

С. А. Назаров

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ  
ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОУГОЛЬНОЙ  
ПЛАСТИНЫ: “ПАРАДОКС” КОСТРОВА  
И ЕГО ИСПРАВЛЕНИЕ**

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть  $\Omega$  – открытый неограниченный многоугольник на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с одним выходом на бесконечность в виде угла  $\mathbb{K} = \{x : r_0 > 0, \varphi_0 \in (0, \alpha_0)\}$  (рис. 1), где  $\alpha_0 \in (0, 2\pi]$  – раствор угла, а  $(r_0, \varphi_0)$  – система полярных координат с центром в начале  $\mathcal{O}$  декартовой системы координат  $x = (x_1, x_2)$ . Вершины многоугольника обозначим через  $P^1, \dots, P^J$  и введём системы полярных координат  $(r_j, \varphi_j) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \alpha_j)$  с центрами  $P^j, j = 1, \dots, J$ . Растворы  $\alpha_j$  угловых точек измеряем изнутри области  $\Omega$ . Не исключается случай  $\alpha_0 = \pi$  ( $\mathbb{K}$  – полуплоскость), но  $\alpha_j \neq \pi$  при  $j = 1, \dots, J$ .

Считая  $\Omega$  плоским изотропным и однородным упругим телом с постоянными Ламе  $\lambda \geq 0, \mu > 0$  и плотностью  $\rho > 0$ , обозначим через  $u_p$  компоненты вектора смещений. Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{pq}(u) = \mu \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) + \lambda \delta_{p,q} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \quad p, q = 1, 2,$$

где  $\delta_{p,q}$  – символ Кронекера.

Динамическая плоская деформация двугранного угла  $\Omega \times \mathbb{R}$  с цилиндрическим искажением около ребра описывается дифференциальными уравнениями

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{pq}(u) - \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{2q}(u) + \rho \frac{\partial^2 u_q}{\partial t^2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad q = 1, 2. \quad (1.1)$$

Гармонические во времени  $t$  колебания с частотой  $\omega > 0$  отвечают вектору смещений  $e^{-i\omega t} u(x)$  ( $i$  – мнимая единица), который можно

---

*Ключевые слова:* неограниченное плоское многоугольное упругое тело, поправка Кострова, сингулярности в угловых точках, конструкция поля смещений.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект No. 124041500009-8).

выразить через потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$  (см., например, [1]) следующим образом:

$$u_1(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x), \quad u_2(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x). \quad (1.2)$$

Подстановка формул (1.2) в систему (1.1) порождает пару уравнений Гельмгольца

$$-\Delta_x \Phi(x) = k_1^2 \Phi(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

$$-\Delta_x \Psi(x) = k_2^2 \Psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

с оператором Лапласа  $\Delta_x$  и волновыми числами

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \quad \text{и} \quad k_2 = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}.$$

Снабдим эти уравнения условиями Неймана и Дирихле

$$\partial_\nu \Phi(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}, \quad (1.5)$$

$$\Psi(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}, \quad (1.6)$$

где  $\partial_\nu$  – производная вдоль внешней нормали,  $\mathcal{P} = \{P^1, \dots, P^J\}$  – множество вершин, а  $g$  и  $h$  – финитные функции, гладкие на замкнутых сторонах многоугольника. Данное Дирихле  $g$  должно быть непрерывным. Кроме того, для  $\alpha_j = 2\pi$ , то есть для вершины надреза или трещины, дополнительно накладываем ограничения

$$\begin{aligned} \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial g}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=0} &= - \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial g}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=2\pi} \\ \text{и} \quad \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial h}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=0} &= \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial h}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=2\pi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Пояснения к ним даны в замечании 3.

Для интерпретации краевых условий (1.5) и (1.6) выберем одну из сторон  $\Gamma_j$  многоугольника  $\Omega$ . Поскольку определения (1.2) инвариантны относительно параллельных переносов и поворотов  $x \mapsto \Theta^j x$  и  $u \mapsto \Theta^j u$  с ортогональной, то есть вещественной и унитарной  $(2 \times 2)$ -матрицей  $\Theta^j$ , можно считать, что вблизи  $\Gamma_j$  область  $\Omega$  задана неравенством  $x_2 < 0$ , причём  $\partial_\nu = \partial/\partial x_2$ . Считая, что указанными свойствами

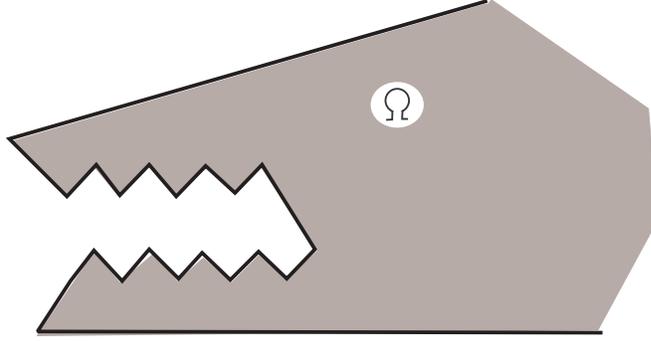


Рис. 1. Плоское многоугольное упругое тело.

обладают сами координаты  $(x_1, x_2)$ , выводим соотношения

$$\sigma_{12}(u) = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right) = 2\mu \frac{\partial g}{\partial x_1} - \mu k_2^2 h - 2\mu \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}. \quad (1.8)$$

Подчеркнём, что  $\partial/\partial x_1$  – производная вдоль стороны  $\Gamma_j$ , а формулы (1.8) означают, что сами условия (1.5) и (1.6) имитируют линеаризованные условия Синьорини (см., например, [2]), а именно, идеализированный контакт тела с абсолютно жёстким профилем. В частности, равенства

$$u_2 = 0 \text{ и } \sigma_{12}(u) = \sigma^\circ \quad (1.9)$$

на стороне  $\Gamma_j$  выполнены в случае  $h = -k_2^{-2} \sigma^\circ / \mu$  и  $g = \partial h / \partial x_1$ . Наконец, условия Синьорини подразумевают наложение игнорируемых далее односторонних связей: в дополнение к (1.9) в проверке нуждается соотношение

$$\sigma_{12}(u) \leq 0 \text{ на } \Gamma_j.$$

**Замечание 1.** Может быть введена и другая группа краевых условий

$$\Phi(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}, \quad (1.10)$$

$$\partial_\nu \Psi(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathcal{P}, \quad (1.11)$$

при которой на стороне  $\Gamma_j \subset \{x : x_2 = 0\}$  выполнены равенства

$$\begin{aligned} u_1 &= h + \frac{\partial g}{\partial x_1}, \\ \sigma_{22}(u) &= -2\mu \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right) - (\lambda + 2\mu)k_1^2 g. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Все последующие вычисления и рассуждения пригодны для краевых условий (1.10), (1.11), однако их интерпретация в силу выражений (1.12) весьма причудлива: бесконечный коэффициент трения в контакте с абсолютно мягким профилем. Поэтому ограничиваемся рассмотрением задач (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6).

Как известно, обе задачи (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6) с финитными частями обладают единственными решениями, попадающими в классы Соболева  $H_{\text{loc}}^2(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{P})$  и  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ , а также допускающими при  $r_0 \rightarrow +\infty$  разложения

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= r_0^{-1/2} e^{-ik_1 r_0} (A(\varphi_0) + O(r_0^{-1})), \\ \Psi(x) &= r_0^{-1/2} e^{-ik_2 r_0} (B(\varphi_0) + O(r_0^{-1})). \end{aligned} \quad (1.13)$$

При этом  $A$  и  $B$  – бесконечно дифференцируемые функции переменной  $\varphi_0 \in [0, \alpha_0]$ , зависящие от данных задач в целом.

Также известен следующий используемый далее результат: если для решений  $\Phi$  и  $\Psi$  задач Неймана и Дирихле для уравнений Гельмгольца выполнены представления (1.13) с нулевыми коэффициентами  $A$  и  $B$ , то  $\Phi = 0$  и  $\Psi = 0$  всюду в области  $\Omega$ .

**Замечание 2.** Если  $A = 0$  в разложении функции  $\Phi$ , то  $\Phi(x) = O(r_0^{-3/2})$  при  $r_0 \rightarrow +\infty$ , а значит, решение  $\Phi$  задачи (1.3), (1.5) попадает в пространство Соболева  $H^1(\Omega)$ . Таким образом, быстро исчезающая на бесконечности функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца в бесконечном секторе  $\mathbb{K} \setminus \mathbb{B}_R$  и однородным условиям Неймана на его боковых сторонах; здесь  $\mathbb{B}_R = \{x : r_0 < R\}$  – шар большого радиуса  $R > 0$  (устраиваем угловые точки и носитель правой части  $g$ ). В итоге классическое доказательство из учебника В. И. Смирнова [3], использующее разложения по сферическим функциям, без особого труда переносится на случай угловой области: равенству  $A = 0$  противоречит разложение функции  $\Phi$  в сходящийся ряд Фурье по “косинусам”  $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha_0} p \varphi_0\right)$ ,  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ , приобретающее коэффициентами функции Бесселя, которые затухают при  $r_0 \rightarrow +\infty$  в точности

со скоростью  $O(r_0^{-1/2})$  (см., например, [4]). Имеются и другие способы проверки нужного факта, в том числе и для некоторых задач теории упругости, ввиду безусловной необходимости излучения энергии на бесконечность. Аналогичные выводы имеют место и для условий Дирихле.

Иными словами, задачи Неймана и Дирихле для оператора Гельмгольца в угловой области не производят захват волн, что и обеспечивает однозначную разрешимость названных задач.

## §2. ПРЕДЫСТОРИЯ

В работе [1] была рассмотрена система Ламе (1.1) в угле (упругом клине)  $\Omega = \mathbb{K}$  с линеаризованными условиями Синьорини (1.9) на его сторонах. В прошлом веке неожиданным оказалось то, что формулы (1.2), предоставляющие поле смещений в случае  $\alpha_0 < \pi$ , дают неправильное – излишне сингулярное – поведение смещений в вершине угла при  $\alpha_0 > \pi$ . Автором работы [1] было найдено правильное представление потенциалов, причём внесённые изменения в формулы были затем названы поправкой Кострова, а обнаруженное несоответствие – парадоксом его же имени.

Подобные “парадоксы” возникают и в других задачах теории упругости при сведении систем уравнений или уравнений высших порядков к совокупности уравнений второго порядка. Так, известный “парадокс” Сапонджяна [5] об изгибе многоугольной пластине со свободно опёртыми сторонами состоит в следующем: бигармоническое уравнение с соответствующими краевыми условиями (см. [6] и [7, §30])

$$\begin{aligned} \Delta_x^2 \mathbf{w}(x) &= \mathbf{f}(x), & x \in \Xi, \\ \mathbf{w}(x) = \Delta_x \mathbf{w}(x) &= 0, & x \in \partial\Xi \setminus \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\Xi$  – конечный многоугольник на плоскости с множеством вершин  $\mathcal{P}$ , формально сводится к “итерированной” задаче Дирихле для оператора Лапласа

$$-\Delta_x \mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Xi, \quad \mathbf{v}(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \setminus \mathcal{P}, \quad (2.2)$$

$$-\Delta_x \mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x), \quad x \in \Xi, \quad \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Xi \setminus \mathcal{P}. \quad (2.3)$$

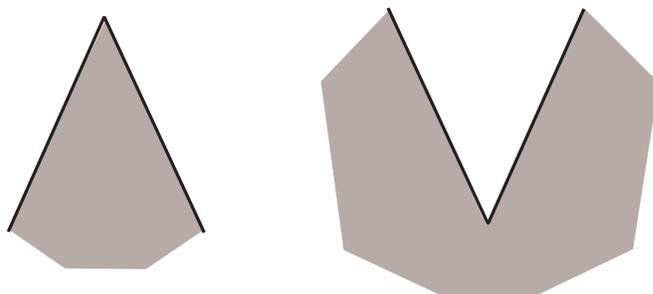


Рис. 2. Выходящий (слева) и входящий (справа) углы.

Если многоугольник  $\Xi$  выпуклый, а значит, у него все углы *выходящие*<sup>1</sup>, то действительно выполнено равенство  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$  и оба решения попадают в пространство Соболева  $H^2(\Xi)$ . При отсутствии выпуклости многоугольника  $\Xi$  появляется хотя бы один *входящий* угол с раствором  $\alpha_j > \pi$  и, как следствие, равенство  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$  может нарушиться, хотя бы потому, что даже при гладкой правой части  $\mathbf{v}$  решение задачи Дирихле (2.3) не обязательно принадлежит пространству  $H^2(\Xi)$  (см. [8], а также, [9] и, например, [10, глава 2]).

Причины несовпадения решений задач (2.1) и (2.2), (2.3) были вскрыты в публикации [11] (её изложение представлено в книге [10, глава 5, §6]), где и указан алгоритм поиска решения совокупности задач (2.2) и (2.3), предоставляющей решение  $\mathbf{u} = \mathbf{w} \in H^2(\Xi)$  задачи (2.1): решение  $\mathbf{v}$  первой из них нужно искать в пространстве Лебега  $L^2(\Xi)$ , а возникающий произвол употребить для обеспечения включения  $\mathbf{u} \in H^2(\Xi)$  (весьма похожая процедура применяется и в разд. 3 данной работы). Дальнейшее исследование [12] связей решений смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения и итерированной задачи Дирихле для уравнения Пуассона выявило интересный факт: при  $\mathbf{f} > 0$  согласно принципу максимума обе функции  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  оказываются положительными в многоугольнике  $\Xi$ , а значит, это свойство

<sup>1</sup>Термины “выходящий” и “входящий” (рис. 2), означающие, что раствор угла меньше и больше  $\pi$  соответственно, широко используются в русскоязычной механической литературе и имеют корни в истории древней Руси: так именовались углы стен кремля, которые по необходимости снабжались оборонительными средствами разных типов.

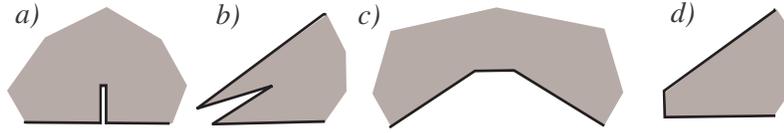


Рис. 3. Полуплоскость с трещиной (а) с  $I = 1$ , “ласточкин хвост” (b) с  $I = 1$ , затупленные входящий (с) с  $I = 2$  и выходящий (d) с  $I = 0$  углы.

передаётся и прогибу  $w$  выпуклой многоугольной пластины  $\Xi$ . Вместе с тем были найдены невыпуклый многоугольник и положительная поперечная сила  $f$ , при которой появляется участок  $\Xi_{neg}$  области  $\Xi$ , где выполнено неравенство  $w < 0$ , то есть пластина частично выпучивается вверх, хотя нагрузка вроде бы выгибает её вниз!

Аналогичные эффекты обнаружены [13–16] в других задачах математической физики, в частности, для систем уравнений Максвелла. Наличие нескольких решений эллиптических краевых задач с сильно различающимися свойствами тесно связано с техникой самосопряжённых расширений дифференциальных операторов (см. [17–21] и др.). Воспроизводить сопутствующие результаты здесь не будем, но отошлём читателя к книге [10, глава 6 и 13] и публикации [22].

Возвращаясь к вопросам теории упругости (1.1), (1.9), заметим, что физически осмысленными являются задачи о динамическом нагружении неограниченных плоских многоугольных тел форм, изображённых на рис. 3 и имеющих вершины входящих углов в количестве  $I$  штук. Впервые попытка применить подход [11] к задачам (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6) для потенциалов  $\Phi$  и  $\Psi$  была предпринята в статье [23], которая, к сожалению, содержит несколько ошибок<sup>2</sup> и не даёт правильного ответа при наличии входящих углов. В очередных разделах приведена

<sup>2</sup>Приведенные в [23] интегральные формулы для множителей при сингулярностях потенциалов и смещений в угловых точках не учитывают излучение энергии на бесконечность (см. замечание 4), и, как следствие, комплекснозначная матрица  $M$  в соотношении вида (3.13) считается вещественной симметричной, а её обратимость вообще не проверена. Подчеркнём, что материал разд. 4, устанавливающий положительную определённую матрицу  $-i(M - M^*)$ , – основная техническая новинка настоящей работы.

процедура построения сингулярных потенциалов  $\Phi$  и  $\Psi$ , обеспечивающих включение смещений (1.2) в класс  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .

### §3. ФОРМАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Перенумеруем вершины  $P^1, \dots, P^J$  так, чтобы углы были входящими ( $\alpha_j \in (\pi, 2\pi]$ ) при  $j = 1, \dots, I$  и выходящими ( $\alpha_j \in (0, \pi)$ ) при  $j = 1 + I, \dots, J$ . Теория Кондратьева [9] (см. также монографию [10, глава 2]) даёт следующие представления потенциалов при  $r_j \rightarrow +0$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= K_{Nj}^0 + r_j (C_{Nj}^s \sin \varphi_j + C_{Nj}^c \cos \varphi_j) \\ &\quad + K_{Nj} r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j}} \cos \left( \frac{\pi}{\alpha_j} \varphi_j \right) + O \left( r_j^{\min\{2, 2\frac{\pi}{\alpha_j}\}} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= C_{Dj}^0 + r_j (C_{Dj}^s \sin \varphi_j + C_{Dj}^c \cos \varphi_j) \\ &\quad + K_{Dj} r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j}} \sin \left( \frac{\pi}{\alpha_j} \varphi_j \right) + O \left( r_j^{\min\{2, 2\frac{\pi}{\alpha_j}\}} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $K_{Nj}^0$  и  $K_{Nj}$ ,  $K_{Dj}$  – некоторые коэффициенты (последняя пара часто называется коэффициентами интенсивности), зависящие от данных задач в целом, постоянная  $C_{Dj}^0$  равна значению  $h(P^j)$  правой части условия Дирихле (1.6) в угловой точке, а коэффициенты  $C_{Nj}^s$ ,  $C_{Nj}^c$  и  $C_{Dj}^s$ ,  $C_{Dj}^c$  линейных составляющих находятся из следующих пар соотношений, которые учитывают краевые условия (1.5) и (1.6) на сторонах многоугольника, исходящих из вершины  $P^j$ :

$$\begin{aligned} \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial g}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=0} &= -\frac{\pi}{\alpha_j} C_{Nj}^s \\ \text{и} \quad \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial g}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=\alpha_j} &= \frac{\pi}{\alpha_j} (C_{Nj}^s \cos \alpha_j - C_{Nj}^c \sin \alpha_j), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial h}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=0} &= C_{Dj}^c \\ \text{и} \quad \lim_{r_j \rightarrow +0} \frac{\partial h}{\partial r_j} \Big|_{\varphi_j=\alpha_j} &= C_{Dj}^c \cos \alpha_j + C_{Dj}^s \sin \alpha_j. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее представления (3.1) и (3.2) применяются в основном для входящих углов, у которых остатки, разумеется, принимают вид  $O\left(r_j^{2\frac{\pi}{\alpha_j}}\right)$ , поскольку  $\frac{\pi}{\alpha_j} < 1$ .

**Замечание 3.** При нарушении ограничений (1.7) в случае вершины  $P^j$  разреза (то есть при  $\alpha_j = 2\pi$  – см. рис. 3, а) соблюсти соотношения (3.3) и (3.4) не удаётся, так как  $\sin \alpha_j = 0$  и  $\cos \alpha_j = 1$ . Согласно процедуре Кондратьева [9] (см. также [10, глава 2]) это обстоятельство означает, что к разложениям (3.1) и (3.2) добавляются соответственно члены  $C_{N_j}^{\ln} r_j \ln r_j \cos \varphi_j$  и  $C_{D_j}^{\ln} r_j \ln r_j \sin \varphi_j$  с ненулевыми коэффициентами, которые (члены) придают смещениям (1.2) логарифмические особенности в точке  $P^j$  и тем самым выводят поле  $u = (u_1, u_2)$  из “энергетического” класса  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ , что недопустимо.

Если же правая часть условия Дирихле претерпевает разрыв в какой-либо точке  $P^j$ , то к разложению (3.2) присоединяется член

$$\left(1 - \frac{\varphi_j}{\alpha_j}\right) \lim_{r_j \rightarrow +0} g|_{\varphi_j=0} + \frac{\varphi_j}{\alpha_j} \lim_{r_j \rightarrow +0} g|_{\varphi_j=\alpha_j},$$

который порождает в смещениях (1.2) также неприемлемую сингулярность  $O(r_j^{-1})$ .

После надлежащего поворота декартовой системы координат  $x^j = \Theta^j(x - P^j)$  (см. комментарии к выводу формул (1.8)) выполнены равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_1^j} = \cos \varphi_j \frac{\partial}{\partial r_j} - \sin \varphi_j \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2^j} = \sin \varphi_j \frac{\partial}{\partial r_j} + \cos \varphi_j \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_j},$$

то есть связи (1.2) потенциалов и смещений приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} u_1(x) &= U_1^j + \frac{\pi}{\alpha_j} (K_{N_j} + K_{D_j}) r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j} - 1} \\ &\quad \times \cos \left( \left( \frac{\pi}{\alpha_j} - 1 \right) \varphi_j \right) + O \left( r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j} + \min\{\frac{\pi}{\alpha_j}, 2\} - 1} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= U_2^j - \frac{\pi}{\alpha_j} (K_{N_j} + K_{D_j}) r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j} - 1} \\ &\quad \times \sin \left( \left( \frac{\pi}{\alpha_j} - 1 \right) \varphi_j \right) + O \left( r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j} + \min\{\frac{\pi}{\alpha_j}, 2\} - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $U_q^j$  – постоянные, вычисляемые по коэффициентам  $C_{N_j}^s$ ,  $C_{N_j}^c$  и  $C_{D_j}^s$ ,  $C_{D_j}^c$  линейных составляющих разложений (3.1) и (3.2).

Для выходящих углов показатели  $\frac{\pi}{\alpha_j} - 1$  степени переменной  $r_j = |x - P^j|$  положительны, но в вершинах  $P^1, \dots, P^I$  входящих углов смещения (3.5) и (3.6) приобретают слишком сильные сингулярности. Таким образом, для соблюдения естественного включения  $u \in H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega})^2$ ,

которое означает конечность упругой энергии, запасённой в любой ограниченной части тела, требуются равенства

$$K_{Nj} + K_{Dj} = 0 \quad j = 1, \dots, I,$$

которые могут быть выполнены разве лишь случайно.

Для устранения обнаруженного несоответствия изменим определение потенциалов  $\Phi$  и  $\Psi$ , усложнив их разложения (3.1) и (3.2). С этой целью введём решения  $\zeta_{Nj}$  и  $\zeta_{Dj}$  однородных ( $g = 0$  и  $h = 0$ ) задач (1.3), (1.5) и (1.4), (1.6), заданные своим поведением около точки  $P^\ell$ :

$$\begin{aligned} \zeta_{N\ell}(x) &= \chi_\ell(x) \frac{1}{\pi} r_\ell^{-\frac{\pi}{\alpha_\ell}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha_\ell} \varphi_\ell\right) + \widehat{\zeta}_{N\ell}(x), \\ \zeta_{D\ell}(x) &= \chi_\ell(x) \frac{1}{\pi} r_\ell^{-\frac{\pi}{\alpha_\ell}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha_\ell} \varphi_\ell\right) + \widehat{\zeta}_{D\ell}(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь  $\chi_\ell \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$  – срезающая функция, равная единице в окрестности точки  $P^\ell$ , причём  $\chi_j \chi_\ell = 0$  при  $j \neq \ell$ . Остатки  $\widehat{\zeta}_{N\ell}$  и  $\widehat{\zeta}_{D\ell}$  суть решения из “энергетического” класса  $H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$  задач Дирихле и Неймана для уравнений Гельмгольца

$$\begin{aligned} & -\Delta_x \widehat{\zeta}_{N\ell}(x) - k_1^2 \widehat{\zeta}_{N\ell}(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 2\nabla_x \chi_\ell(x) \cdot \nabla_x + \Delta_x \chi_\ell(x) + k_1^2 \chi_\ell(x) \right) r_\ell^{-\frac{\pi}{\alpha_\ell}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha_\ell} \varphi_\ell\right), \quad x \in \Omega, \\ & -\Delta_x \widehat{\zeta}_{D\ell}(x) - k_1^2 \widehat{\zeta}_{D\ell}(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 2\nabla_x \chi_\ell(x) \cdot \nabla_x + \Delta_x \chi_\ell(x) + k_2^2 \chi_\ell(x) \right) r_\ell^{-\frac{\pi}{\alpha_\ell}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha_\ell} \varphi_\ell\right), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

В случае  $\alpha_\ell > \pi$  правые части уравнений, имеющие компактные носители, попадают в пространство Лебега  $L^2(\Omega)$ , и поэтому в самом деле существуют решения  $\widehat{\zeta}_{N\ell}$  и  $\widehat{\zeta}_{D\ell}$ , допускающие представления вида (3.1), (3.2) около угловых точек и вида (1.13) на бесконечности. Кроме того, функции (3.7) принадлежат классу  $L_{\text{loc}}^2(\overline{\Omega})$ . Отметим, что при  $\alpha_\ell < \pi$  оба упомянутых включения нарушены, и из-за слишком сильной сингулярности в вершинах выходящих углов соответствующие решения востребованы не будут.

Уточним информацию о решениях (3.7) при  $j = 1, \dots, I$ . Во-первых, на больших расстояниях от начала координат  $\mathcal{O}$  решения  $\zeta_{N\ell}$  и  $\zeta_{D\ell}$

совпадают со своими остатками  $\widehat{\zeta}_{N\ell}$  и  $\widehat{\zeta}_{D\ell}$ , а значит,

$$\begin{aligned}\zeta_{N\ell}(x) &= r_0^{-1/2} e^{-ik_1 r_0} (A_\ell(\varphi_0) + O(r_0^{-1})), \\ \zeta_{D\ell}(x) &= r_0^{-1/2} e^{-ik_2 r_0} (B_\ell(\varphi_0) + O(r_0^{-1})).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Кроме того, около угловых точек  $P^j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , то есть при  $r_j \rightarrow +0$ , верны разложения

$$\begin{aligned}\zeta_{N\ell}(x) &= \delta_{\ell,j} \frac{1}{\pi} r_j^{-\frac{\pi}{\alpha_j}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha_j} \varphi_j\right) \\ &\quad + M_{j\ell}^N r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha_j} \varphi_\ell\right) + O\left(r_j^{\min\{2-\frac{\pi}{\alpha_j}, 2\frac{\pi}{\alpha_j}\}}\right), \\ \zeta_{D\ell}(x) &= \delta_{\ell,j} \frac{1}{\pi} r_j^{-\frac{\pi}{\alpha_j}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha_j} \varphi_j\right) \\ &\quad + M_{j\ell}^D r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha_j} \varphi_\ell\right) + O\left(r_j^{\min\{2-\frac{\pi}{\alpha_j}, 2\frac{\pi}{\alpha_j}\}}\right).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Из коэффициентов этих разложений составим матрицы  $M^N$  и  $M^D$  размером  $I \times I$ .

Формулы (1.2), (3.7) и (3.1), (3.2) показывают, что для смещений  $u_1^a$  и  $u_2^a$ , порождённых потенциалами  $\Phi = a_{N\ell} \zeta_{N\ell}$  и  $\Psi = a_{D\ell} \zeta_{D\ell}$ , справедливы представления

$$\begin{aligned}u_1^a(x) &= \frac{1}{\alpha_\ell} (a_{D\ell} - a_{N\ell}) r_\ell^{-\frac{\pi}{\alpha_\ell} - 1} \cos\left(\left(\frac{\pi}{\alpha_\ell} + 1\right) \varphi_\ell\right) + O\left(r_\ell^{\frac{\pi}{\alpha_\ell} - 1}\right), \\ u_2^a(x) &= \frac{1}{\alpha_\ell} (a_{D\ell} - a_{N\ell}) r_\ell^{-\frac{\pi}{\alpha_\ell} - 1} \sin\left(\left(\frac{\pi}{\alpha_\ell} + 1\right) \varphi_\ell\right) + O\left(r_\ell^{\frac{\pi}{\alpha_\ell} - 1}\right),\end{aligned}$$

а значит, их главные сингулярности аннулируются при соблюдении условия

$$a_{N\ell} = a_{D\ell}. \quad (3.10)$$

Соответственно в качестве потенциалов возьмём линейные комбинации

$$\Phi(x) = \Phi^0(x) + \sum_{j=1}^I a_j \zeta_{Nj}(x), \quad \Psi(x) = \Psi^0(x) + \sum_{j=1}^I a_j \zeta_{Dj}(x). \quad (3.11)$$

Здесь  $\Phi^0$  и  $\Psi^0$  – прежние потенциалы с разложениями (3.1) и (3.2), а столбец  $a = (a_1, \dots, a_I)$  подлежит определению.

В силу соотношений (3.9), (3.5), (3.6) и (3.10) находим:

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^I \mathcal{K}_j r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j} - 1} \cos \left( \left( \frac{\pi}{\alpha_j} - 1 \right) \varphi_j \right) + \tilde{u}_1(x),$$

$$u_2(x) = - \sum_{j=1}^I \mathcal{K}_j r_j^{\frac{\pi}{\alpha_j} - 1} \sin \left( \left( \frac{\pi}{\alpha_j} - 1 \right) \varphi_j \right) + \tilde{u}_2(x),$$

причём  $\tilde{u}_q \in H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$  и

$$\mathcal{K}_j = K_{Nj} + K_{Dj} + \sum_{\ell=1}^I (M_{j\ell}^N + M_{j\ell}^D) a_\ell, \quad (3.12)$$

а коэффициенты взяты из формул (3.1), (3.2), (3.9) и (3.11).

Итак, для получения нужного вектора смещений из “энергетического” класса  $H_{\text{loc}}^1(\bar{\Omega})^2$  требуется уничтожить коэффициенты (3.12), то есть положить

$$a = -M^{-1}K. \quad (3.13)$$

При этом  $M = M^N + M^D$  – матрица размером  $I \times I$ , а  $K \in \mathbb{C}^I$  – столбец с компонентами  $K_{Nj} + K_{Dj}$ ,  $j = 1, \dots, I$ .

#### §4. ОПРАВДАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ

Осталось проверить важный факт: матрица  $M$  обратима. Без этого нельзя признать законченным построение поля смещений (1.2) по потенциалам (3.11), так как столбец (3.13) всё ещё не определён.

Сначала подставим решения  $\zeta_{Nj}$  однородной задачи Неймана в формулу Грина на усечённой области  $\Omega_\rho = \{x \in \Omega : r_j > \rho, r_\ell > \rho, r_0 < 1/\rho\}$

с вырезанными малыми кругами. Имеем

$$\begin{aligned}
& \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\partial\Omega_\rho} \left( \overline{\zeta_{N\ell}(x)} \partial_\nu \zeta_{Nj}(x) - \zeta_{Nj}(x) \overline{\partial_\nu \zeta_{N\ell}(x)} \right) ds_x \\
&= \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\Omega \cap \partial\mathbb{B}_\rho(P^j)} \left( \zeta_{Nj}(x) \overline{\partial_{r_j} \zeta_{N\ell}(x)} - \overline{\zeta_{N\ell}(x)} \partial_{r_j} \zeta_{Nj}(x) \right) ds_x \\
&+ \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\Omega \cap \partial\mathbb{B}_\rho(P^\ell)} \left( \zeta_{Nj}(x) \overline{\partial_{r_\ell} \zeta_{N\ell}(x)} - \overline{\zeta_{N\ell}(x)} \partial_{r_\ell} \zeta_{Nj}(x) \right) ds_x \quad (4.1) \\
&- \lim_{\rho \rightarrow +0} \int_{\Omega \cap \partial\mathbb{B}_{1/\rho}} \left( \zeta_{Nj}(x) \overline{\partial_{r_0} \zeta_{N\ell}(x)} - \overline{\zeta_{N\ell}(x)} \partial_{r_0} \zeta_{Nj}(x) \right) ds_x \\
&= M_{j\ell}^N - \overline{M_{\ell j}^N} - 2ik_1(A_j, A_\ell)_{L^2(0, \alpha_0)}.
\end{aligned}$$

При вычислении интегралов по малым дугам  $\Omega \cap \partial\mathbb{B}_\rho(P^q) = \{x : r_q = \rho, \varphi_q \in (0, \alpha_q)\}$  учтены представления (3.9), взаимное уничтожение членов, порождённых основными сингулярностями, и равенство

$$\frac{2}{\alpha_q} \int_0^{\alpha_q} \cos^2 \left( \frac{\pi}{\alpha_q} \varphi_q \right) d\varphi_q = 1. \quad (4.2)$$

Интеграл  $I_{1/\rho}$  по большой дуге  $\Omega \cap \partial\mathbb{B}_{1/\rho} = \{x : r_0 = 1/\rho, \varphi_0 \in (0, \alpha_0)\}$  был найден при помощи соотношений (3.8) и выкладки

$$\begin{aligned}
I_{1/\rho} &= \frac{1}{\rho} \int_0^{\alpha_0} \left( r_0^{-1/2} e^{-ik_1 r_0} A_j(\varphi_0) r_0^{-1/2} \left( \overline{-ik_1 e^{-ik_1 r_0} A_\ell(\varphi_0)} \right) \right. \\
&\quad \left. - r_0^{-1/2} e^{-ik_1 r_0} A_\ell(\varphi_0) r_0^{-1/2} \left( \overline{-ik_1 e^{-ik_1 r_0} A_j(\varphi_0)} \right) \right) \Big|_{r_0=1/\rho} d\varphi_0 + o(1) \\
&= 2ik_1 \int_0^{\alpha_0} A_j(\varphi_0) \overline{A_\ell(\varphi_0)} d\varphi_0 \quad \text{при } \rho \rightarrow +0.
\end{aligned} \quad (4.3)$$

Следовательно,

$$M^N - (M^N)^* = 2ik_1 G^N, \quad (4.4)$$

где  $S^*$  – сопряженная матрица для матрицы  $S$ , а  $G^N$  –  $(I \times I)$ -матрица Грама, построенная при помощи скалярного произведения в (комплексном) пространстве  $L^2(0, \alpha_0)$  по набору коэффициентов  $A_1, \dots, A_I$  в представлениях (3.8)

Функции  $A_1, \dots, A_I$  линейно независимы. В самом деле, если их линейная комбинация  $\mathcal{A} = c_1 A_1 + \dots + c_I A_I$  обращается в нуль, то решение  $\mathcal{Z}_N = c_1 \zeta_{N1} + \dots + c_I \zeta_{NI}$  однородной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца (1.3) затухает на бесконечности со скоростью  $O(r_0^{-3/2})$ , а значит, как и в замечании 2,  $\mathcal{Z}_N = 0$  на бесконечном секторе  $\mathbb{K} \setminus \mathbb{B}_R$ . Кроме того, по теореме о единственности продолжения (см., например, книгу [24]) функция  $\mathcal{Z}_N$  аннулируется всюду в  $\Omega$ , причём её особенности в точках  $P^1, \dots, P^I$  не играют никакой роли. В итоге видим, что матрица  $G^N$  положительно определённа.

Аналогично, но с заменой  $\cos \mapsto \sin$  в равенстве (4.2) выводим формулу

$$M^D - (M^D)^* = 2ik_2 G^D \quad (4.5)$$

с симметричной положительно определённой матрицей Грама  $G^D = (G_{j\ell}^D)_{j,\ell=1}^I$ .

**Замечание 4.** Из-за недостаточно быстрого затухания и присутствия осциллирующего множителя в разложении (3.8) весовой функции  $\zeta_{N\ell}$  на бесконечности последний интеграл в средней части цепочки (4.1) имеет, вообще говоря, ненулевой предел (4.3). По той же причине искажаются привычные интегральные представления [25] (см. также [10, глава 2, §4, глава 3, §2 и 5]) коэффициента интенсивности в разложении (3.1) потенциала  $\Phi$  в вершине  $P^j$  входящего угла:

$$K_{Nj} = - \int_{\partial\Omega} g(x) \overline{\zeta_{Nj}(x)} ds_x + 2k_1 i \int_0^{\alpha_0} A(\varphi_0) \overline{A_j(\varphi_0)} d\varphi_0. \quad (4.6)$$

Для выходящих углов первый интеграл в правой части формулы (4.6) расходится из-за сильной особенности  $O(r_j^{-\frac{\pi}{\alpha_j}})$  подынтегрального выражения, и эта формула гарантированно сохраняется только в случае  $g(x) = 0$  в окрестности точки  $P^j$  (необходимое исправление указано, например, в [10, глава 2, §4]).

Эти обстоятельства не были приняты во внимание в статье [23] (см. конец разд. 2). Между прочим, именно последнее выражение (4.3) позволяет установить неособенность матрицы  $M$  из формулы (3.13).

Для проверки обратимости матрицы  $M = M^N + M^D$  нужно доказать, что только нулевой столбец  $b \in \mathbb{C}^I$  удовлетворяет равенствам  $Mb = 0$  или  $M^*b = 0$  (альтернатива Фредгольма). В обоих случаях в силу соотношений (4.4) и (4.5) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= ((M^N + M^D)b, b)_{\mathbb{C}^I} = (b, ((M^N)^* + (M^D)^*)b)_{\mathbb{C}^I} \\ &\Rightarrow 0 = ((M^N - (M^N)^* + M^D - (M^D)^*)b, b)_{\mathbb{C}^I} \quad (4.7) \\ &= 2ik_1 (G^N b, b)_{\mathbb{C}^I} + 2ik_2 (G^D b, b)_{\mathbb{C}^I}. \end{aligned}$$

Ввиду установленных свойств матриц  $G^N$  и  $G^D$  формула (4.7) влечёт за собой равенство  $b = 0 \in \mathbb{C}^I$ . Именно в этом и нужно было убедиться.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. В. Костров, *Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду*. — Прикладная матем. и механика. **50**, No. 1 (1966), 198–202.
2. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*. М., (1980).
3. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*. — М.: Наука, **4**, часть 2, (1981).
4. Г. Ватсон, *Теория бесселевых функций*. — М.: ИЛ (1949).
5. О. М. Сапонджян, *Изгиб тонких упругих плит*. — Ереван: Айастан (1975).
6. М. Ш. Бирман, *О вариационном методе Трэффца для уравнения  $\Delta^2 u = f$* . — Докл. АН СССР, **101**, No. 2 (1955), 201–204.
7. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*. — М.: Наука (1970).
8. М. Ш. Бирман, Г. Е. Скворцов, *О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей* — Известия ВУЗ'ов. Матем., No. 5 (1962), 11–21.
9. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества, **16** (1963), 219–292.
10. S. A. Nazarov, V. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, (1994).
11. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, *О парадоксе Сапонджяна–Бабушки в задачах теории тонких пластин*. — Доклады АН АрмССР, No. 3, **78** (1984), 127–130.
12. S. A. Nazarov, G. Sweers, *A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners*. — J. of Differential Equations, No. 1, **233** (2007), 151–180.
13. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк,  *$L^2$ -теория оператора Максвелла в произвольных областях*. — Успехи матем. наук, No. 6, **42** (1987), 61–76.
14. М. Ш. Бирман, *Три задачи теории сплошных сред в многогранниках*. — Зап. научн. семина. ПОМИ, **200** (1992), 27–37.

15. F. Assous, Jr. P. Ciarlet, E. Sonnendrücker, *Résolution des équations de Maxwell dans un domaine avec un coin rentrant*. — C.R. Acad. Sci. Paris S ér. Math., No. 2, **323** (1996), 203–208.
16. M. Costabel, M. Dauge, *Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains*. — Arch. Ration. Mech. Anal., No. 3, **151** (2000), 221–276.
17. М. Ш. Бирман, *К теории самоспряженных расширений положительно определенных операторов*. — Матем. сборник, **38(80)** (1956), 431–450.
18. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом*. — Докл. АН СССР, No. 5, **137** (1961), 1011–1014.
19. Б. С. Павлов, *Теория расширений и явно решаемые модели*. — Успехи матем. наук, **42**, No. 6 (1987), 99–132.
20. С. А. Назаров, *Самоспряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах*. — Матем. сборник, No. 2, **137** (1988), 224–241.
21. С. А. Назаров, *Асимптотические условия в точках, самоспряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений*. — Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва, **5** (1996), 112–183.
22. С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, *Краевые задачи для бигармонического уравнения и интегрированного лапласиана в трехмерной области с ребром*. — Зап. научн. семин. ПОМИБ **366** (2006), 153–198.
23. Н. Ф. Морозов, И. Л. Суrowцова, *Задача о динамическом нагружении плоских упругих областей с угловыми точками контура*. — Прикладная матем. и механика, **61**, No. 4 (1997), 654–659.
24. L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations*. New York: Interscience, 1964.
25. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками*. — Math. Nachr., **76** (1977), 29–60.

Nazarov S. A. Dynamic plane deformation of semi-infinite polygonal plate: Kostrov’s “paradox” and its amendment.

Under dynamic loading of a concave isotropic wedge the usual formulas which express the displacement field through two potentials and applies for any convex wedge, lead to a strong singularity at the vertex and need to be improved (so-called Kostrov’s correction). For an unbounded isotropic and homogeneous plane polygonal body, we derive a construction of the potentials providing true singularities of the displacement field in vertices of several “entering” corners. We also correct inaccuracies found in previous publications.

Институт Проблем Машинovedения РАН,  
Большой проспект, В.О., 61  
199178, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 1 июля 2024 г.