Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

В. В. Суханов

КОЛЛАПС В АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

§1. Введение

Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x,$$
$$u_{t=0} = u_0(x)$$

с вещественным, гладким, быстро убывающим начальным данным $u_0(x)$ изучалось в целом ряде работ [1–5]. Было обнаружено, что асимптотическое решение является различным в четырех областях оси $x \in \mathbb{R}$. При $x < -t\varepsilon < 0$ асимптотика решения представляет собой набор "почти" не взаимодействующих солитонов, которые с разными скоростями равномерно идут к минус бесконечности. В окрестности нуля формируется асимптотическое решение, которое выражается через функции Пенлеве. При $x > t\varepsilon > 0$ асимптотическое решение имеет вид осциллирующего "дисперсионного хвоста". Кроме того, при дальнейшем анализе было обнаружено что решение типа Пенлеве не сшивается с решением дисперсионного типа и возникает еще один асимптотический режим между этими областями, асимптотическое решение, в котором описывается эллиптической функцией (см. [6]) Наиболее важными областями асимптотики решения являются солитонный сектор и дисперсионная область. Дело в том, что именно эти области ответственны за законы сохранения, а коэффициенты соответствующих асимптотических решений являются переменными типа действие-угол для вполне интегрируемой системы, которой является уравнение Кортевега-де Фриза. Для солитонного сектора вычисление асимптотики представляет собой довольно простую процедуру. Что же

Ключевые слова: уравнение Кортевега-де Фриза, задача Коши, асимптотическое поведение решений при больших временах, комплексное начальное данное.

Исследование автора поддержано грантом РНФ No. 22-11-00070.

касается дисперсионной части асимптотики, то соответствующее вычисление потребовало длинного и тонкого анализа (см. [1, 2]). В дальнейшем, это вычисление было проделано для соответствующей задачи Римана–Гильберта и привело к созданию нелинейного аналога метода перевала (см. [3]). Таким образом, именно дисперсионная область представляет наибольший интерес для анализа.

В данной работе мы рассмотрим обобщение этой асимптотической задачи для комплексного начального данного. Следует отметить, что, в целом, структура асимптотического решения для комплексного уравнения Кортевега-де Фриза далека от полного описания. Одной из главных причин является проблема с разрешимостью обратной спектральной задачи для оператора Шредингера с комплексным потенциалом. Поэтому в данной работе мы будем изучать только конкретный асимптотический механизм, связанный с коллапсом в дисперсионной асимптотике решения.

§2. Асимптотические решения для вещественного начального данного

Перед исследованием комплекснозначных решений уравнения Кортевега-де Фриза опишем более подробно результаты полученные для дисперсионной асимптотики в вещественном случая. Для гладкой быстро убывающей функции $u_0(x)$ асимптотическое решение задачи Коши

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xxx} + 6uu_x,\\
&u|_{t=0} = u_0(x)
\end{aligned}
$$

в области $x > t\varepsilon,\ \varepsilon > 0$ имеет вид (см. [2])

$$
u(x,t) \sim \frac{w(z)}{\sqrt{t}}e^{i\Phi} + \frac{\overline{w(z)}}{\sqrt{t}}e^{-i\Phi} + \frac{1}{tz}\big[-2|w(z)|^2 + w^2(z)e^{2i\Phi} + \overline{w}^2(z)e^{-2i\Phi}\big] + \sum_{\substack{p\geq 3,\\ q+|m|\leq p}} \frac{(\ln t)^q}{t^{p/2}}e^{im\Phi}u_{pqm}(z).
$$

Здесь

$$
\Phi(z) = A(z)t + B(z)\ln t,\ \ A(z) = 2z^{3/2},\ \ B(z) = \frac{-6|w|^2}{\sqrt{z}},\ \ z = \frac{x}{3t}.
$$

Все коэффициенты $u_{pqm}(z)$ выражаются через функцию $w(z)$. Они являются дифференциальными многочленами от функций $w(z)$ и $\overline{w(z)}$.

Сама функция $w(z)$ выражается через данные рассеяния для потенциала $u_0(x)$. Для описания этой связи введем уравнение Шредингера

$$\Psi'' + u_0(x)\Psi + \frac{k^2}{4}\Psi = 0 \tag{2.1}$$

и соответствующее решение Иоста $g(x,k)$

$$g(x,k) \cong e^{\frac{-ikx}{2}}, \quad x \to -\infty, \tag{2.2}$$

$$g(x,k) \cong a(k)e^{\frac{-ikx}{2}} + b(k)e^{\frac{ikx}{2}}, \quad x \to +\infty. \tag{2.3}$$

Функцию $r(k)$

$$r(k) = \frac{b}{a} \tag{2.4}$$

мы будем называть коэффициентом отражения для потенциала $u_0(x)$. Тогда функция $w(z)$ выражается через $r(k)$ явной формулой (см. [2])

$$\begin{aligned} w(k^2) = {} & \sqrt{\frac{k}{12\pi}} e^{-i\frac{3}{4}\pi} r(k) e^{-\frac{\pi}{2}B(k^2)} \Gamma(1 - iB(k^2)) \\ & \times \exp\left[-iB(k^2)\ln\frac{2k}{3} - 2i\int\limits_{k^2}^{\infty} \ln|\xi - k^2| \left(\frac{rB(\xi)}{\sqrt{\xi}}\right)' d\xi \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$B(k^2) = \frac{1}{2\pi}\ln(1 - |r(k)|^2).$$

§3. Асимптотические решения для комплексных начальных данных, которые мало отличаются от вещественных

Теперь посмотрим на случай комплексного начального данного. Если решение “мало” отличается от вещественного, то, по существу, его можно получить аналогом аналитического продолжения вещественного решения

$$\begin{aligned} u(x,t) \sim {} & \frac{w_1(z)}{\sqrt{t}} e^{i\Phi} + \frac{w_2(z)}{\sqrt{t}} e^{-i\Phi} \\ & + \frac{1}{tz}\big[-2w_1(z)w_2(z) + w_1^2(z)e^{2i\Phi} + w_2^2(z)e^{-2i\Phi} \big] \\ & + \sum_{\substack{p \ge 3, \\ q+|m| \le p}} \frac{(\ln t)^q}{t^{p/2}} e^{im\Phi} u_{pqm}(z). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь

$$\Phi(z) = A(z)t + B(z)\ln t,\ A(z) = 2z^{3/2},\ B(z) = \frac{-6w_1(z)w_2(z)}{\sqrt{z}},\ z = \frac{x}{3t}.$$

Все коэффициенты $u_{pqm}(z)$ выражаются через функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Они являются дифференциальными многочленами от функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Как и в вещественном случае, функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$ выражаются через данные обратной задачи для потенциала $u_0(x)$, т.е. через коэффициент отражения $r(k)$, который определяется теми же формулами (2.1)–(2.4)

$$w_1(k^2) = \sqrt{\frac{k}{12\pi}} e^{-i\frac{3}{4}\pi} r(k) e^{-\frac{\pi}{2}B(k^2)} \Gamma(1 - iB(k^2))$$
$$\times \exp\left[-iB(k^2)\ln\frac{2k}{3} - 2i\int_{k^2}^{\infty} \ln|\xi - k^2| \left(\frac{rB(\xi)}{\sqrt{\xi}}\right)' d\xi\right].$$
$$w_2(k^2) = \sqrt{\frac{k}{12\pi}} e^{-i\frac{3}{4}\pi} r(-k) e^{-\frac{\pi}{2}B(k^2)} \Gamma(1 - iB(k^2))$$
$$\times \exp\left[-iB(k^2)\ln\frac{2k}{3} - 2i\int_{k^2}^{\infty} \ln|\xi - k^2| \left(\frac{rB(\xi)}{\sqrt{\xi}}\right)' d\xi\right].$$

Здесь

$$B(k^2) = \frac{1}{2\pi}\ln(1 - r(k)r(-k)).$$

Хорошо известно, что для вещественного потенциала $u_0(x)$ коэффициент отражения удовлетворяет свойству

$$r(-k) = \overline{r(k)}$$

и, таким образом, функция $B(z)$ является вещественнозначной. Для комплексного начального данного такого свойства нет и функция $B(z)$ может иметь мнимую часть.

Замечание 3.1. Легко видеть, что мнимая часть функции $B(z)$ зависит от аргумента комплексного числа $1 - r(k)r(-k),\ z = k^2$.

Наличие достаточно большой мнимой части у функции $B(z)$ может привести к тому, что ряд (3.1) потеряет асимптотический характер, т.е. младшие члены ряда будут больше старших. Это произойдет, если

$$|\operatorname{Im} B(z)| > \frac{1}{2}.$$

Например, если
$$\operatorname{Im} B(z) > \frac{1}{2},$$
то при больших t
$$\frac{1}{\sqrt{t}}|e^{i\Phi}| \ll \frac{1}{t}|e^{2i\Phi}|^2.$$
Таким образом, в окрестности точек, где
$$\operatorname{Im} B(z_0) = \pm\frac{1}{2},$$
наше асимптотическое решение перестает работать.

§4. Асимптотическое решение в окрестности точки коллапса

Для определенности рассмотрим точку, где
$$\operatorname{Im} B(z_0) = \frac{1}{2}.$$
Анализ асимптотического решения в окрестности точки z_0, показывает, что решение будет в этой окрестности иметь ряд точек, где оно асимптотически близко к полюсам некоторой функции, поэтому окрестность точки z_0 мы будем называть окрестностью коллапса асимптотического решения.

Для того, чтобы построить асимптотическое решение задачи в окрестности точки z_0 выделим старшие сингулярности (т.е. слагаемые наиболее быстро растущие при $z \to z_0$) из разложения (3.1). Несколько первых членов можно написать явно
$$u(x,t) \sim \frac{w_1(z_0)}{\sqrt{t}}e^{i\Phi} + \frac{w_1^2(z_0)}{tz_0}e^{2i\Phi} + \dots \tag{4.1}$$
Анализ дальнейших членов этого разложения показывает, что они являются степенями $(\frac{1}{\sqrt{t}}e^{i\Phi})^l$ с некоторыми коэффициентами. Таким образом, в окрестности коллапса следует использовать новую локальную переменную $\frac{1}{\sqrt{t}}e^{i\Phi}$. Мы, для удобства дальнейших вычислений, введем переменную s следующей формулой
$$e^s = \frac{w_1(z_0)}{\sqrt{t}}e^{i\Phi}$$

и будем искать функцию u - решение уравнения Кортевега-де Фриза, как функцию $u = h(s)$. Пересчитаем производные по x и по t.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t},$$
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}.$$

Функции зависящие от z (например $w_{1,2}(z)$ и $u_{pqm}(z)$) являются медленными относительно дифференцирования по x и t. Скажем для функции $f(z)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f'_z\frac{z}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_z\frac{1}{3t}.$$

Поэтому, не трудно видеть, что асимптотически при $t \to \infty,\ z \approx z_0$

$$\frac{\partial s}{\partial t} \simeq -iz_0^{3/2},$$
$$\frac{\partial s}{\partial x} \simeq iz_0^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -iz_0^{3/2}\frac{\partial h}{\partial s},$$
$$\frac{\partial h}{\partial x} = iz_0^{1/2}\frac{\partial h}{\partial s},$$

и мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $h(s)$

$$h'_s = h'''_{sss} - \frac{6}{z_0}h'_s h. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. Это уравнение лишь некоторыми коэффициентами отличается от уравнения для односолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза.

Уравнение (4.2) можно проинтегрировать

$$h = h''_{ss} - \frac{3}{z_0}h^2.$$

Здесь константа при интегрировании для нужного нам решения равна нулю. Домножим уравнение на функцию h'_s

$$hh'_s = h''_{ss}h'_s - \frac{3}{z_0}h'_s h^2$$

и еще раз проинтегрируем

$$h^2 = (h'_s)^2 - \frac{2}{z_0}h^3.$$

Константа опять выбрана равной нулю. В результате мы получили уравнение первого порядка, в котором можно разделить переменные

$$\frac{dh}{h\sqrt{1+\frac{2h}{z_0}}} = ds.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dh}{h\sqrt{1+\frac{2h}{z_0}}} = s + c,$$

или, после замены переменной

$$\int 2\frac{dy}{y^2-1} = s + c.$$

Здесь

$$y = \sqrt{1+\frac{2h}{z_0}},$$

c – константа интегрирования. Имеем

$$\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = s + c,$$

или

$$y = \sqrt{1+\frac{2h}{z_0}} = \frac{1-c_1e^s}{1+c_1e^s},\ c_1 = e^c.$$

Следовательно,

$$\frac{2h}{z_0} = \frac{(1-c_1e^s)^2}{(1+c_1e^s)^2} - 1 = \frac{-4}{c_1e^s + 2 + (c_1)^{-1}e^{-s}}$$

и

$$h(s) = \frac{-2z_0}{c_1e^s + 2 + (c_1)^{-1}e^{-s}}.$$

Таким образом, в окрестности коллапса решение уравнения Кортевега-де Фриза имеет следующее асимптотическое поведение

$$u(x,t) \cong \frac{-2z_0}{c_1 \frac{w_1(z_0)}{\sqrt{t}} e^{i\Phi} + 2 + (c_1)^{-1} \frac{\sqrt{t}}{w_1(z_0)} e^{-i\Phi}}. \tag{4.3}$$

Константу c_1 можно найти сравнивая асимптотическое поведение полученного решения (4.3) и стандартную асимптотику для уравнения Кортевега-де Фриза (4.1) при $s \to -\infty$. Действительно, если $s \to -\infty$, то для функции $h(s)$ мы получаем следующее разложение

$$h(s) = -2z_0(c_1 e^s) - 2(c_1 e^s)^2 + O(e^{3s})),$$

или

$$h(s) = -2z_0(c_1 \frac{w_1(z_0)}{\sqrt{t}} e^{i\Phi} - 2(c_1 \frac{w_1(z_0)}{\sqrt{t}} e^{i\Phi})^2 + O(e^{3s})).$$

Сравнивая старший член этого разложения с формулой (4.1), получаем

$$c_1 = \frac{-1}{2z_0}.$$

Легко видеть, что знаменатель в формуле (4.3) (в целом ряде точек) может обращаться в ноль. Именно поэтому, мы называем область

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \ll |z - z_0| \ll 1,$$

где эта асимптотика работает, окрестностью коллапса.

Замечание 4.2. Разумеется, точная формулировка об асимптотическом поведении решения должна исключать небольшие окрестности точек, в которых знаменатель (4.3) обращается в ноль.

Замечание 4.3. Видно также, что асимптотика в окрестности коллапса (если исключить окрестности нулей знаменателя) имеет порядок $O(1)$ в отличие от стандартной дисперсионной асимптотики для вещественного потенциала, которая имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{t}})$.

Теперь посмотрим на то, как перестраивается решение в другую сторону от области коллапса, т.е. при $s \to +\infty$

$$h(s) = -2z_0(c_1 \frac{\sqrt{t}}{w_1(z_0)} e^{-i\Phi} - 2(c_1 \frac{\sqrt{t}}{w_1(z_0)} e^{-i\Phi})^2 + O(e^{-3s})).$$

Таким образом, по другую сторону от коллапса мы снова получаем асимптотику дисперсионного типа.

Список литературы

1. V. E. Zakharov, S. V. Manakov, *Asymptotic behavior of non-linear wave systems integrated by the inverse scattering method.* — JETP **44**, No. 1 (1976), 106.
2. V. S. Buslaev, V. V. Sukhanov, *Asymptotic behavior of solutions of the Korteweg-de Vries equation for the large times.* — J. Sov. Math. **34**, No. 5 (1986), 1905–1920.
3. P. Deift, X. Zhou, *A Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann–Hilbert Problems. Asymptotics for the MKdV Equation.* — Annals Math., Second Series **137**, No. 2 (1993), 295–368.
4. A. R. Its, *"Isomonodromy" solutions of equations of zero curvature.* — Math. USSR Izvestiya **26**, No. 3 (1986), 497–529 .
5. V. Yu. Novokshenov, *Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equation as* $t \to \infty$ — Dokl. Acad. Nauk SSSR **251**, No. 4 (1980), 799–801.
6. P. Deift, S. Venakides, X. Zhou, *The collisionless shock region for the long-time behavior of solutions of the KdV equation.* — Comm. Pure Appl. Math. **47**, No. 2 (1994), 199–206.

Sukhanov V. V. Collapse in the asymptotics of the solution to the complex Korteweg-de Vries equation.

The work is devoted to the study of the asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ with complex initial data. . It was found that, in contrast to the real solution, the asymptotic behavior of the complex solution in the dispersion region has collapses. The paper analyzes the asymptotic solution in the vicinity of such a point.

С.-Петербургский
государственный университет, НИИФ,
Ульяновская ул., 1, Петродворец,
198904 С.-Петербург, Россия
E-mail: vvsukhanov@mail.ru

Поступило 12 сентября 2024 г.