Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

А. С. Михайлов, В. С. Михайлов

ОБ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПЕРЕНОСА ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

Посвящается юбилею Михаила Игоревича Белишева

§1. Введение.

Предположим, что $p, q \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$, для таких функций и некоторого фиксированного $T \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим начально-краевые задачи для двух динамических систем

$$\begin{cases} u^+_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u^+_x + \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} u^+ = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0, \\ u^+(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0, \\ u^{+,1}(0,t) = f(t), \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} u^-_t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u^-_x - \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} u^- = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0, \\ u^-(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0, \\ u^{-,2}(0,t) = g(t), \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где мы предполагаем, что $f, g \in \widetilde{\mathcal{F}}^T = L_2(0,T;\mathbb{C})$ — *граничные управления*. Решения систем (1.1), (1.2) обозначим $u^{+,f} = \begin{pmatrix} u^{+,f,1} \\ u^{+,f,2} \end{pmatrix}$, $u^{-,g} = \begin{pmatrix} u^{-,g,1} \\ u^{-,g,2} \end{pmatrix}$. Известно, что для $f, g \in C^1(0,T)$ таких, что $f(0)=f'(0)=g(0)=g'(0)=0$, существуют классические решения: $u^{+,f}, u^{-,g} \in C\left(0,T; L_2((0,T)^2;\mathbb{C})\right)$.

Операторы реакции R^T_+, R^T_-, определенные на области $D = C_0^\infty(0,T)$ задаются следующим образом

$$\left(R^T_+ f\right)(t) := u^{+,f,2}(0,t), \quad \left(R^T_- g\right)(t) := u^{-,g,1}(0,t). \tag{1.3}$$

В данной работе мы предлагаем метод восстановления коэффициентов p, q на временном интервале $(0,T)$ с использованием информации об операторах R^T_+, R^T_- на интервале $(0, 2T)$.

Ключевые слова: обратные задачи, метод Граничного управления, система переноса.

Обратим внимание, что уравнение в системе (1.2) связано с уравнением в системе (1.1) через инверсию времени: $t \mapsto -t$. Мы используем две системы для простоты и удобства, но можно изучать динамическую обратную задачу для (1.1), которая рассматривается как для положительных, так и для отрицательные времен.

Мы используем метод Граничного управления (ГУ), первоначально предложенный для решения граничной обратной задачи (ОЗ) для многомерного волнового уравнения [3], о применении метода ГУ к одномерным системам см. [2, 5, 8].

Во втором разделе мы рассматриваем динамическую обратную задачу для (1.1), (1.2). В нашей ситуации мы используем несамосопряженную версию метода ГУ [1,6], для ее применения нам требуется ввести пару вспомогательных систем, сопряженных к (1.1), (1.2). Системы первого порядка (1.1), (1.2) имеют особенность, а именно, *граничной управляемости.* Чтобы преодолеть это препятствие, нужно ввести (см. [7]) дополнительные конструкции в определения операторов метода ВС. Далее мы выводим уравнения типа Крейна для ОЗ и даем процедуру восстановления неизвестной матрицы.

В третьем разделе мы приводим возможную физическую мотивацию обратной задачи, связываем ее с транспортной системой первого порядка в соответствии с [11].

В последнем разделе мы изучаем частные случаи матрицы потенциала, в том числе случай, когда ее можно восстановить только из оператора R_+.

Отметим, что аналогичные задачи для гиперболических систем первого порядка рассматривались в серии статей [9, 10, 12–14], где авторы использовали спектральные методы. Отметим, что в этих работах авторы при рассмотрении динамической задачи также используют наблюдения (отклики) как для положительных, так и для отрицательных времен.

§2. Обратная задача, общий случай

2.1. Прямая задача, вспомогательные системы. Заметим, что (1.1), (1.2) связаны по следующим правилам:

$$\left\{u^{-,2}, u^{-,1}, -p, -q\right\} \to \left\{u^{+,1}, u^{+,2}, p, q\right\}$$

Определим множества

$$\Pi^T := \left\{(x,t)\,\middle|\,x \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\right\},$$
$$\Delta_\tau := \left\{(x,t)\in\Pi^T\,\middle|\,x+T-\tau\leqslant t\right\},$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Используя метод ВКБ можно показать следующее

Лемма 1. *Если* $p,q \in C^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);\mathbb{C})$ *и управления* $f,g \in C^1(0,T;\mathbb{C})$ *такие, что* $f(0)=f'(0)=g(0)=g'(0)=0$ *тогда решение* (1.1), (1.2) *классическое* $u^{+,f}, u^{-,g} \in C^1(\Pi^T;C^2)$ *и допускают следующие представления*

$$u^{+,f}(x,t)=\begin{pmatrix} e^{-\int\limits_0^x p(y)\,dy} f(t-x)\\ 0\end{pmatrix}+\int\limits_x^t \begin{pmatrix} W_1(x,s)\\ W_2(x,s)\end{pmatrix} f(t-s)\,ds, \tag{2.1}$$

$$u^{-,g}(x,t)=\begin{pmatrix} 0\\ e^{\int\limits_0^x p(y)\,dy} g(t-x)\end{pmatrix}+\int\limits_x^t \begin{pmatrix} W_3(x,s)\\ W_4(x,s)\end{pmatrix} g(t-s)\,ds, \tag{2.2}$$

где ядра $\begin{pmatrix} W_1\\ W_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_3\\ W_4\end{pmatrix} \in C^1\left(\Delta_T,\mathbb{C}^2\right)$ *такие, что*

$$\left.\begin{pmatrix} W_1\\ W_2\end{pmatrix}\right|_{t<x}=\left.\begin{pmatrix} W_3\\ W_4\end{pmatrix}\right|_{t<x}=0.$$

Из приведенных выше представлений следует, что состояния (1.1), (1.2) *в момент времени* $t=T$ *равны* $u^{+,f}(x,T),\ u^{-,g}(x,T)\in\mathcal{H}^T = L_2(0,T;\mathbb{C}^2)$.

Если управления $f,g\in L_2(0,T;\mathbb{C})$ *тогда правые части* (2.1), (2.2) *определяют элементы пространства* $C(0,T;L_2(0,T;\mathbb{C}^2))$ *которые рассматриваются как обобщенные решения систем* (1.1), (1.2).

Доказательство. Мы приводим здесь набросок доказательства, который весьма похож на тот, что представлен в [7, Sec. 2.2]. Мы ограничимся решением (1.1), вторая система рассматривается аналогичным образом.

Введем фундаментальное решение системы (1.1) как решение, соответствующее управлению функцией Дирака $f(t)=\delta(t)$. Ищем представление $u^{+,\delta}$ в виде

$$u^{+,f}=\delta(t-x)\begin{pmatrix} a_1(x)\\ a_2(x)\end{pmatrix}+\theta(t-x)\begin{pmatrix} b_1(x)\\ b_2(x)\end{pmatrix}+\dots$$

с θ, являющейся функцией Хевисайда. Подставляя приведенное выше представление в уравнение (1.1), получаем следующие равенства

$$\delta' a_1 + \delta b_1 - \delta' a_1 + \delta a_1' - \delta b_1 + \theta b_1' + p\delta a_1 + q\delta a_2 + p\theta b_1 + q\theta b_2 + \ldots = 0,$$
$$\delta' a_2 + \delta b_2 + \delta' a_2 - \delta a_2' + \delta b_2 - \theta b_2' + q\delta a_1 + p\delta a_2 + q\theta b_1 + p\theta b_2 + \ldots = 0$$

Приравнивая коэффициенты при δ' получаем, что $a_2 = 0$. Приравнивая коэффициенты при δ получаем, что $a_1 = e^{-\int\limits_0^x p(y)\,dy}$. Таким образом, фундаментальное решение имеет вид

$$u^{+,\delta} = \begin{pmatrix} e^{-\int\limits_0^x p(y)\,dy} \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t-x) + \begin{pmatrix} W_1(x,t) \\ W_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

Классическое решение (1.1) связано с фундаментальным решением по формуле Дюамеля

$$u^{+,f}(x,t) = \left[u^{+,\delta}(x,\cdot) * f\right](t),$$

которая дает (2.1).

Заметим, что приведенные выше рассуждения дают эмпирическое доказательство формулы (2.1). Для обоснования формулы и получения свойств ядра $\begin{pmatrix} W_1(x,t) \\ W_2(x,t) \end{pmatrix}$ необходимо свести (1.1) к интегральному уравнению. Сначала рассмотрим систему

$$\begin{cases} k_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} k_x = h, & x > 0, \quad 0 < t < T, \\ k^{1,2}(0,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ k^{1,2}(x,0) = 0, & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

для $h \in C^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^T, \mathbb{C}^2)$. Вводя новые переменные $\alpha = x + t$, $\beta = t - x$ и новую функцию $v(\alpha,\beta) = k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, проинтегрируем вышеуказанную систему:

$$v^1(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha h^1\left(\frac{\alpha'+\beta}{2}, \frac{\alpha'-\beta}{2}\right) d\alpha',$$
$$v^2(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\int\limits_\beta^\alpha h^2\left(\frac{\alpha+\beta'}{2}, \frac{\alpha-\beta'}{2}\right) d\beta'.$$

Разрешающий оператор (2.3) обозначается S, он действует в пространстве $C^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^T,\mathbb{C}^2)$ по правилу $Sh = k(x,t)$. Легко видеть, что если $\operatorname{supp} h \subset \Delta_\tau$, то $\operatorname{supp} Sh \subset \Delta_\tau$.

При поиске решения (1.1) в форме

$$u^{+,f}(x,t) = \begin{pmatrix} e^{-\int\limits_0^x p(y)\,dy} f(t-x) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{W}_1(x,s) \\ \widetilde{W}_2(x,s) \end{pmatrix},$$

мы видим, что $\begin{pmatrix} \widetilde{W}_1(x,s) \\ \widetilde{W}_2(x,s) \end{pmatrix}$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \widetilde{W}_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \widetilde{W}_x = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -pe^{\int\limits_0^x p(y)\,dy} f(t-x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^x p(y)\,dy} f(t-x) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \widetilde{W}, \quad x>0, \quad 0<t<T, \\ \widetilde{W}(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0, \\ \widetilde{W}(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Применим оператор S к первому равенству в (2.4) и получим следующее интегральное уравнение:

$$\widetilde{W} + A\widetilde{W} = S \begin{pmatrix} 2p & q \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\int\limits_0^x p(y)\,dy} f(t-x) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $A = S\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$. Уравнение (2.5) можно изучать стандартными методами, см. например [7, Sec. 2.2, Section 2.3]. □

Из приведенных выше представлений следует следующий вид операторов отклика:

$$\left(R_+^T f\right)(t) = \int\limits_0^t r_+(s) f(t-s)\,ds, \quad r_+(s) = W_2(0,s), \tag{2.6}$$

$$\left(R_-^T f\right)(t) = \int\limits_0^t r_-(s) f(t-s)\,ds, \quad r_(s) = W_3(0,s).$$

Для того чтобы применить несамосопряженную версию метода ГУ [1,6], нам необходимо ввести две вспомогательные системы, формально сопряженные к (1.1) и (1.2):

$$\begin{cases} v_t^+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_x^+ - \begin{pmatrix} \bar p & \bar q \\ \bar q & \bar p \end{pmatrix} v^+ = 0, & x \geqslant 0,\ t \geqslant 0, \\ v^+(x,0) = 0, & x \geqslant 0, \\ v^{+,1}(0,t) = F(t), & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} v_t^- - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_x^- + \begin{pmatrix} \bar p & \bar q \\ \bar q & \bar p \end{pmatrix} v^- = 0, & x \geqslant 0,\ t \geqslant 0, \\ v^-(x,0) = 0, & x \geqslant 0, \\ v^{-,2}(0,t) = G(t), & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $F, G \in \widetilde{\mathcal{F}}^T$, а черточка обозначает комплексное сопряжение. Решения систем (2.7), (2.8) обозначаются через $v^{+,F} = \begin{pmatrix} v^{+,F,1} \\ v^{+,F,2} \end{pmatrix}$, $v^{-,G} = \begin{pmatrix} v^{-,G,1} \\ v^{-,G,2} \end{pmatrix}$.

Операторы отклика $\widetilde{R}_+^T, \widetilde{R}_-^T$ для (2.7) и (2.8) определены на области $D := C_0^\infty(0,T)$ и вводятся как

$$\left(\widetilde{R}_+^T F\right)(t) := v^{+,F,2}(0,t), \quad \left(\widetilde{R}_-^T G\right)(t) := v^{-,G,1}(0,t).$$

2.2. Операторы метода ГУ. Используя Лемму 1, определяем оператор *управления* для системы (1.1) по правилу

$$\widetilde{W}^T : \widetilde{\mathcal{F}}^T \mapsto \mathcal{H}^T, \quad \widetilde{W}^T f := u^{+,f}(\cdot,T).$$

Для системы (1.1) рассмотрим задачу *граничного управления*: взяв произвольное $a \in \mathcal{H}^T$, требуется найти управление $f \in \mathcal{F}^T$ такое, что $u^{+,f}(x,T) = a(x)$. Из представления (2.1) видно, что такое управление может не существовать, оператор W^T необратим и, таким образом, система (1.1) не является управляемой с границы.

Мы используем прием из [7], вводя расширенное пространство управлений $\mathcal{F}^T = L_2(0,T;\mathbb{C}^2)$ и расширенный *оператор управления* $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^T$, связанный с системами (1.1), (1.2) по правилу:

$$W^T \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := u^{+,f}(\cdot,T) + u^{-,g}(\cdot,T).$$

Вспомогательный расширенный оператор управления $W^T_{\#} : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^T$ для второй пары систем (2.7), (2.8) вводится формулой

$$W^T_{\#}\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix} := v^{+,F}(\cdot,T) + v^{-,G}(\cdot,T).$$

Введенные таким образом операторы управления обладают важным свойством:

Лемма 2. *W^T и $W^T_{\#}$ являются изоморфизмами из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{H}^T$.*

Доказательство. Используя Лемму 1, получаем следующее представление для W^T:

$$W^T\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\int\limits_0^x p(y)\,dy} f(T-x)\\ e^{\int\limits_0^x p(y)\,dy} g(T-x)\end{pmatrix} + \int\limits_x^T \begin{pmatrix} W_1(x,s) & W_3(x,s)\\ W_2(x,s) & W_4(x,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(T-s)\\ g(T-s)\end{pmatrix} ds.$$

Взяв произвольный вектор $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \in \mathcal{H}^T$, мы видим, что уравнение

$$W^T\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

является уравнением Вольтерра второго рода что приводит к доказательству утверждения. Для оператора $W^T_{\#}$ доказательство аналогично. $\square$

Мы сделаем следующее наблюдение, которое проверяется прямыми вычислениями:

Замечание 1. *Решения систем* (1.1), (2.8) *и* (1.2), (2.7) *связаны следующими равенствами:*

$$u^{+,1,f} = \bar{v}^{-,2,f}, \quad u^{+,2,f} = \bar{v}^{-,1,f},$$
$$u^{-,1,f} = \bar{v}^{+,2,f}, \quad u^{-,2,f} = \bar{v}^{+,1,f}.$$

Эти равенства, в частности, подразумевают, что отклики для систем (2.7), (2.8) связаны с откликами (1.1), (1.2):

Замечание 2. *Операторы реакции* (1.1), (2.8) *и* (1.2), (2.7) *связаны соотношениями:*

$$\overline{R}_{+}^{T}=\widetilde{R}_{-}^{T},\quad \overline{R}_{-}^{T}=\widetilde{R}_{+}^{T}.$$

Таким образом, четыре динамические системы дают два разных отклика.

Введем *связывающий* оператор $C^T:\mathcal{F}^T\mapsto\mathcal{F}^T$ через следующую билинейную форму:

$$\left(C^T\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_1\\g_1\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{F}^T}=\left(W^T\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix},W^T_{\#}\begin{pmatrix}f_1\\g_1\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}^T}$$
$$=\int\limits_0^T\left(u^{+,f}(x,T)+u^{-,g}(x,T),\overline{v^{+,f_1}(x,T)+v^{-,g_1}(x,T)}\right)dx.$$

Важно, что оператор C^T может быть выражен через обратные данные:

Теорема 1. *Связывающий оператор является изоморфизмом в* $\mathcal{F}^T$, *более того, он допускает следующее представление*

$$C^T=\begin{pmatrix}I-(R_{+}^{T})^{*}R_{+}^{T} & (Z^T)^{*}\Pi^{2T}R_{+}^{2T}Z^T\\ (Z^T)^{*}\Pi^{2T}R_{-}^{2T}Z^T & I-(R_{-}^{T})^{*}R_{-}^{T}\end{pmatrix},\tag{2.9}$$

где $Z^T:\widetilde{\mathcal{F}}^T\mapsto\widetilde{\mathcal{F}}^{2T}$ *является оператором продолжения нулем*

$$(Z^Tf)(t)=\begin{cases}f(t), & 0\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & T<t\leqslant 2T,\end{cases}$$

и его сопряженный $(Z^T)^*$ *ограничивает управление* $f\in\widetilde{\mathcal{F}}^{2T}$ *на отрезок* $[0,T]$. *Оператор* Π^{2T} *действует в* $\widetilde{\mathcal{F}}^{2T}$ *по правилу*

$$(\Pi^{2T}f)(t)=f(2T-t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2T.$$

Связывающий оператор C^T *можно записать в интегральной форме*

$$\left(C^T\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}\right)(t)=\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix}+\int\limits_0^T\begin{pmatrix}c_{11}(t,s) & c_{12}(t,s)\\ c_{21}(t,s) & c_{22}(t,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(s)\\g(s)\end{pmatrix}ds,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{2.10}$$

где элементы c_{ij} определяются следующими отношениями

$$c_{11}(t,s) = -\int\limits_{max\{s,t\}}^{T} r_+(\tau - s) r_+(\tau - t) d\tau,$$

$$c_{22}(t,s) = -\int\limits_{max\{s,t\}}^{T} r_-(\tau - s) r_-(\tau - t) d\tau,$$

$$c_{12}(t,s) = r_+(2T - t - s),$$

$$c_{21}(t,s) = r_-(2T - t - s).$$

Доказательство. Возьмем управления $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^T$ с $f, g, F, G \in C_0^\infty(0, T; \mathbb{C})$ и определим функцию Благовещенского

$$\Psi(t,s) := \big(u^{+,f}(\cdot,t) + u^{-,g}(\cdot,t), v^{+,F}(\cdot,s) + v^{-G}(\cdot,s)\big)_{\mathcal{H}^T}$$
$$= \Psi^{+,+}(t,s) + \Psi^{+,-}(t,s) + \Psi^{-,+}(t,s) + \Psi^{-,-}(t,s).$$

Рассмотрим

$$\Psi^{+,+}(t,s) = \int\limits_0^T u^{+,f}(x,t)\overline{v^{+,F}(x,s)}\, dx.$$

Преобразуем, используя уравнения в (1.1):

$$\Psi_t^{+,+}(t,s) = \int\limits_0^T \left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u_x^{+,f}(x,t) - \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} u^{+,f}(x,t) \right) \overline{v^{+,F}(x,s)}\, dx.$$

Затем интегрируем по частям, чтобы получить

$$\Psi_t^{+,+}(t,s) = \int\limits_0^T u^{+,f}(x,t) \overline{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_x^{+,F}(x,s) - \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{q} \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} v^{+,F}(x,s) \right)} dx$$
$$+ u^{+,f,1}(0,t)\overline{v^{+,F,1}(0,s)} - u^{+,f,2}(0,t)\overline{v^{+,F,2}(0,s)}.$$

Затем используем уравнение в (2.7):

$$\Psi_t^{+,+}(t,s) = \int\limits_0^T u^{+,f}(x,t) \left(\overline{-v_s^{+,F}(x,s)} \right) dx + f(t)\overline{F(s)} - R_+^T f(t) \overline{\widetilde{R}_+^T F(s)}.$$

Таким образом, мы получаем что $\Psi^{+,+}$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\Psi^{+,+}_t(t,s)+\Psi^{+,+}_s(t,s)=f(t)\overline{F(s)}-R_+^Tf(t)\overline{\widetilde{R}_+^TF(s)}. \tag{2.11}$$

Функцию

$$\Psi^{+,-}(t,s)=\int\limits_0^T u^{+,f}(x,t)\overline{v^{-,G}(x,s)}\,dx$$

мы преобразуем, используя уравнения в (1.1):

$$\Psi^{+,-}_t(t,s)=\int\limits_0^T\left(-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}u^{+,f}_x(x,t)-\begin{pmatrix}p&q\\q&p\end{pmatrix}u^{+,f}(x,t)\right)\overline{v^{-,G}(x,s)}\,dx.$$

Затем интегрируем по частям, чтобы получить

$$\Psi^{+,-}_t(t,s)=\int\limits_0^T u^{+,f}(x,t)\overline{\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}v^{-,G}_x(x,s)-\begin{pmatrix}\bar p&\bar q\\\bar q&\bar p\end{pmatrix}v^{-,G}(x,s)\right)}\,dx$$
$$+u^{+,f,1}(0,t)\overline{v^{-,G,1}(0,s)}-u^{+,f,2}(0,t)\overline{v^{-,G,2}(0,s)}.$$

Затем используем уравнение в (2.8):

$$\Psi^{+,-}_t(t,s)=\int\limits_0^T u^{+,f}(x,t)\left(\overline{v^{-,G}_s(x,s)}\right)\,dx+f(t)\overline{\widetilde{R}_-^TG(s)}-R_+^Tf(t)\overline{\widetilde{G}(s)}.$$

Таким образом, мы получаем следующее уравнение на $\Psi^{+,-}$

$$\Psi^{+,-}_t(t,s)-\Psi^{+,-}_s(t,s)=f(t)\overline{\widetilde{R}_-^TG(s)}-R_+^Tf(t)\overline{\widetilde{G}(s)}. \tag{2.12}$$

Уравнения для $\Psi^{-,+}$ и $\Psi^{-,-}$ получаются аналогичным образом, они имеют вид:

$$\Psi^{-,-}_t(t,s)+\Psi^{-,-}_s(t,s)=g(t)\overline{G(s)}-R_-^Tg(t)\overline{\widetilde{R}_-^TG(s)}, \tag{2.13}$$

$$\Psi^{-,+}_t(t,s)-\Psi^{-,+}_s(t,s)=f(t)\overline{\widetilde{R}_+^TF(s)}-R_+^Tf(t)\overline{\widetilde{F}(s)}. \tag{2.14}$$

Учитывая нулевые граничные данные при $t=0$, $s=0$ для всех четырех функций, можно проинтегрировать (2.11), (2.12), (2.14), (2.13) по д'Аламберу и получить представления (2.9), (2.10), учитывая, что

$$\left(C^T\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix}\right)=\Psi(T,T).$$

□

2.3. Обратная задача, уравнения метода ГУ. Фиксируем произвольные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и обозначим через $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1_x \\ y^2_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = 0, \\ y^1(0) = \alpha, \quad y^2(0) = \beta. \end{cases} \tag{2.15}$$

Затем мы ставим *специальную задачу управления*: требуется найти управление $\begin{pmatrix} f^T \\ g^T \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^T$ такое, что

$$W^T \begin{pmatrix} f^T \\ g^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < T. \tag{2.16}$$

Благодаря Лемме 2 мы знаем, что такое управление существует и единственно. Более того, его можно найти как решение следующих уравнений:

Теорема 2. *Управление* $\begin{pmatrix} f^T \\ g^T \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^T$*, решающее специальную задачу управления* (2.16)*, можно найти как единственное решение следующего уравнения:*

$$C^T \begin{pmatrix} f^T \\ g^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \left(\widetilde{R}^*_+ 1\right)(t) \\ \beta - \alpha \left(\widetilde{R}^*_- 1\right)(t) \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

где $\widetilde{R}^*_+, \widetilde{R}^*_-$ *— операторы, сопряженные к* $\widetilde{R}_+, \widetilde{R}_-$

Доказательство. Возьмем произвольный $\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^T$ и выпишем билинейную форму:

$$\left(C^T \begin{pmatrix} f^T \\ g^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{F}^T} = \int_0^T \left(\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, v^{+,f_1}(x,T) + v^{-,g_1}(x,T) \right) dx.$$

Записывая

$$v^{+,f_1}(x,T) = \int_0^T v^{+,f_1}_t(x,s)\, ds, \quad v^{-,g_1}(x,T) = \int_0^T v^{-,g_1}_t(x,s)\, ds,$$

мы можем преобразовать

$$\left(C^T\begin{pmatrix}f^T\\g^T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_1\\g_1\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{F}^T}=\int\limits_0^T\left(\begin{pmatrix}y^1\\y^2\end{pmatrix},\int\limits_0^T-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}v_x^{+,f_1}\right.$$
$$\left.+\begin{pmatrix}\bar p&\bar q\\\bar q&\bar p\end{pmatrix}v^{+,f_1}\,ds+\int\limits_0^T\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}v_x^{-,g_1}-\begin{pmatrix}\bar p&\bar q\\\bar q&\bar p\end{pmatrix}v^{-,g_1}\,ds\right)\,dx,$$

затем интегрируя по частям и используя уравнение (2.15) получаем, что

$$\left(C^T\begin{pmatrix}f^T\\g^T\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_1\\g_1\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{F}^T}=\int\limits_0^T\alpha f_1(s)-\alpha\left(\widetilde{R}_-^Tg_1\right)(s)-\beta\left(\widetilde{R}_+^Tf_1\right)(s)$$
$$+\beta g_1(s)\,ds=\int\limits_0^T\begin{pmatrix}\alpha-\beta\left(\widetilde{R}_+^T1\right)(s)\\\beta-\alpha\left(\widetilde{R}_-^T1\right)(s),\begin{pmatrix}f_1\\g_1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\,ds.$$

Ввиду произвольности $\begin{pmatrix}f_1\\g_1\end{pmatrix}$, приходим к (2.17). $\square$

Теперь покажем, как восстановить матрицу потенциала из решения (2.17): сначала заметим, что в силу представлений (2.1), (2.2), верно следующее равенство:

$$\left(W^T\begin{pmatrix}f^T\\g^T\end{pmatrix}\right)(T)=\begin{pmatrix}y^1(T)\\y^2(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^T(0)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy}\\g^T(0)e^{\int\limits_0^T p(y)\,dy}\end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Введем обозначения: $F(T):=f^T(0)$, $G(T):=g^T(0)$ и запишем уравнение (2.15), используя представление (2.18):

$$F'(T)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy}+F(T)(-p(T))e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy}$$
$$+p(T)F(T)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy}+q(T)G(T)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy}=0,$$

$$- G'(T)e^{\int\limits_0^T p(y)\,dy} - G(T)p(T)e^{\int\limits_0^T p(y)\,dy} + q(T)F(T)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy} + p(T)G(T)e^{\int\limits_0^T p(y)\,dy} = 0.$$

Приводя подобные, мы приходим к

$$F'(T)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy} + q(T)G(T)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy} = 0,$$
$$-G'(T)e^{\int\limits_0^T p(y)\,dy} + q(T)F(T)e^{-\int\limits_0^T p(y)\,dy} = 0.$$

Используя (2.18) получим:

$$p(T) = \frac{1}{4}\left(\log\left(-\frac{F(T)F'(T)}{G(T)G'(T)}\right)\right)',$$
$$q(T) = -\frac{y^1_x(T) + p(T)y^1(T)}{y^2(T)}.$$

§3. Физическая интерпретация, выводы

Характеризация данных обратной динамической задачи является важной проблемой в теории обратных задач. Метод ГУ предоставляет способ получения такой характеризации как в самосопряженном [7], так и в несамосопряженном [1,6] случаях. Сформулируем ожидаемый результат в нашей ситуации.

Теорема 3. *Функции $r_+(t), r_t \in C^1(0,2T)$ являются функциями отклика систем* (1.1), (1.2) *тогда и только тогда, когда оператор C^τ $0 < \tau \leqslant 2T$, построенный по формуле* (2.10)*, является изоморфизмом в $L_2(0,2\tau;\mathbb{C}^2)$.*

Отметим, что система (1.1) является (одномерной) системой переноса: действительно, в соответствии с [11, стр. 52], общий вид уравнения переноса в $\mathbb{R}^3$ имеет вид:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} + (s,\nabla\phi) + \alpha\phi = \frac{\alpha h}{4\pi}\int\limits_{S_1}\phi(x,s',t)\,ds = 0$$

В одномерной ситуации направление s принимает два значения $s = +1,-1$. Возьмем скорость $v = 1$ и $\phi(x,t,s) = v\rho(x,t,s)$, где ρ - плотность частиц в точке x, движущихся в направлении s, $\alpha(x) = \frac{1}{l(x)}$, где

l - длина свободного пробега частицы в точке x, $h(x) = p_1(x) + \nu p_3(x)$, где p_1 — вероятность отражения частицы, p_3 — вероятность деления ядра на ν частиц. Тогда, введя обозначения $u^1(x,t) = \phi(x,t,+1)$, $u^2(x,t) = \phi(x,t,-1)$, мы приходим к следующей системе

$$u_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u_x + \alpha(x) \begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{2} & -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} & 1 - \frac{h}{2} \end{pmatrix} u = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Наши результаты, в частности, восстановление матричного потенциала в (1.1) из операторов реакции для положительных и отрицательных времен R^T_+, R^T_-, вместе с теоремой 3 подразумевают, что для системы переноса обратная задача на полупрямой с данными, представляющими собой динамический оператор Дирихле–Неймана, физически плохо мотивирована: для восстановлении матрицы потенциала требуется использовать дополнительные наблюдения из системы с обратным временем (1.2), которая не имеет физического смысла. Тем не менее, в следующем разделе мы укажем специальный вид матриц потенциала, которые могут быть восстановлены только по оператору реакции R^T_+ для системы (1.1).

§4. Обратная задача, частные случаи

Заметим, что математически естественно выделить три частных случая выбора параметра h: $h \equiv 1$, $h \equiv 0$ и $h \equiv 2$ в системе (3.1). Случай $h \equiv 0$ соответствует ситуации, когда $p_1(x) \equiv p_3(x) \equiv 0$, т.е. когда движущаяся частица с вероятностью $p_2 \equiv 1 = 1 - p_1 - p_3$ поглощается. В этом случае система (3.1) распадается на два независимых уравнения и становится математически не интересной.

Перепишем уравнение системы (3.1), обозначив $v^1 = u^1 + u^2$, $v^2 = u^1 - u^2$, и придем к уравнению

$$v_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_x + \alpha(x) \begin{pmatrix} 1 - h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

При $h \equiv 1$ уравнения системы (4.1) переписываются как

$$\begin{cases} v^1_t + v^2_x = 0, \\ v^2_t + v^1_x + \alpha(x) v^2 = 0. \end{cases}$$

К такой же системе приводится скалярное диссипативное уравнение

$$w_{tt}(x,t) + \alpha(x) w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0 \tag{4.2}$$

если ввести обозначения $v^1 := -w_x$, $v^2 := -w_t$. К сожалению, данная система находится в ситуации общего положения и не поддается дальнейшему упрощению. Обратная динамическая задача для (4.2) рассмотрена в [4], где построена консервативная модель (4.2), процедура восстановления коэффициента α отсутствует.

Рассмотрим последний частный случай системы (3.1), взяв $h \equiv 2$. Система примет вид

$$u_t^+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u_x^+ + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u^+ = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Лемма 3. *Обозначим* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Тогда для* u^+ *— решения системы* (4.3) *верно*

$$Ju_t^+ - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Ju_x^+ + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Ju^+ = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0. \tag{4.4}$$

$$Ku_t^+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Ku_x^+ - \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Ku^+ = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0. \tag{4.5}$$

$$JKu_t^+ - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} JKu_x^+ - \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} JKu^+ = 0, \quad x \geqslant 0,\, t \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Умножая уравнение (4.3) на матрицу J слева и используя соотношения $JJ = I$, $JK = -KJ$, придем к уравнению (4.4).

Умножая уравнение (4.3) на матрицу K слева и используя соотношение $KJ = -JK$, придем к уравнению (4.5).

Умножая уравнение (4.5) на матрицу J слева и используя соотношения $JJ = I$, $JK = -KJ$, придем к уравнению (4.6). $\square$

Проанализируем четыре системы (4.3)–(4.6). Две из них, а именно (4.3) и (4.6) являются системами (1.1) и (1.2), решения которых ранее обозначались как u^+ и u^-. Две оставшихся системы (4.4), (4.5) являются формально сопряженными к ним системами вида (2.7), (2.8). Мы только что показали, что решения четырех систем выражаются через решение первой системы. А значит что-то подобное можно утверждать и для операторов реакции этих систем, а именно верна следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть матрица потенциала в системах* (1.1), (1.2), (2.7) *и* (2.8) *выглядит как* $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. *Тогда операторы реакции* *этих систем связаны соотношениями*

$$\widetilde{R}^T_- = R^T_+, \quad \widetilde{R}^T_+ = -R^T_+, \quad R^T_- = -R^T_+,$$

Доказательство. Решение системы (4.4) получается из решения системы (4.3) умножением его на матрицу J, что означает перестановку компонент в векторе u^+. Откуда моментально следует первое равенство леммы.

Решение системы (4.5) получается из рещения системы (4.3) умножением его на матрицу K, что означает смену знака во второй компоненте вектора u^+. Откуда моментально следует второе равенство леммы.

Аналогично, анализируя каким путем было получено решение системы (4.6) из системы (4.3) или системы (4.5) мы получим последнее утверждение леммы, что завершает ее доказательство. □

Таким образом, обратная динамическая задача для системы (1.1) вида (4.3) о восстановлении матрицы потенциала может быть решена с использованием только оператора реакции R^T_+.

Список литературы

1. S. A. Avdonin, M. I. Belishev, *Boundary control and the dynamic inverse problem for a nonselfadjoint Sturm-Liouville operator.* — Control and Cybernetics **25**, No. 3 (1996), 429–440.
2. S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, *The boundary control approach to inverse spectral theory.* — Inverse Problems **26**, No. 4 (2010), 045009.
3. M. I. Belishev, *On an approach to multidimensional inverse problems for the wave equation.* — Soviet Mathematics. Doklady **36**, No. 3 (1988), 481–484.
4. M. I. Belishev, *The conservative model for a dissipative dynamical stystem.* — *J. Math. Sci.* **91**, No. 2 (1998), 2711–2721.
5. M. I. Belishev, *Boundary control and inverse problems: one-dimensional variant of BC-method.* — J. Math. Sci. **155**, No. 3 (2008), 343–378.
6. M. I. Belishev, T. Sh. Khabibullin, *Data characterization in dynamical inverse problem for the 1d wave equation with matrix potential.* — Zap. Nauch. Semin. POMI **493** (2020), 48–72.
7. M. I. Belishev, V. S. Mikhaylov, *Inverse problem for one-dimensional dynamical Dirac system (BC-method).* — Inverse Problems **30**, No. 12 (2014).
8. M. I. Belishev, V. S. Mikhaylov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **20**, No. 4 (2012), 461–488.
9. I. Trooshin, M. Yamamoto, *Spectral properties and an inverse eigenvalue problem for non-symmetric systems of ordinary differential operators.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **10**, No. 6 (2003), 643–658.

10. I. Trooshin, M. Yamamoto, *Identification problem for a one-dimensional vibrating system.* — Mathematical Methods in the Applied Sciences **28**, No. 17 (2005), 2037–2059.
11. V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Third edition, Nauka (1976).
12. Wuqing Ning, Masahiro Yamamoto, *The Gel'fand–Levitan theory for one-dimensional hyperbolic systems with impulsive inputs.* — Inverse Problems **24**, No. 2 (2008), 025004.
13. Wuqing Ning, Masahiro Yamamoto, *An Inverse Spectral Problem for a Nonsymmetric Differential Operator: Uniqueness and Reconstruction Formula. — Integr. Equ. Oper. Theory* **55** (2006), 273-304.
14. Wuqing Ning, *An inverse spectral problem for a nonsymmetric differential operator: Reconstruction of eigenvalue problem.* — J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), 1396–1419.

Mikhailov A. S., Mikhailov V. S. On the dynamic inverse problem for the first-order transport system.

A dynamic inverse problem for a first-order dissipative transport system is considered for reconstructing the complex potential matrix from the dynamic response (the Dirichlet-Neumann operator) of the system for positive and negative times. In addition, a special physically motivated case of the system is considered when the potential matrix can be reconstructed only from the positive time response.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия;
Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, д. 7/9,
199034, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mikhaylov@pdmi.ras.ru
E-mail: ftvsm78@gmail.com

Поступило 1 октября 2024 г.