные сведения

Пусть $\Bbbk$ – некоторое поле, $n \geqslant 2$ и $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ – множество $n \times n$ матриц над полем $\Bbbk$. Иногда мы будем писать $\mathrm{Mat}_{n\times n}$, если поле $\Bbbk$ заранее определено. Мы будем называть матрицы A и B взаимно ортогональными, если $AB = BA = 0$.

Мы также будем отождествлять аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ с $\Bbbk^n$.

Определение 2.1 (Замкнутое подмножество аффинного (проективного) пространства). *Подмножество $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{P}^n)$ называется замкнутым, если оно состоит из всех точек, в которых одновременно обращается в 0 конечное число многочленов (однородных многочленов) с коэффициентами из $\Bbbk$.*

Определение 2.2 (Квазипроективное многообразие). *Квазипроективным многообразием называется открытое подмножество замкнутого подмножества проективного пространства.*

Определение 2.3 (Аффинное многообразие). *Квазипроективное многообразие X, изоморфное замкнутому подмножеству аффинного пространства, мы будем называть аффинным алгебраическим многообразием.*

Определение 2.4 (Проективное многообразие). *Квазипроективное многообразие X, изоморфное замкнутому подмножеству проективного пространства, мы будем называть проективным алгебраическим многообразием.*

Аффинные и проективные многообразия являются квазипроективными.

Определение 2.5 (Проективизация векторного пространства). *Проективизацией векторного пространства V (обозначается $\mathbb{P}(V)$) называется множество одномерных подпространств $l \subset V$, проходящих через начало координат.*

Определение 2.6 (Проективное замыкание)**.** *Проективным замыканием аффинного многообразия X называется наименьшее проективное многообразие, содержащее X.*

Определение 2.7 (Приводимое и неприводимое множества)**.** *Замкнутое множество X называется приводимым, если существуют такие замкнутые подмножества*

$$X_1, X_2 \subset X,\ X_1 \neq X \neq X_2,$$

что $X = X_1 \cup X_2$. В противном случае X называется неприводимым.

Рассматривая пары матриц $(A, B) \in \mathrm{Mat}^2_{n\times n}(\Bbbk)$ как точки в $2n^2$-мерном пространстве $\Bbbk^{2n^2}$, мы можем говорить об аффинном многообразии пар взаимно ортогональных матриц. Данное многообразие задается набором из $2n^2$ уравнений

$$\begin{aligned} (XY)_{ij} &= 0, \quad i, j = 1, \ldots, n; \\ (YX)_{ij} &= 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

где $(X)_{ij}$ обозначает элемент на пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы X. В настоящей работе мы изучим это многообразие, а также обобщим понятие взаимной ортогональности на конечные последовательности матриц в кольце квадратных матриц и в подмножестве верхнетреугольных матриц.

Определим граф ортогональности $\mathrm{O}(\mathrm{Mat}_{n\times n})$ для кольца квадратных матриц. Вершинами графа являются вырожденные ненулевые матрицы. Любые две взаимно ортогональные матрицы соединены ребром в этом графе. Естественным образом встает вопрос о связности данного графа и диаметрах его неприводимых компонент.

При $n \geqslant 3$ граф ортогональности связен над любым полем, и его диаметр равен 4 [1, теорема 4.5]. При $n = 2$ граф ортогональности не является связным, а диаметры его компонент связности не превосходят 2 [1, лемма 4.1].

Если граф связен, то для любых двух ненулевых матриц A и B определено расстояние между соответствующими вершинами графа $\mathrm{O}(\mathrm{Mat}_{n\times n})$.

Теперь мы можем задать функцию $\mathrm{d}(A, B)$ на множестве всех пар вырожденных матриц. Для двух различных ненулевых вырожденных матриц значение функции $\mathrm{d}(A, B)$ будет равно расстоянию между соответствующими вершинами графа ортогональности. Если A и B лежат в разных компонентах связности графа ортогональности, то

$\mathrm{d}(A,B) = \infty$. Положим $\mathrm{d}(A,B) = 1$, если ровно одна из матриц A и B равна нулю, и $\mathrm{d}(A,B) = 0$, если $A = B$.

Можно доопределить функцию $\mathrm{d}(A,B)$ и в том случае, когда одна или обе матрицы невырожденные. Для двух различных ненулевых матриц положим $\mathrm{d}(A,B) = \infty$, если хотя бы одна из матриц невырожденная. Если одна из матриц A и B невырожденная, а вторая равна нулю, то $\mathrm{d}(A,B) = 1$. Если невырожденные матрицы A и B равны, то $\mathrm{d}(A,B) = 0$. Однако в настоящей работе мы ограничимся изучением пар вырожденных матриц.

Далее именно функцию $\mathrm{d}(A,B)$ мы будем называть расстоянием между матрицами. Определим множество O_n^m пар $n \times n$ матриц, расстояние между которыми не превосходит m:

$$\mathrm{O}_n^m = \{(A,B) \mid \mathrm{d}(A,B) \leqslant m\} \subset \mathrm{Mat}^2_{n\times n}\,.$$

При $n \geqslant 3$ диаметр графа равен 4, а значит, при $m \geqslant 4$ верно равенство $\mathrm{O}_n^m = \mathrm{O}_n^4$. При $n = 2$ и $m \geqslant 2$ верно равенство $\mathrm{O}_2^m = \mathrm{O}_2^2$.

В данной работе мы также будем использовать следующее определение.

Определение 2.8 (Матрицы, допускающие расстояние m)**.** *Мы будем говорить, что пара матриц $(A,B) \in \mathrm{Mat}^2_{n\times n}$ допускает расстояние m, если выполнены следующие условия:*

(1) $\mathrm{d}(A,B) \leqslant m$*;*

(2) *существуют матрицы $C_i \neq 0$, $i = 1\ldots, m-1$, такие что*

$$A \perp C_1 \perp \cdots \perp C_{m-1} \perp B.$$

Далее $\widehat{\mathrm{O}}_n^m$ будет обозначать множество пар матриц, допускающих расстояние m. Заметим, что данное множество является подмножеством O_n^m.

Замечание 2.9. Не любая пара матриц на расстоянии l допускает расстояние $m > l$. Следующие примеры демонстрируют этот факт.

Пример 2.10. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

где матрица 0_{n-1} состоит из нулей, а I_{n-1} – единичная матрица порядка $n-1$. Тогда $\mathrm{d}(A,B) = 1$, но не существует такой ненулевой матрицы C, что $A \perp C \perp B$.

Следовательно, данная пара матриц не допускает расстояние 2.

Пример 2.11. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot I_{n-1} \end{pmatrix},$$

где матрица 0_{n-1} состоит из нулей, а I_{n-1} – единичная матрица порядка $n-1$. Тогда $A \perp C \perp B$ и $\mathrm{d}(A,B) = 2$, но не существует таких ненулевых матриц C', D', что $A \perp C' \perp D' \perp B$.

Отсюда следует, что пара матриц (A, B) не допускает расстояние 3.

Далее в работе мы будем рассматривать именно множества $\widehat{\mathrm{O}}_n^m$. Множество пар матриц на расстоянии не больше 1 будет включать в себя пары (A, A) одинаковых вырожденных матриц и все пары матриц, которые удовлетворяют соотношению $AB = BA = 0$.

Множество пар матриц на расстоянии не больше 2 будет включать в себя пары матриц предыдущего множества O_n^1, а также все пары матриц, для которых найдется такая ненулевая матрица C, что $A \perp C \perp B$. Для последующих множеств работают те же рассуждения.

Таким образом, множество пар матриц O_n^m всегда можно представить как объединение двух множеств:

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_n^1 &= \widehat{\mathrm{O}}_n^1 \cup \{(A, A) \in \mathrm{Mat}^2_{n\times n} \mid \det A = 0\}, \\ \mathrm{O}_n^2 &= \widehat{\mathrm{O}}_n^2 \cup \mathrm{O}_n^1, \\ \mathrm{O}_n^3 &= \widehat{\mathrm{O}}_n^3 \cup \mathrm{O}_n^2\,. \end{aligned}$$

Объединение конечного числа алгебраических многообразий является алгебраическим многообразием. Следовательно, для доказательства того, что O_n^1 является алгебраическим многообразием, достаточно доказать, что множество $\widehat{\mathrm{O}}_n^1$ является алгебраическим многообразием.

Последовательно доказывая, что множества $\widehat{\mathrm{O}}_n^m$ являются алгебраическими многообразиями, мы докажем, что множества O_n^m также являются алгебраическими многообразиями. Так как при $1 \leqslant m \leqslant 3$ множества O_n^{m-1} и $\widehat{\mathrm{O}}_n^m$ не содержатся друг в друге, то из приводимости O_n^{m-1} или $\widehat{\mathrm{O}}_n^m$ как многообразия будет следовать приводимость многообразия O_n^m. При этом размерность многообразия O_n^m будет равна размерности наибольшей неприводимой компоненты многообразий O_n^{m-1} и $\widehat{\mathrm{O}}_n^m$. Полезным будет следующий факт.

Лемма 2.12. *Пусть дана последовательность взаимно ортогональных матриц* $A = P_0 \perp P_1 \perp \cdots \perp P_k \perp B = P_{k+1}$. *Тогда матрицы* $P_1, \ldots, P_k$ *можно заменить на матрицы ранга* 1.

Доказательство. Ненулевой столбец c матрицы P_i лежит в ядрах матриц P_{i-1} и P_{i+1}. Аналогично, ненулевая строка r матрицы P_i лежит в ядрах транспонированных матриц P_{i-1}^T и P_{i+1}^T. Матрицу P_i можно заменить на матрицу $P_i' = c \cdot r$ ранга 1. □

Определение 2.13 (Регулярное отображение). *Пусть* $f\colon X \longrightarrow Y$ *– отображение квазипроективных многообразий и* $Y \subset \mathbb{P}^m$. *Это отображение называется регулярным, если для любой точки* $x \in X$ *и открытого аффинного множества* $V \subset \mathbb{A}^m$, *содержащего точку* $f(x)$, *существует такая окрестность* $U \ni x$, *что* $f(U) \subset V$ *и отображение* $f\colon U \longrightarrow V$ *задается набором полиномов* $f_1, \ldots, f_m$, *таких что* $f(x) = (f_1(x), \ldots f_m(x))$ *для всех* $x \in U$.

Определение 2.14 (Размерность многообразия). *Размерность неприводимого многообразия* X *– это наибольшее число* $n \in \mathbb{N}$, *для которого существует цепочка таких неприводимых замкнутых подмногообразий* $X_i \subset X$, $i = 0, \ldots, n$, *что*

$$\varnothing \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X.$$

Размерность приводимого многообразия равна наибольшей из размерностей его неприводимых компонент.

Определение 2.15 (Слой отображения). *Если задано регулярное отображение квазипроективных многообразий* $f\colon X \longrightarrow Y$, $y \in Y$, *то замкнутое множество* $f^{-1}(y)$ *называется слоем над точкой* y.

Теорема 2.16 ([6, глава 1, §5, теорема 3]). *Пусть* $\Bbbk$ *– алгебраически замкнутое поле. Если* X *– проективное многообразие, а* Y *– квазипроективное многообразие, то проекция* $p\colon X \times Y \longrightarrow Y$ *переводит замкнутые множества в замкнутые.*

Лемма 2.17. *Пусть* X *– непустое неприводимое множество и пусть* $f : X \longrightarrow Y$ *– непрерывное отображение. Тогда* $f(X)$ *– неприводимое множество.*

Доказательство. Предположим, что $f(X) = Y_1 \cup Y_2$, где Y_i – замкнутые подмножества $f(X)$. Тогда $X = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$, причём $f^{-1}(Y_1)$ и $f^{-1}(Y_2)$ – замкнутые подмножества X. Так как X – неприводимое множество, то $f^{-1}(Y_1) = X$ или $f^{-1}(Y_2) = X$, откуда $f(X) = Y_1$ или $f(X) = Y_2$. □

Для вычисления размерностей многообразий мы будем использовать следующую теорему.

Теорема 2.18 ([6, глава 1, §6, теорема 7])**.** *Пусть* $\Bbbk$ *– алгебраически замкнутое поле. Если* $f\colon X \longrightarrow Y$ *– регулярное отображение неприводимых многообразий,* $f(X) = Y$*, то* $\dim Y \leqslant \dim X$ *и*

(1) *для любой точки* $y \in Y$ *и для любой компоненты* F *слоя* $f^{-1}(y)$ *выполняется неравенство* $\dim F \geqslant \dim X - \dim Y$*;*
(2) *в* Y *существует такое непустое открытое множество* U*, что для* $y \in U$ *имеет место равенство* $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$*.*

Следующая теорема понадобится нам для изучения множества O_n^3 над незамкнутыми полями.

Теорема 2.19 ([10, лемма 2.12])**.** *Пусть* $\Bbbk$ *– некоторое поле и* K *– его алгебраическое расширение. Если* $V \subset K^n$ *является аффинным многообразием над* K*, то* $V \cap \Bbbk^n$ *является аффинным многообразием над* $\Bbbk$*.*

Напомним, что если поле $\Bbbk$ бесконечно, то аффинное пространство $\Bbbk^n$ является неприводимым, так как допускает параметризацию $x_i = t_i$ [4, глава 4, §5, предложение 5]. Аффинное многообразие матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ изоморфно аффинному пространству $\Bbbk^{n^2}$ и, следовательно, является неприводимым. Квазипроективное многообразие невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ является неприводимым как открытое подмножество неприводимого множества $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ [11, предложение 4.5].

§3. Множество пар матриц на расстоянии не более 1

Рассмотрим множество пар матриц, допускающих расстояние 1.

Теорема 3.1. *Множество* $\widehat{\mathrm{O}}_n^1$ *является аффинным многообразием над любым полем* $\Bbbk$*. Если поле* $\Bbbk$ *бесконечно, то многообразие* $\widehat{\mathrm{O}}_n^1$ *имеет* $n-1$ *неприводимую компоненту*

$$\widehat{\mathrm{O}}_n^1 = \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i, \tag{3.1}$$

где

$$X_i = \{(A, B) \in \mathrm{Mat}_{n\times n} \mid AB = BA = 0,\ \mathrm{rank}\, A \leqslant i,\ \mathrm{rank}\, B \leqslant n - i\}.$$

Над алгебраически замкнутым полем размерность каждой компоненты равна n^2.

Доказательство. Множество $\widehat{\mathrm{O}}_n^1$ задается набором уравнений

$$AB = BA = 0, \quad \det A = 0, \quad \det B = 0$$

в $\mathrm{Mat}^2_{n\times n}(\Bbbk)$, а значит, является аффинным многообразием над любым полем.

Покажем, что представление (3.1) действительно является разложением на неприводимые компоненты. Заметим, что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$. Теперь докажем, что многообразие X_i является неприводимым.

Пусть $Y_i \subset X_i$ – множество пар (A, B), где ранг матрицы A в точности равен i. Для любой матрицы A ранга i найдутся такие невырожденные матрицы P и Q, что

$$PAQ = A' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где единичный блок I имеет размеры $i \times i$. Обозначим через Z_i множество пар матриц, состоящих из матрицы A' и матриц, взаимно ортогональных с ней. Множество матриц, ортогональных A', состоит из матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

Ранг таких матриц не превосходит $n - i$. Множество Z_i изоморфно аффинному пространству $\Bbbk^{(n-i)^2}$ и, следовательно, неприводимо над бесконечным полем.

Рассмотрим отображение

$$\begin{gathered} \varphi\colon\ \mathrm{GL}_n^2 \times Z_i \longrightarrow \mathrm{Mat}^2_{n\times n}, \\ (P, Q, (A', B)) \longmapsto (PA'Q, Q^{-1}BP^{-1}). \end{gathered}$$

Заметим, что $\varphi(\mathrm{GL}_n^2 \times Z_i) = Y_i$. Так как множество $\mathrm{GL}_n^2 \times Z_i$ является неприводимым многообразием, его образ при регулярном отображении также будет неприводимым по лемме 2.17. Переходя к замыканию $\overline{Y_i} = X_i$, мы делаем вывод о неприводимости X_i.

Чтобы найти размерность X_i, рассмотрим его проекцию на многообразие матриц ранга не больше i:

$$\pi\colon X_i \longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathrm{rank}\leqslant i}, \quad \pi((A,B)) = A.$$

Размерность $\mathrm{Mat}_{\mathrm{rank}\leqslant i}$ равна $n^2-(n-i)^2$, а размерность слоя $\pi^{-1}(A)$ над открытым множеством матриц ранга i равна $(n-i)^2$.

Из леммы 2.18 и неприводимости X_i следует, что

$$\dim X_i = n^2-(n-i)^2+(n-i)^2 = n^2. \qquad \square$$

Остается рассмотреть множество пар матриц на расстоянии 0. Множество O_n^0 состоит из пар одинаковых вырожденных матриц (A,A), а значит, изоморфно многообразию вырожденных матриц

$$\Omega_n = \{A \mid \det(A) = 0\}.$$

Следовательно, O_n^0 является неприводимым алгебраическим многообразием и имеет размерность n^2-1.

Таким образом, многообразие O_n^1 является объединением многообразий пар матриц, допускающих расстояние 1, и пар матриц на расстоянии 0,

$$\mathrm{O}_n^1 = \widehat{\mathrm{O}}_n^1 \cup \mathrm{O}_n^0,$$

а его размерность равна размерности наибольшей неприводимой компоненты:

$$\dim \mathrm{O}_n^1 = \dim X_i = n^2.$$

§4. Множество пар матриц на расстоянии не более 2

В данном параграфе мы будем рассматривать тройки взаимно ортогональных матриц $A \perp C \perp B$. Так как не все пары матриц на расстоянии 1 допускают расстояние 2, мы начнем с изучения множества $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$.

Теорема 4.1. *Множество $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$ является алгебраическим многообразием над любым полем.*

Доказательство. Пусть A, B, C – матрицы с элементами a_{ij}, b_{ij} и c_{ij}. Матрица A взаимно ортогональна с матрицей C, если для всех i, j выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = 0, \qquad \sum_{l=1}^{n} a_{lj}c_{il} = 0.$$

Аналогично, для матриц B и C имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj} = 0, \qquad \sum_{l=1}^{n} b_{lj}c_{il} = 0.$$

Записав матрицу C в виде вектора-столбца $\mathbf{c}$, мы можем переписать эти уравнения в виде

$$M_{A,B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Здесь матрица $M_{A,B}$ имеет размеры $4n^2 \times n^2$, и все ее элементы являются линейными функциями от a_{ij}, b_{ij}. Множество матриц C, ортогональных A и B, образует векторное пространство. Для того, чтобы выполнялось условие $\mathrm{d}(A,B) = 2$, размерность пространства решений должна быть не меньше 1. Согласно теореме о размерности ядра и образа, это равносильно тому, что $\mathrm{rank}(M_{A,B})$ не превосходит $n^2 - 1$. Таким образом, обращение $n^2 \times n^2$ миноров в ноль будет задавать многообразие $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$. □

Теорема 4.2. *Многообразие $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$ является неприводимым над любым бесконечным полем.*

Доказательство. Пусть A, B и C – такие матрицы, что $A \perp C \perp B$. Рассмотрим множество

$$X = \bigl\{(A,B,C) \mid A \perp C \perp B,\ \mathrm{rank}\, C \leqslant 1\bigr\} \subset \mathrm{Mat}^2_{n\times n} \times \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n}).$$

Применяя преобразования строк и столбцов одновременно к матрицам A, B, C, приведем их к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix},$$

где A_{n-1} и B_{n-1} – некоторые матрицы размеров $(n-1) \times (n-1)$, а 0_{n-1} – блок из нулей размеров $(n-1) \times (n-1)$.

Рассмотрим отображение $\pi_1\colon\ \mathrm{GL}_n^2 \times \mathrm{Mat}^2_{(n-1)\times(n-1)} \longrightarrow X$, заданное формулой

$$(M, N, A_{n-1}, B_{n-1}) \longmapsto$$
$$\left(N^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} M^{-1},\ N^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix} M^{-1},\ M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} N\right).$$

Заметим, что π_1 – сюръективное отображение.

Так как многообразие $\mathrm{GL}_n^2 \times \mathrm{Mat}^2_{(n-1)\times(n-1)}$ является неприводимым над бесконечным полем, его образ при регулярном отображении также будет неприводимым по лемме 2.17. Следовательно, X – неприводимое многообразие.

Теперь рассмотрим проекцию

$$\pi_2\colon X \longrightarrow \widehat{\mathrm{O}}_n^2, \quad \pi_2((A,B,C)) = (A,B).$$

Так как π_2 – сюръективное отображение и его образ неприводим по лемме 2.17, то многообразие $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$ будет неприводимым. □

Теорема 4.3. *Над алгебраически замкнутым полем размерность многообразия* $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$ *равна* $2n^2 - 2n$.

Доказательство. Пусть многообразие X определено, как в прошлой теореме. Зададим множество матриц

$$Y = \{C \mid \operatorname{rank} C \leqslant 1\} \subset \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n}).$$

Множество Y является неприводимым многообразием. Применим теорему 2.18 к проекции π_1:

$$\pi_1\colon X \longrightarrow Y, \quad \pi_1((A,B,C)) = C.$$

Для этого заметим, что над Y все слои имеют одинаковую размерность $2(n-1)^2$. Так как многообразия X и Y неприводимы, то для некоторой матрицы $C \in Y$ верно следующее равенство:

$$\dim X = \dim Y + \dim \pi_1^{-1}(C) = (2n-2) + 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2n.$$

Теперь рассмотрим проекцию π_2:

$$\pi_2\colon X \longrightarrow \widehat{\mathrm{O}}_n^2, \quad \pi_2((A,B,C)) = (A,B).$$

Определим множество $U \subset \widehat{\mathrm{O}}_n^2$:

$$U = \{(A,B) \in \widehat{\mathrm{O}}_n^2 \mid \operatorname{rank} A = n-1,\ \operatorname{rank} B = n-1\}.$$

Данное множество является открытым как дополнение объединения многообразий

$$\{(A,B) \in \widehat{\mathrm{O}}_n^2 \mid \operatorname{rank} A \leqslant n-2\} \cup \{(A,B) \in \widehat{\mathrm{O}}_n^2 \mid \operatorname{rank} B \leqslant n-2\}$$

до многообразия $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$.

Для любой пары матриц $(A,B) \in U$ размерность слоя $F = \pi_2^{-1}((A,B))$ равна 0. Действительно, матрицу C ранга 1, ортогональную A и B, можно представить в виде произведения векторов $u \cdot v^T$. Так как вектор u принадлежит множеству $\ker A \cap \ker B$ размерности 1, то $u = \lambda u_0$ для некоторого вектора u_0. Аналогично, $v = \mu v_0$ для некоторого вектора $v_0 \in \ker A^T \cap \ker B^T$.

Таким образом, множество матриц $\{C = \lambda\mu u_0 \cdot v_0^T\}$ имеет размерность 1 в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ и 0 в $\mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n})$. Применим теорему 2.18 к проекции π_2, чтобы посчитать размерность:

$$\dim U = \dim X - \dim F = (2n^2 - 2n) - 0 = 2n^2 - 2n.$$

В силу неприводимости $\widehat{\mathrm{O}}_n^2$, имеем:

$$\dim \widehat{\mathrm{O}}_n^2 = \dim U = 2n^2 - 2n. \qquad \square$$

Осталось заметить, что многообразие O_n^2 является объединением многообразий пар матриц, допускающих расстояние 2, и пар матриц на расстоянии не более 1:

$$\mathrm{O}_n^2 = \widehat{\mathrm{O}}_n^2 \cup \mathrm{O}_n^1 .$$

Размерность O_n^2 равна размерности наибольшей неприводимой компоненты:

$$\dim \mathrm{O}_n^2 = \dim \widehat{\mathrm{O}}_n^2 = 2n^2 - 2n.$$

§5. Множество пар матриц на расстоянии не более 3

Как и в предыдущем параграфе, мы начнем с изучения множества пар матриц, допускающих расстояние 3. Заметим, что, в силу [1, лемма 4.1], это возможно только при $n \geqslant 3$.

Теорема 5.1. *Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле. Тогда множество $\widehat{\mathrm{O}}_n^3$ является алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные четверки взаимно ортогональных матриц (A, B, C, D), где $A \perp C \perp D \perp B$, причем матрицы C и D определены с точностью до пропорциональности и не равны нулю.

Условие взаимной ортогональности задает замкнутое множество Φ:

$$\Phi = \big\{(A, B, C, D) \mid AC = CA = 0,\ CD = DC = 0,\ BD = DB = 0\big\} \\ \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}^2 \times \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n}) \times \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n}).$$

Рассмотрим проекцию

$$\pi\colon\ \mathrm{Mat}^2_{n\times n}\times\mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n})\times\mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n})\longrightarrow\mathrm{Mat}^2_{n\times n}.$$

По теореме 2.16, образ $\pi(\Phi)$ будет замкнутым множеством, так как поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Отсюда следует, что $\widehat{\mathrm{O}}^3_n$ является алгебраическим многообразием. □

Следующая лемма потребуется для доказательства того, что множество $\widehat{\mathrm{O}}^3_n$ остается многообразием над любым полем.

Лемма 5.2. *Пусть $\Bbbk$ – некоторое поле и K – его алгебраическое замыкание. Если матрицы $A,B\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ допускают расстояние* 3 *над полем K, то они допускают расстояние* 3 *и над полем $\Bbbk$.*

Доказательство. Рассмотрим пару матриц (A,B) над полем $\Bbbk$. Пусть для данной пары матриц существуют такие две матрицы C и D над алгебраическим замыканием K поля $\Bbbk$, что $A\perp C\perp D\perp B$.

По лемме 2.12, можно считать, что матрицы C и D имеют ранг 1. Значит, их можно представить в виде произведения двух векторов из K^n. Пусть $C=u_1\cdot v_1^T$, а $D=u_2\cdot v_2^T$, где $u_1,v_1,u_2,v_2\in K^n$ – некоторые векторы-столбцы. Условия ортогональности означают, что $Au_1=A^Tv_1=Bu_2=B^Tv_2=0$ и $v_1^T\cdot u_2=v_2^T\cdot u_1=0$.

Теперь покажем, что существуют такие векторы $u_1',v_1',u_2',v_2'\in\Bbbk^n$, что

$$A\perp u_1'\cdot {v_1'}^T\perp u_2'\cdot {v_2'}^T\perp B.$$

Это утверждение очевидно, если хотя бы одно из чисел $\dim\ker A$ $(=\dim\ker A^T)$ и $\dim\ker B$ $(=\dim\ker B^T)$ превосходит 1. В противном случае, имеем $u_1=\alpha_1u_1'$, $v_1=\beta_1v_1'$, $u_2=\alpha_2u_2'$ и $v_2=\beta_2v_2'$ для некоторых $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in K$ и $u_1',v_1',u_2',v_2'\in\Bbbk^n$. Отсюда немедленно вытекают требуемые соотношения. □

Следствие 5.3. *Для произвольной пары вырожденных матриц $A,B\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ выполнено $\mathrm{d}_K(A,B)=\mathrm{d}_\Bbbk(A,B)$.*

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{d}_K(A,B)\leqslant\mathrm{d}_\Bbbk(A,B)$. Заметим, что если $\mathrm{d}_K(A,B)=1$, то и $\mathrm{d}_\Bbbk(A,B)=1$.

Если $\mathrm{d}_K(A,B)=2$, то $\mathrm{d}_\Bbbk(A,B)\leqslant 2$, так как ранг матрицы $M_{A,B}$ из уравнения (4.1) не зависит от поля. Следовательно, в этом случае, $\mathrm{d}_\Bbbk(A,B)=2$.

Случай, когда $\mathrm{d}_K(A,B)=3$, непосредственно следует из леммы 5.2.

Поскольку при $n \geqslant 3$ диаметр графа ортогональности равен 4 над любым полем, то из $\mathrm{d}_K(A,B)=4$ следует, что $\mathrm{d}_{\Bbbk}(A,B)=4$, а вариант $\mathrm{d}_K(A,B)>4$ невозможен. $\square$

Таким образом, расстояние между матрицами в графе ортогональности не меняется при переходе к алгебраическому замыканию поля. Данный факт позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 5.4. *Множество $\widehat{\mathrm{O}}_n^3$ является аффинным алгебраическим многообразием над любым полем.*

Доказательство. По лемме 5.2, имеем

$$\widehat{\mathrm{O}}_n^3(\Bbbk) = \widehat{\mathrm{O}}_n^3(K) \cap \mathrm{Mat}^2_{n\times n}(\Bbbk).$$

Мы знаем, что $\widehat{\mathrm{O}}_n^3(K)$ является аффинным алгебраическим многообразием. Следовательно, по теореме 2.19, его пересечение с аффинным пространством $\mathrm{Mat}^2_{n\times n}(\Bbbk)$ также является аффинным алгебраическим многообразием. $\square$

Теперь покажем, что над бесконечным полем многообразие $\widehat{\mathrm{O}}_n^3$ неприводимо.

Теорема 5.5. *Многообразие $\widehat{\mathrm{O}}_n^3$ является неприводимым над любым бесконечным полем.*

Доказательство. Пусть A, B, C и D – такие матрицы, что $A \perp C \perp D \perp B$. Рассмотрим множество

$$X = \{(A,B,C,D) \mid A \perp C \perp D \perp B,\ \operatorname{rank} C \leqslant 1,\ \operatorname{rank} D \leqslant 1\} \subset \mathrm{Mat}^2_{n\times n} \times \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{n\times n})^2.$$

Применяя преобразования строк и столбцов одновременно к матрицам A, B, C, D, приведем матрицу C к виду

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы A и D будут иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{n-1} \end{pmatrix},$$

где A_{n-1} и D_{n-1} – некоторые матрицы размеров $(n-1)\times(n-1)$, а 0_{n-1} – блок из нулей размеров $(n-1)\times(n-1)$.

Далее будем применять преобразования, которые не меняют первый столбец и строку. Матрицы таких преобразований будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n, \quad P \in \mathrm{GL}_{n-1}\,.$$

Они позволяют привести матрицу D_{n-1} к виду

$$D = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

не меняя матрицу C.

После преобразований матрицы A, B, C, D будут иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $\pi_1\colon\ \mathrm{GL}_n^2 \times \mathrm{Mat}^2_{(n-1)\times(n-1)} \longrightarrow X$, заданное формулой:

$$(M, N, A_{n-1}, B_{n-1}) \longmapsto \Bigg(N^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} M^{-1}, \quad M\begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N,$$
$$M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} N, \quad N^{-1}\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}\Bigg).$$

Заметим, что π_1 – сюръективное отображение.

Так как многообразие $\mathrm{GL}_n^2 \times \mathrm{Mat}^2_{(n-1)\times(n-1)}$ неприводимо над бесконечным полем, его образ при регулярном отображении также будет неприводимым по лемме 2.17. Следовательно, X – неприводимое многообразие.

Теперь рассмотрим проекцию

$$\pi_2\colon X \longrightarrow \widehat{\mathrm{O}}^3_n, \quad \pi_2((A, B, C, D)) = (A, B).$$

Так как π_2 – сюръективное отображение и его образ неприводим по лемме 2.17, многообразие $\widehat{\mathrm{O}}^3_n$ будет неприводимым. $\square$

Теперь вычислим размерность многообразия.

Теорема 5.6. *Размерность многообразия* $\widehat{\mathrm{O}}_n^3$ *над алгебраически замкнутым полем равна* $2n^2 - 4$.

Доказательство. Пусть многообразие X определено, как в прошлой теореме. Зададим множество пар матриц

$$Y = \{(C, D) \mid C \perp D,\ \operatorname{rank} C \leqslant 1,\ \operatorname{rank} D \leqslant 1\} \subset \mathbb{P}^2(\mathrm{Mat}_{n\times n}).$$

Множество Y является неприводимым квазипроективным многообразием. Применим теорему 2.18 к проекции π_1:

$$\pi_1 \colon X \longrightarrow Y, \quad \pi_1((A, B, C, D)) = (C, D).$$

Заметим, что над Y все слои имеют одинаковую размерность $2(n-1)^2$.

Размерность многообразия матриц ранга не больше 1 равна $2n - 1$, а размерность соответствующего проективного многообразия равна $2n-2$. С помощью обратимых преобразований матрицу ранга 1 можно привести к виду

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда множество матриц ранга не больше 1, взаимно ортогональных с матрицей C', будет изоморфно многообразию $(n - 1) \times (n - 1)$ матриц ранга не больше 1. Таким образом, размерность слоя равна $2n - 3$ в аффинном случае и $2n - 4$ после проективизации. Следовательно, размерность многообразия Y равна $(2n - 2) + (2n - 4) = 4n - 6$.

Так как многообразия X и Y неприводимы, то для некоторой пары $(C, D) \in Y$ верно следующее равенство:

$$\dim X = \dim Y + \dim \pi_1^{-1}(C, D) = (4n - 6) + 2(n - 1)^2 = 2n^2 - 4.$$

Теперь рассмотрим проекцию π_2:

$$\pi_2 \colon X \longrightarrow \widehat{\mathrm{O}}_n^3, \quad \pi_2((A, B, C, D)) = (A, B).$$

Определим множество $U \subset \widehat{\mathrm{O}}_n^3$:

$$U = \{(A, B) \in \widehat{\mathrm{O}}_n^3 \mid \operatorname{rank} A = n - 1,\ \operatorname{rank} B = n - 1\}.$$

Данное множество является открытым как дополнение объединения многообразий

$$\{(A, B) \in \widehat{\mathrm{O}}_n^3 \mid \operatorname{rank} A \leqslant n - 2\} \cup \{(A, B) \in \widehat{\mathrm{O}}_n^3 \mid \operatorname{rank} B \leqslant n - 2\}$$

до многообразия $\widehat{\mathrm{O}}_n^3$.

Для любой пары матриц $(A,B)\in U$ слой $F=\pi_2^{-1}((A,B))$ имеет нулевую размерность. Действительно, матрицу C ранга 1, ортогональную A, можно представить в виде произведения векторов $u\cdot v^T$. Причем u принадлежит множеству $\ker A$ размерности 1, так что $u=\lambda u_0$ для некоторого вектора u_0. Аналогично, $v=\mu v_0$ для некоторого вектора $v_0\in\ker A^T$.

Таким образом, множество матриц $\{C=\lambda\mu u\cdot v^T\}$ имеет размерность 1, а после проективизации – 0. Аналогично, множество матриц D имеет размерность 1 в аффинном случае и 0 после проективизации.

Применим теорему 2.18 к проекции π_2:

$$\dim U=\dim X-\dim F=(2n^2-4)-0=2n^2-4.$$

В силу неприводимости $\widehat{\mathrm{O}}_n^3$, имеем

$$\dim\widehat{\mathrm{O}}_n^3=\dim U=2n^2-4. \qquad\square$$

Осталось заметить, что многообразие O_n^3 является объединением многообразий пар матриц, допускающих расстояние 3, и пар матриц на расстоянии не более 2:

$$\mathrm{O}_n^3=\widehat{\mathrm{O}}_n^3\cup\mathrm{O}_n^2\,.$$

Размерность O_n^3 равна размерности наибольшей неприводимой компоненты:

$$\dim\mathrm{O}_n^3=\dim\widehat{\mathrm{O}}_n^3=2n^2-4.$$

§6. Верхнетреугольные матрицы

В данном параграфе мы обобщим рассматриваемый сюжет на множество верхнетреугольных матриц T_n. Мы будем следовать тем же идеям, что и в предыдущей части работы.

Множество невырожденных верхнетреугольных матриц будет обозначаться через B_n.

Заметим, что диаметр компонент связности графа ортогональности верхнетреугольных матриц не превосходит 2 для $n=2$ [7, лемма 2.2], а при $n\geqslant 3$ диаметр графа равен 4 [7, теорема 2.8]. Следовательно, нас будут интересовать матрицы на расстоянии не более 1, 2 и 3.

Определим множество TO_n^m пар верхнетреугольных матриц на расстоянии не более m и множество $\widehat{\mathrm{TO}}_n^m$ пар верхнетреугольных матриц, допускающих расстояние m, аналогично множествам O_n^m и $\widehat{\mathrm{O}}_n^m$ соответственно.

Заметим, что данные множества будут являться многообразиями. Это следует из того, что приведенные выше доказательства не зависят от значений элементов ниже главной диагонали.

Покажем, что любую верхнетреугольную матрицу в последовательности взаимно ортогональных матриц можно заменить на верхнетреугольную матрицу ранга 1.

Лемма 6.1. *Пусть дана последовательность взаимно ортогональных верхнетреугольных матриц $A = P_0 \perp P_1 \perp \cdots \perp P_k \perp B = P_{k+1}$. Тогда матрицы $P_1, \dots P_k$ можно заменить на верхнетреугольные матрицы ранга* 1.

Доказательство. Ненулевой столбец c матрицы P_i лежит в ядрах матриц P_{i-1} и P_{i+1}. Аналогично, ненулевая строка r матрицы P_i лежит в ядрах транспонированных матриц P_{i-1}^T и P_{i+1}^T.

Умножим ненулевой столбец матрицы P_i на строку, соответствующую последнему ненулевому элементу выбранного столбца. Пусть номер строки равен k, тогда в данной строке первые $k-1$ элементов обязательно равны 0. После перемножения выбранных столбца и строки ненулевые элементы могут стоять только в первых k строках. Во всех строках первые $k-1$ элементов равны 0.

Таким образом матрицу P_i можно заменить на матрицу $P_i' = c \cdot r$ ранга 1, причем P_i' – верхнетреугольная матрица. □

Далее нам понадобится новое определение и лемма из работы [14].

Определение 6.2 (Обобщенная матрица-перестановка)**.** *Матрица $Q \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ называется обобщенной матрицей-перестановкой, если в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы находится не более одного ненулевого элемента, и этот элемент может принимать только значение* 1.

Определение 6.3. *Пусть $I, J \subset [n] := \{1, \dots, n\}$ и пусть $A[I,J]$ обозначает подматрицу матрицы A, состоящую из элементов $a_{i,j}$, где $i \in I$ и $j \in J$. Тогда*

$$r^{i,j}(A) := \operatorname{rank} A[[n] \setminus [n-i], [j]]$$

– ранг левой нижней подматрицы размера $i \times j$. Положим $r^{0,j}(A) = r^{i,0}(A) = 0$.

Лемма 6.4 ([14, лемма 2.2]). *Двойные смежные классы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ по паре подгрупп $(\mathrm{B}_n, \mathrm{B}_n)$ определены набором инвариантов $r^{i,j}(A)$. Для каждого смежного класса единственным образом определена обобщенная матрица-перестановка Q, такая что $A \in \mathrm{B}_n\, Q\, \mathrm{B}_n$. При этом элементы матрицы Q задаются следующим правилом:*

$$q_{n-i+1,j} = r^{i,j}(A) - r^{i-1,j}(A) - r^{i,j-1}(A) + r^{i-1,j-1}(A).$$

Заметим, что если верхнетреугольная матрица A лежит в смежном классе $\mathrm{B}_n\, Q\, \mathrm{B}_n$, то обобщенная матрица-перестановка Q также будет верхнетреугольной.

Далее $Q_{i,j}$ будет обозначать обобщенную матрицу-перестановку, равную матричной единице $E_{i,j}$.

Замечание 6.5. Прямыми вычислениями можно показать, что верхнетреугольная матрица

$$\widehat{Q}_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & \overset{i}{\downarrow} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

в которой единицы стоят на всех местах, кроме i-го столбца и j-ой строки, взаимно ортогональна только с одной обобщенной матрицей-перестановкой $Q_{i,j}$.

Таким образом, множества матриц, взаимно ортогональных с обобщенными матрицами-перестановками ранга 1, не содержатся друг в друге.

Начнем с матриц, допускающих расстояние 1.

Теорема 6.6. *Пусть поле $\Bbbk$ бесконечно. Многообразие пар верхнетреугольных матриц, допускающих расстояние 1, состоит из неприводимых компонент $Z_{Q_1Q_2}$, соответствующих парам (Q_1, Q_2) диагональных матриц из 0 и 1, где $Q_1 + Q_2$ – единичная матрица порядка n.*

Доказательство. Пусть Q_1 и Q_2 – диагональные матрицы из 0 и 1, I_n – единичная матрица порядка n, причем $Q_1 + Q_2 = I_n$. Из данного равенства следует, что $Q_1 \perp Q_2$ и $\operatorname{rank} Q_1 + \operatorname{rank} Q_2 = n$. Рассмотрим замыкание двойного смежного класса диагональной матрицы Q с элементами 0 и 1 на диагонали:

$$\overline{\mathrm{B}_n \, Q \, \mathrm{B}_n}.$$

По лемме 2.17, многообразие $\overline{\mathrm{B}_n \, Q \, \mathrm{B}_n}$ является неприводимым как образ $\mathrm{B}_n \times B_n$ – произведения неприводимых многообразий.

Так как при перемножении верхнетреугольных матриц соответствующие диагональные элементы матриц перемножаются, то матрица Q в многообразии $\overline{\mathrm{B}_n \, Q \, \mathrm{B}_n}$ будет единственной диагональной матрицей ранга $\operatorname{rank} Q$ с 0 и 1 на диагонали.

Определим многообразие $Z_{Q_1Q_2}$ следующим образом:

$$Z_{Q_1Q_2} = \left\{(A, B) \mid A \perp B, \ A \in \overline{\mathrm{B}_n \, Q_1 \, \mathrm{B}_n}, \ B \in \overline{\mathrm{B}_n \, Q_2 \, \mathrm{B}_n}\right\} \subset \mathrm{T}_n^2 \, .$$

Заметим, что в $Z_{Q_1Q_2}$ содержится ровно одна пара диагональных матриц из 0 и 1, ранги которых равны $\operatorname{rank} Q_1$ и $\operatorname{rank} Q_2$ соответственно. Это пара (Q_1, Q_2).

Пусть $Y_{Q_1Q_2} \subset Z_{Q_1Q_2}$ – множество пар (A, B), где $A \in \mathrm{B}_n \, Q_1 \, \mathrm{B}_n$. Для любой матрицы $A \in \mathrm{B}_n \, Q_1 \, \mathrm{B}_n$ найдутся такие невырожденные верхнетреугольные матрицы S и T, что

$$SAT = Q_1.$$

Обозначим множество пар матриц, состоящих из матрицы Q_1 и матриц, взаимно ортогональных с ней, через V_{Q_1}. Множество верхнетреугольных матриц, взаимно ортогональных с матрицей Q_1, задается равенством нулю строк и столбцов, соответствующих единичным элементам матрицы Q_1, и равенством нулю элементов ниже главной диагонали. Если в матрице Q_1 элемент на пересечении i-ой строки и j-го столбца равен единице, то во взаимно ортогональной матрице i-ый столбец и j-ая строка состоят из нулей. Следовательно, данное множество изоморфно аффинному пространству и является неприводимым многообразием над бесконечным полем.

Рассмотрим отображение

$$\begin{gathered} \varphi\colon \ \mathrm{B}_n^2 \times V_{Q_1} \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times n}^2, \\ (S, T, (Q_1, B)) \longmapsto (SQ_1T, T^{-1}BS^{-1}). \end{gathered}$$

Заметим, что $\varphi(\mathrm{B}_n^2 \times V_{Q_1}) = Y_{Q_1 Q_2}$. Так как множество $\mathrm{B}_n^2 \times V_{Q_1}$ является неприводимым многообразием, его образ при регулярном отображении также будет неприводимым по лемме 2.17. Взяв замыкание $\overline{Y_{Q_1 Q_2}} = Z_{Q_1 Q_2}$, мы делаем вывод о неприводимости $Z_{Q_1 Q_2}$.

Заметим, что $Z_{Q_1 Q_2} \not\subset Z_{Q'_1 Q'_2}$ для разных пар матриц. Это следует из того, что пара матриц $(Q_1, Q_2) \in Z_{Q_1 Q_2}$ не принадлежит множеству $Z_{Q'_1 Q'_2}$. Действительно, если $\operatorname{rank} Q_1 \geqslant \operatorname{rank} Q'_1$, то $Q_1 \notin \overline{\mathrm{B}_n\, Q'_1\, \mathrm{B}_n}$. В случае $\operatorname{rank} Q_1 < \operatorname{rank} Q'_1$, рассмотрим вторую матрицу в паре. Из условия на сумму рангов следует, что $\operatorname{rank} Q_2 \geqslant \operatorname{rank} Q'_2$ и, следовательно, $Q_2 \notin \overline{\mathrm{B}_n\, Q'_2\, \mathrm{B}_n}$. □

Далее мы приведем разложение на неприводимые компоненты многообразий $\widehat{\mathrm{TO}}_n^2$ и $\widehat{\mathrm{TO}}_n^3$.

Теорема 6.7. *Пусть поле* $\Bbbk$ *бесконечно. Тогда многообразие пар верхнетреугольных матриц, допускающих расстояние* 2, *состоит из* $\frac{n(n+1)}{2}$ *неприводимых компонент*

$$Z_{i,j} = \{(A, B) \mid \exists\, C \in \mathrm{B}_n\, Q_{i,j}\, \mathrm{B}_n,\ A \perp C \perp B\} \subset \mathrm{T}_n^2,$$

где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Доказательство. Множество невырожденных верхнетреугольных матриц B_n является аффинным алгебраическим многообразием. Определим многообразие X:

$$X = \{(A, B, C_1, C_2) \mid A \perp C_1 Q_{i,j} C_2 \perp B\} \subset \mathrm{T}_n^2 \times \mathbb{P}^2(\mathrm{B}_n).$$

По теореме 2.16, при проекции $\mathrm{T}_n^2 \times \mathbb{P}^2(\mathrm{B}_n) \longrightarrow \mathrm{T}_n^2$ образом многообразия X будет алгебраическое многообразие $Z_{i,j}$.

Пусть A, B и C – такие верхнетреугольные матрицы, что $A \perp C \perp B$ и $C \in \mathrm{B}_n\, Q_{i,j}\, \mathrm{B}_n$. Применяя преобразования строк и столбцов, задаваемые верхнетреугольными матрицами, одновременно к матрицам A, B, C, приведем матрицу C к обобщенной матрице-перестановке $Q_{i,j}$. Пусть при этом матрица A перейдет в некоторую матрицу A', а матрица B – в B'.

Поскольку ненулевой элемент матрицы $Q_{i,j}$ стоит на пересечении i-ой строки и j-го столбца, то в матрицах A' и B' в i-ом столбце и j-ой строке должны стоять нули. Множество верхнетреугольных матриц, взаимно ортогональных с $Q_{i,j}$, образует векторное пространство $V_{i,j}$.

Для доказательства неприводимости множества $Z_{i,j}$ рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathrm{B}_n^2 \times V_{i,j}^2 &\longrightarrow Z_{i,j}, \\ (M,N,A,B) &\longmapsto (NAM, NBM). \end{aligned}$$

Заметим, что π – сюръективное отображение.

Так как многообразие $\mathrm{B}_n^2 \times V_{i,j}^2$ является неприводимым над бесконечным полем, то его образ при регулярном отображении также будет неприводимым по лемме 2.17. Следовательно, $Z_{i,j}$ – неприводимая компонента многообразия $\widehat{\mathrm{TO}}_n^2$.

Заметим, что множество $Z_{i,j}$ не содержится в множестве $Z_{k,l}$ при $i \neq k$ или $j \neq l$. Действительно, многообразие $Z_{i,j}$ определяется классом смежности матрицы C. Многообразие $Z_{i,j}$ содержит пару матриц $(\widehat{Q}_{i,j}, \widehat{Q}_{i,j})$, описанных в замечании 6.5. Осталось заметить, что данная пара матриц взаимно ортогональна только с матрицей $Q_{i,j}$ и, следовательно, не может содержаться в другой неприводимой компоненте. $\square$

В случае расстояния 3 мы будем действовать аналогичным образом.

Теорема 6.8. *Пусть поле $\Bbbk$ бесконечно. Многообразие пар верхнетреугольных матриц, допускающих расстояние* 3, *состоит из неприводимых компонент $Z_{i,j,k,l}$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$, $i \neq l$ и $j \neq k$.*

Доказательство. Определим многообразие X:

$$X = \big\{(A,B,C_1,C_2,D_1,D_2) \mid A \perp C_1 Q_{i,j} C_2 \perp D_1 Q_{k,l} D_2 \perp B\big\} \subset \mathrm{T}_n^2 \times \mathbb{P}^4(\mathrm{B}_n).$$

По теореме 2.16, образом многообразия X при проекции

$$\mathrm{T}_n^2 \times \mathbb{P}^4(\mathrm{B}_n) \longrightarrow \mathrm{T}_n^2$$

будет алгебраическое многообразие $Z_{i,j,k,l}$:

$$Z_{i,j,k,l} = \big\{(A,B) \mid \exists C \in \mathrm{B}_n\, Q_{i,j}\, \mathrm{B}_n,\ \exists D \in \mathrm{B}_n\, Q_{k,l}\, \mathrm{B}_n,\ A \perp C \perp D \perp B\big\} \subset \mathrm{T}_n^2\,.$$

Рассмотрим пару матриц (C,D) отдельно. Применяя преобразования строк и столбцов, задаваемые верхнетреугольными матрицами, одновременно к матрицам C, D, приведем матрицу C к обобщенной матрице-перестановке $Q_{i,j}$. Тогда в i-ом столбце и в j-ой строке матрицы D будут стоять нули.

Обратившись к формуле из леммы 6.4, можно заметить, что в обобщенной матрице-перестановке $Q_{k,l}$, лежащей в одном смежном классе с матрицей D, в i-ом столбце и в j-ой строке стоят нули. Отсюда следует, что $i \neq l$ и $j \neq k$.

Пусть теперь A, B, C и D – такие верхнетреугольные матрицы, что $A \perp C \perp D \perp B$, причем $C \in \mathrm{B}_n\, Q_{i,j}\, \mathrm{B}_n$ и $D \in \mathrm{B}_n\, Q_{k,l}\, \mathrm{B}_n$.

Применяя преобразования строк и столбцов, задаваемые верхнетреугольными матрицами, одновременно к матрицам A, B, C, D, приведем матрицу C к обобщенной матрице-перестановке $Q_{i,j}$.

Далее рассмотрим множество X_0:

$$X_0 = \{(A, B, Q_{i,j}, D) \mid A \perp Q_{i,j} \perp D \perp B,\ D \in \mathrm{B}_n\, Q_{k,l}\, \mathrm{B}_n\} \subset \mathrm{T}_n^4 .$$

Так как матрица $Q_{i,j}$ взаимно ортогональна с матрицей D, то в i-ом столбце и в j-ой строке матрицы D стоят нули. Заметим, что при преобразованиях вида $S \cdot D \cdot T$ следующие матрицы оставляют i-ый столбец и j-ую строку матрицы D нулевой:

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,j} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_{j,j} & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j, \\ \\ \\ \end{array} \quad T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & t_{i,i} & \cdots & t_{i,n} \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \end{array},$$

причем S и T принадлежат B_n. Множество всех таких матриц S является аффинным алгебраическим многообразием, так как задается набором уравнений

$$\begin{aligned} & s_{k,l} = 0, && k > l; \\ & s_{j,l} = 0, && l > j; \\ & s_{1,1} \cdot s_{2,2} \cdots s_{n,n} \cdot s - 1 = 0 \end{aligned}$$

в (n^2+1)-мерном аффинном пространстве. Это множество также является неприводимым как открытое подмножество аффинного пространства размерности $\frac{n(n+1)}{2} - (n-j)$ [11, предложение 4.5]. Это открытое множество является дополнением к аффинному многообразию, которое задается уравнением $s_{1,1} \cdot s_{2,2} \cdots s_{n,n} = 0$.

Пусть множество $M_{i,j} \subset \mathrm{B}_n^2$ состоит из всех таких пар матриц S и T. Тогда $M_{i,j}$ изоморфно произведению неприводимых аффинных многообразий и, следовательно, является неприводимым.

Также определим множества $\widetilde{A} = \{A \in \mathrm{T}_n \mid A \perp Q_{i,j}\}$ и $\widetilde{B} = \{B \in \mathrm{T}_n \mid B \perp Q_{k,l}\}$. Эти множества изоморфны аффинным пространствам и неприводимы.

Заметим, что многообразие $Z_{i,j,k,l}$ является образом неприводимого многообразия $M_{i,j} \times \mathrm{B}_n^2 \times \widetilde{A} \times \widetilde{B}$ при отображении π:

$$\begin{aligned} &M_{i,j} \times \mathrm{B}_n^2 \times \widetilde{A} \times \widetilde{B} \longrightarrow Z_{i,j,k,l}, \\ &(S,T,M,N,A,B) \longmapsto (N^{-1} \cdot A \cdot M^{-1}, MT^{-1} \cdot B \cdot S^{-1}N). \end{aligned}$$

Следовательно, многообразие $Z_{i,j,k,l}$ является неприводимым по лемме 2.17.

Осталось заметить, что множества $Z_{i,j,k,l}$ не содержатся друг в друге. Действительно, многообразие $Z_{i,j,k,l}$ определяется классами смежности матриц C и D. Многообразие $Z_{i,j,k,l}$ содержит пару матриц $(\widehat{Q}_{i,j}, \widehat{Q}_{k,l})$, описанных в замечании 6.5. Остается заметить, что данная пара матриц взаимно ортогональна только с матрицами $Q_{i,j}$ и $Q_{k,l}$ соответственно. Следовательно, данная пара матриц не может содержаться в другой неприводимой компоненте. □

§7. Конечномерные алгебры

Рассмотрим обобщение полученных результатов на случай графов ортогональности произвольных конечномерных алгебр. Ниже мы докажем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле и A – произвольная конечномерная алгебра (необязательно ассоциативная), для которой построен граф ортогональности. Тогда множество пар элементов, допускающих расстояние n, является аффинным алгебраическим многообразием.*

Заметим, что при выборе конкретного базиса n-мерной алгебры каждое условие вида $ab = 0$ переписывается в виде системы из n однородных уравнений от $2n$ переменных.

Лемма 7.2. *Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле. Множество двусторонних делителей нуля Z_0 произвольной конечномерной алгебры A является аффинным алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Пусть

$$X_0 = \{(c, a, b) \mid ab = 0,\ ca = 0\} \subset \mathbb{P}(A) \times A \times \mathbb{P}(A),$$

где $\mathbb{P}(A)$ – проективизация векторного пространства, соответствующего алгебре A.

Тогда, по теореме 2.16, отображение

$$\begin{aligned} \varphi\colon X_0 \subset \mathbb{P}(A) \times A \times \mathbb{P}(A) &\longrightarrow Z_0 \subset A, \\ (c, a, b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

переводит замкнутые множества в замкнутые. Следовательно, $Z_0 = \varphi(X)$ является замкнутым множеством и аффинным алгебраическим многообразием. $\square$

Теперь докажем теорему 7.1.

Доказательство. Пусть Z_0 обозначает множество двусторонних делителей нуля в A. Взаимная ортогональность последовательности элементов $a_0, \ldots, a_k \in Z_0$ задается следующими условиями:

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} &= 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1; \\ a_{i+1} a_i &= 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1. \end{aligned}$$

Однородные уравнения, соответствующие данным условиям, задают алгебраическое многообразие X в пространстве

$$Z_0 \times \mathbb{P}^{k-1}(Z_0) \times Z_0.$$

Из определения многообразия X следует, что $a_i \neq 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$.

Так как поле алгебраически замкнуто, то, по теореме 2.16, отображение

$$\begin{aligned} \varphi\colon Z_0 \times \mathbb{P}^{k-1}(Z_0) \times Z_0 &\longrightarrow Z_0 \times Z_0, \\ (a_0, \ldots, a_k) &\longmapsto (a_0, a_k) \end{aligned}$$

переводит замкнутые множества в замкнутые. Следовательно, множество пар матриц $\varphi(X)$, допускающих расстояние k, является аффинным алгебраическим многообразием. $\square$

Обобщая случай матриц, покажем, что множество пар элементов на расстоянии не больше 2 является аффинным многообразием над любым полем. Сперва докажем вспомогательную лемму для случая, когда расстояние равно 2.

Лемма 7.3. *Пусть A – конечномерная алгебра над полем $\Bbbk$, K – его алгебраическое замыкание, и $\overline{A} = K \otimes_{\Bbbk} A$ – алгебра над полем K. Пусть также $a, b \in A$. Обозначим расстояние между a и b в графе ортогональности алгебры A через $\mathrm{d}_{\Bbbk}(a, b)$, а в графе ортогональности алгебры $\overline{A}$ – через $\mathrm{d}_K(a, b)$. Тогда, если $\mathrm{d}_K(a, b) = 2$, то $\mathrm{d}_{\Bbbk}(a, b) = 2$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, $c \in \overline{A}$ и $a \perp c \perp b$. По аналогии с теоремой 4.1, мы можем переписать условия ортогональности в виде системы линейных уравнений с коэффициентами в поле $\Bbbk$. Тогда из существования ненулевого решения над полем K следует существование ненулевого решения над полем $\Bbbk$. □

Следовательно, если $\mathrm{d}_K(a, b) \leqslant 2$, то $\mathrm{d}_{\Bbbk}(a, b) = \mathrm{d}_K(a, b) \leqslant 2$. Действительно, если $\mathrm{d}_K(a, b) \leqslant 1$, то это следует из определения, а в случае $\mathrm{d}_K(a, b) = 2$ остается воспользоваться леммой 7.3.

По аналогии с теоремой 5.4, из теоремы 2.19 можно вывести, что в произвольной конечномерной алгебре A множество элементов на расстоянии не больше 2 является аффинным алгебраическим многообразием над любым полем. Сформулируем это утверждение.

Теорема 7.4. *Пусть A – конечномерная алгебра над полем $\Bbbk$. Тогда множество элементов на расстоянии не более 2 является аффинным алгебраическим многообразием.*

§8. Проективные многообразия

На протяжении данной работы мы рассматривали аффинные алгебраические многообразия, следуя статье [10]. Однако проективные многообразия являются более естественным способом изучения данных множеств, так как условие взаимной ортогональности сохраняется при умножении элемента на любой ненулевой элемент поля.

Для перехода к проективному случаю докажем, что и множество двусторонних делителей нуля является проективным многообразием.

Лемма 8.1. *Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле. Множество ненулевых двусторонних делителей нуля Z произвольной конечномерной алгебры A является проективным алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Пусть
$$X = \{(c, a, b) \mid ab = 0,\ ca = 0\} \subset \mathbb{P}^3(A),$$

где $\mathbb{P}(A)$ – проективизация векторного пространства, соответствующего алгебре A. Множество X является проективным многообразием, так как задается однородными уравнениями, которые получаются из условий $ab = 0$, $ca = 0$ при выборе конкретного базиса алгебры A.

Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon X \subset \mathbb{P}^3(A) \longrightarrow Z \subset \mathbb{P}(A),$$
$$(c, a, b) \longmapsto a.$$

При регулярном отображении образом проективного многообразия является проективное многообразие. Следовательно, $Z = \varphi(X)$ является проективным алгебраическим многообразием. □

Далее мы приведем примеры изучаемых многообразий для некоторых конечномерных алгебр.

Пример 8.2 (Конечномерная алгебра Грассмана)**.** Пусть V – векторное пространство над полем $\Bbbk$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Граф ортогональности алгебры Грассмана $\bigwedge V$ является связным и имеет диаметр 2. Достаточно заметить, что элемент $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ будет взаимно ортогонален с любым другим элементом.

Нетривиальным случаем является множество элементов на расстоянии не более 1. Данное множество является объединением многообразия пар (a, a) одинаковых ненулевых делителей нуля и множества элементов, допускающих расстояние 1. Первое многообразие изоморфно проективному многообразию делителей нуля. Второе многообразие задается условием

$$ab = ba = 0.$$

При выборе конкретного базиса алгебры данное условие переписывается в виде системы из 2^n однородных уравнений от $2 \cdot 2^n$ переменных и задает проективное многообразие.

Пример 8.3 (Бикомплексные числа)**.** Рассмотрим множество пар комплексных чисел $(a, b) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ с операцией умножения, определенной по правилу

$$(u, v)(w, z) = (uw - vz, uz + vw).$$

Делителями нуля являются бикомплексные числа (w, z), для которых $w^2 + z^2 = 0$. Заметим, что в этом случае $w \neq 0$ тогда и только тогда, когда $z \neq 0$. Таким образом, любой ненулевой делитель нуля (w, z) можно представить в виде $(w, 0)(1, z/w)$.

Из равенства $w^2+z^2=0$ следует, что $z^2/w^2=-1$ для ненулевого делителя нуля (w,z). Следовательно, все делители нуля в алгебре бикомплексных чисел можно представить в виде $(w,0)(1,i)$ или $(w,0)(1,-i)$, где $w\in\mathbb{C}$ и $i^2=-1$. Числа первого и второго типов взаимно ортогональны между собой, а числа одного типа не будут взаимно ортогональными. Граф ортогональности алгебры бикомплексных чисел является полным двудольным графом и имеет диаметр 2.

Нетривиальным случаем является множество элементов на расстоянии не более 1. Данное множество является объединением множества пар $((w,z),(w,z))$ одинаковых ненулевых делителей нуля и множества элементов, допускающих расстояние 1. Первое множество изоморфно проективному многообразию делителей нуля. Второе множество состоит из пар $((u,v),(w,z))$, которые удовлетворяют двум однородным уравнениям

$$uw-vz=0,$$
$$uz+vw=0,$$

и является проективным многообразием.

Пример 8.4 (Бикватернионы)**.** Алгебра бикватернионов является комплексификацией алгебры кватернионов. Как алгебра она изоморфна кольцу квадратных комплексных матриц 2×2.

Напомним, что в данном случае диаметр графа равен 2. Нетривиальным случаем является множество элементов на расстоянии не более 1, которое рассматривалось в начале работы. Как и в предыдущем примере, данное множество будет являться не только аффинным, но и проективным многообразием.

Список литературы

1. Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014).
2. А. Э. Гутерман, М. А. Ефимов, *Монотонные отображения матриц индекса* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 67–96.
3. А. Э. Гутерман, О.В. Маркова, *Графы ортогональности матриц над телами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 81–93.
4. Д. Кокс, Д. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры*, М., Мир, 2000.
5. О. Г. Стырт, *Графы ортогональности матриц над коммутативными кольцами.* — Интеллект. системы. Теор. прил. **27**, No. 1 (2023), 24–34.
6. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, МЦНМО, 2007.

7. B. R. Bakhadly, *Orthogonality graph of the algebra of upper triangular matrices.* — Oper. Matrices **11**, No. 2 (2017), 455–463.
8. J. K. Baksalary, J. Hauke, *A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings.* — Linear Algebra Appl. **127** (1990), 157–169.
9. G. Dolinar, A. E. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Extremal matrix centralizers.* — Linear Algebra Appl. **438**, No. 7 (2013), 2904–2910.
10. M. Elyze, A. Guterman, R. Morrison, K. Šivic, *Higher-distance commuting varieties.* — Linear Multilinear Algebra **70**, No. 17 (2022), 3248–3270.
11. Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* (*Oxford Grad. Texts Math.* **6**). Oxford University Press, 2002.
12. P. G. Ovchinnikov, *Automorphisms of the poset of skew projections.* — J. Funct. Analysis **115** (1993), 988–994.
13. P. Šemrl, *Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 481–490.
14. M-C. Tsai, M. Bogale, H. Huang, *On triangular similarity of nilpotent triangular matrices.* — Linear Algebra Appl. **596** (2020), 1–35.

Guterman A. E., Zhilina S. A., Mukhanov K. D. Geometry of varieties of mutually orthogonal matrices.

For the ring of square matrices $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ of order n over a field $\Bbbk$, one can construct the orthogonality graph $\mathrm{O}(\mathrm{Mat}_n(\Bbbk))$, whose vertices are the zero divisors of the ring $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$. Two vertices A and B are connected by an edge if $AB = BA = 0$. The notion of the distance between two elements of the ring naturally implies that one can consider the set O_n^d of pairs of elements lying within the distance at most d.

It is proved that such sets form affine algebraic varieties, a decomposition of these varieties into irreducible components is provided, and their dimensions are calculated. The paper also describes the sets that are defined similarly for the ring of upper triangular matrices and suggests generalizations of these results to arbitrary finite-dimensional algebras.

Университет Бар-Илан,
Рамат-Ган, 5290002, Израиль
E-mail: alexander.guterman@biu.ac.il

Поступило 8 октября 2024 г.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва 119991, Россия
E-mail: s.a.zhilina@gmail.com

Московский городской
педагогический университет,
Москва 129226, Россия
E-mail: mukhanov.kirill@outlook.com