Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

Д. В. Кориков

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЭЙКОНАЛОВ

§1. Введение

По теореме Гельфанда, любое хаусдорфово локально компактное топологическое пространство X определяется (с точностью до гомеоморфизма) алгеброй $C_0(X)$ непрерывных функций на нем, а любая коммутативная C^*-алгебра $\mathscr{A}$ изоморфна некоторой алгебре $C_0(X)$. Таким образом, теорема Гельфанда устанавливает двойственность между хаусдорфовыми топологическими пространствами и C^*-алгебрами, что позволяет изучать топологические и геометрические объекты чисто алгебраическими средствами. Обобщения двойственности Гельфанда на некоммутативные алгебры составляют предмет некоммутативной геометрии и применяются в квантовой теории поля.

Идея применения вышеуказанной двойственности для решения обратной задачи о восстановлении риманова многообразия с краем по граничным данным была впервые предложена М. И. Белишевым [1, 2]. Суть идеи ("алгебраического подхода") состоит в том, что многообразие определяется (с точностью до естественных – например, конформных или изометрических – преобразований) некоторой ассоциированной с ним алгеброй, которая, в свою очередь, определяется (с точностью до изоморфизма) по граничным данным. В статье [1] рассматривается задача о восстановлении римановой поверхности $\mathcal{M}$ с краем по ее ДН-оператору $\Lambda: \ f \mapsto \partial_\nu u^f|_{\partial\mathcal{M}}$, где u^f – гармоническое продолжение $f \in H^{1/2}(\partial\mathcal{M})$ внутрь $\mathcal{M}$ и ν – внешняя нормаль. В этом случае поверхность $\mathcal{M}$ биголоморфно эквивалентна спектру $\widehat{\mathscr{A}}$ алгебры $\mathscr{A}$ голоморфных функций на $\mathcal{M}$, в то время как $\mathscr{A}$ изоморфна алгебре граничных следов голоморфных функций и, следовательно, восстанавливается с точностью до изоморфизма по Λ. Алгебраический подход также применялся при решении обратных задач акустической и электромагнитной томографии многообразий [2, 3], а также обратных задач на графах [4].

Ключевые слова: спектр C^*-алгебры, эллиптические эйконалы, алгебраическая версия метода граничного управления.

Настоящая статья мотивирована попытками обобщения вышеуказанного алгебраического подхода для решения задачи двумерной электроимпедանстной томографии, т.е., для восстановления римановой поверхности $\mathcal{R}$ с краем и проводимости σ на ней по ДН-оператору Λ : $f \mapsto \sigma\partial_\nu u^f|_{\partial\mathcal{M}}$, где $\mathrm{div}(\sigma\nabla u^f) = 0$ в $\mathrm{int}\mathcal{M}$ и $u^f = f$ на $\partial\mathcal{M}$. В статье рассматривается (некоммутативная) алгебра $\mathscr{E}$ операторов в пространстве $H = \{\nabla u \in \vec{L}_2(\mathcal{R}) \mid \mathrm{div}\sigma\nabla u = 0 \text{ в } \mathrm{int}\mathcal{R}\}$, порожденная операторными интегралами (эйконалами) вида $\int t dP_{\Gamma_t}$, где $t \mapsto \Gamma_t$ это расширяющееся семейство дуг на единичной окружности $\partial\mathcal{M}$ и P_{Γ_t} – проектор на подпространство, образованное векторными полями, нормальными к $\partial\mathcal{M}\backslash\Gamma_t$. Доказывается, что спектр $\mathscr{E}$ гомеоморфен $\partial\mathcal{R} \sqcup \{0\}$ и, следовательно, алгебра $\mathscr{E}$ не несет информации о внутренних точках поверхности $(\mathcal{R}, \sigma)$.

§2. Алгебра проекторов

Далее $\mathbb{D}$ и $\mathbb{T}$ обозначают единичные круг и окружность, соответственно. Будем называть дугой подмножество $A\smile B := \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [\mathrm{arg}A, \mathrm{arg}B]\}$ в $\mathbb{T}$, а мультидугой – объединение конечного числа непересекающихся дуг.

Пусть H – подпространство гармонических потенциальных векторных полей в $\vec{L}_2(\mathbb{D})$. Пусть $f \in H^{1/2}(\mathbb{T})$, обозначим через u^f гармоническое продолжение f внутрь круга $\mathbb{D}$. Пусть Γ – (мульти)дуга и H_Γ – подпространство в H, натянутое на все такие ∇u^f, что $\mathrm{supp} f \subset \Gamma$. Обозначим через P_Γ ортогональный проектор на H_Γ в H. Пусть ν это внешняя нормаль к $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$ и $\Lambda :\ H^{1/2}(\mathbb{T}) \mapsto H^{-1/2}(\mathbb{T})$ это ДН-оператор круга $\mathbb{D}$, $\Lambda f := \partial_\nu u^f$. Из формулы Грина

$$(P_\Gamma\nabla u^f, \nabla u^h)_H = (\nabla u^f, P_\Gamma\nabla u^h)_H = (\nabla u^f, \nabla u^h)_H = (\Lambda f, h)_{L_2(\mathbb{T})}$$

следует, что

$$P_\Gamma\nabla u^f = \nabla u^p, \quad \text{где } p = 0 \text{ в } \mathbb{T}\backslash\Gamma, \quad \Lambda p = \Lambda f \text{ в } \mathrm{int}\Gamma \tag{1}$$

(эквивалентно, $(I - P_\Gamma)\nabla u^f = \nabla u^g$, где g где $g = f$ на $\mathbb{T}\backslash\Gamma$ и $\Lambda g = 0$ в $\mathrm{int}\Gamma$). Пусть $\mathscr{P}$ это C*-подалгебра в $B(H)$, порожденная единичным оператором I и всеми проекторами P_Γ, где Γ – любая дуга в $\mathbb{T}$.

§3. Алгебры эйконалов

Пусть $(0, 1) \ni t \mapsto \Gamma_t$ это гладкое расширяющееся семейство дуг, т.е. $\Gamma_t \subsetneq \Gamma_s$ при $t < s$, Γ_t и $\mathbb{T}\backslash\Gamma_t$ стягиваются в точки при $t \to 0$ и $t \to 1$, соответственно, и координаты концов дуг Γ_t гладко зависят от t. Тогда $t \mapsto P_{\Gamma_t}$ это расширяющееся семейство проекторов, которое определяет борелевскую спектральную меру dP_{Γ_t}. Будем называть гармоническим эйконалом интеграл

$$\mathfrak{E}(f, \Gamma.) = \int\limits_0^1 f(t)dP_{\Gamma_t}, \tag{2}$$

от произвольной непрерывной функции f. Справедливы формула

$$\mathfrak{E}(f, \Gamma.) = \int\limits_0^1 f(t)dP_{\Gamma_t} = f(1)I - \int\limits_0^1 P_t df(t) \tag{3}$$

и оценка

$$\Big\| \int\limits_0^1 f(t)dP_{\Gamma_t} \Big\|_{B(H)} \leqslant \sup_{t\in(0,1)} |f(t)| \tag{4}$$

(условием применимости (4) является только $dP_{\Gamma.}$-измеримость f).

Обозначим через $\widetilde{\mathscr{E}}$ алгебру, натянутую на I и все $E(f, \Gamma.)$. Введем семейство дуг $t \mapsto \Gamma_{t,p} := \{q \in \mathbb{T} \mid \mathrm{dist}_{\mathbb{T}}(p, q) \leqslant \pi t\}$ $(p \in \mathbb{T})$. Обозначим через $\mathscr{E}$ алгебру, натянутую на I и все эйконалы вида

$$\mathfrak{E}_p = \int\limits_0^1 t dP_{\Gamma_{t,p}} = \mathfrak{E}(t, \Gamma_{\cdot,p}).$$

Из (4) и плотности полиномов в $C([0, 1])$ следует, что $\mathscr{E}$ содержит также и все эйконалы вида $\mathfrak{E}(f, \Gamma_{\cdot,p}) = f(\mathfrak{E}_p)$, где $f \in C([0, 1])$. Очевидно, что $\mathscr{E} \subset \widetilde{\mathscr{E}}$. Из (3) следует, что $\widetilde{\mathscr{E}} \subset \mathscr{P}$.

В статье доказывается следующее

Предложение 1. *Спектр алгебры $\mathscr{E} = \widetilde{\mathscr{E}}$ гомеоморфен $\mathbb{T} \sqcup \{0\}$.*

Теперь пусть $(\mathcal{R}, g)$ – двумерное риманово многообразие с гладкими краем $\partial\mathcal{R}$ и метрикой g,а σ – положительная гладкая функция на $\mathcal{R}$. Функция u на $\mathcal{R}$ и потенциальное векторное поле ∇u называются σ-гармоническими в $\mathcal{R}$ если $\mathrm{div}\sigma\nabla u = 0$ в $\mathrm{int}\mathcal{R}$ и $\int\limits_{\mathcal{R}} \sigma g(\nabla u, \nabla u)dS_g < \infty$. Введем ДН-оператор $\Lambda :\ H^{1/2}(\mathbb{T}) \mapsto H^{-1/2}(\mathbb{T})$ поверхности $(\mathcal{R}, g, \sigma)$ правилом $\Lambda f := \sigma\partial_\nu u^f$, где u^f – σ-гармоническое продолжение f в int$\mathcal{R}$. Определим эллиптические эйконалы теми же формулами (1), (2) на пространстве потенциальных σ-гармонических полей.

Предложение 2. *Спектр C^*-алгебры, порожденной всеми эллиптическими эйконалами, гомеоморфен $\partial\mathcal{R} \sqcup \{0\}$.*

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству предложений 1 и 2.

§4. Коммутаторы

Лемма 3. *Для любых (мульти)дуг Γ_1, Γ_2, пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ которых не содержит изолированных точек, оператор*

$$P_{\Gamma_1} + P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \tag{5}$$

компактен.

Доказательство. 1) Обозначим оператор (5) через $\mathcal{K}$ и положим $\nabla u^h := \mathcal{K}\nabla u^f$. Обозначим

$$\nabla u^{f_1} := P_{\Gamma_1}\nabla u^f, \qquad \nabla u^{f_2} := P_{\Gamma_2}\nabla u^f,$$
$$\nabla u^{f_{1+2}} := P_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\nabla u^f, \qquad \nabla u^{f_{1\cdot 2}} := P_{\Gamma_1\cap\Gamma_2}\nabla u^f.$$

Тогда $h = f_1 + f_2 - f_{1+2} - f_{1\cdot 2}$,

$$\begin{aligned} \Lambda f_k = \Lambda f \text{ в } \mathrm{int}\Gamma_k, \quad & \Lambda f_{1+2} = \Lambda f \text{ в } \mathrm{int}\Gamma_1 \cup \mathrm{int}\Gamma_2, \\ & \Lambda f_{1\cdot 2} = \Lambda f \text{ в } \mathrm{int}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \end{aligned} \tag{6}$$

и можно зафиксировать $f.$ так, чтобы

$$f_k = 0 \text{ в } \mathbb{T}\backslash\Gamma_k, \quad f_{1+2} = 0 \text{ в } \mathbb{T}\backslash(\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad f_{1\cdot 2} = 0 \text{ в } \mathbb{T}\backslash(\Gamma_1 \cap \Gamma_2). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что $f_2 - f_{1\cdot 2} = 0$ и $\Lambda(f_1 - f_{1+2}) = 0$ в $\mathrm{int}\Gamma_1\backslash(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. По теореме о локальном повышении гладкости решений эллиптических краевых задач, $f_2 - f_{1\cdot 2}$, $f_1 - f_{1+2}$ и h – гладкие в $\mathrm{int}\Gamma_1\backslash(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. Аналогично, h – гладкая в $\mathrm{int}\Gamma_2\backslash(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. Из (7) следует, что $h = 0$ на $\mathbb{T}\backslash(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Наконец, из (6) следует, что $\Lambda h = 0$ в $\mathrm{int}\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Таким образом, вектор ∇u^h гладкий всюду на $\overline{\mathbb{D}}$, за исключением граничных точек (мульти)дуг Γ_1, Γ_2. Поскольку ∇u^h может иметь сингулярности в этих точках, мы не можем непосредственно применить стандартный аргумент о компактности вложения $H^2(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}^1(\mathbb{D})$ для доказательства компактности $\mathcal{K}$. Поэтому приходится изучать асимптотику ∇u^h вблизи указанных точек. С этой целью далее мы вводим понятие точки смены типа граничных условий (ДН-точки).

2) Будем говорить, что $A \in \mathbb{T}$ это ДН-точка подпространства $\widetilde{H} \subset H$, если существуют дуги Γ_D и Γ_N, такие, что $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \{A\}$ и включение $\nabla u^f \in \widetilde{H}$ имеет место только если $\partial_\gamma f|_{\mathrm{int}\Gamma_D} = 0$ и $\partial_\nu u^f|_{\mathrm{int}\Gamma_N} = 0$.

Пусть $\nabla u^f \in \widetilde{H}$; без ограничения общности можно считать, что $f|_{\Gamma_D} = 0$. Опишем асимптотику $u^f(z)$ при $z \to A$. По лемме Пуанкаре существует единственная голоморфная функция w в $\mathbb{D}$, такая, что $u^f = \Re w$ и w принимает только вещественные значения на $\mathrm{int}\Gamma_N$. Введем преобразование Кэли

$$\zeta: \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}_\pm, \qquad \zeta(z) = \mp i\frac{z-A}{z+A},$$

где знак $\pm$ определяется из условия $\zeta(\Gamma_N) \subset [0,+\infty)$ (именно, $\pm = +$ если Γ_D, A, Γ_N следуют друг за другом против часовой стрелки и $\pm = -$ в противном случае). Тогда $w \circ \zeta^{-1}$ продолжается до голоморфной функции ω в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \cup \zeta(\mathrm{int}\Gamma_N)$ по принципу симметрии Шварца $\omega(z) = \overline{\omega(\overline{z})} = w \circ \zeta^{-1}(z)$ $(z \in \mathbb{C}_\pm)$. Отметим, что ω принимает только мнимые значения на верхнем и нижнем берегах разреза $\zeta(\mathrm{int}\Gamma_D) \subset (-\infty, 0]$. Тогда функция $\xi \mapsto \omega(\xi^2)$ голоморфна в полуплоскости $\Re\xi > 0$ и принимает только мнимые значения на интервалах $(-i\varepsilon, 0)$ и $(0, +i\varepsilon)$ мнимой оси (где $\varepsilon > 0$ достаточно мало). Следовательно, $\xi \mapsto \omega(\xi^2)$ продолжается по правилу $\widetilde{\omega}(\xi) = -\overline{\widetilde{\omega}(-\overline{\xi})} = \omega(\xi^2)$ $(\Re\xi > 0)$ до голоморфной функции $\widetilde{\omega}$ в проколотой окрестности нуля. В этой окрестности $\widetilde{\omega}$ раскладывается в ряд Лорана

$$\widetilde{\omega}(\xi) = \sum_k \widetilde{\omega}^{(k)}\xi^k. \tag{8}$$

Поскольку $\widetilde{\omega}(\xi) \in \mathbb{R}$ при $\xi \in \mathbb{R}$, все коэффициенты $\widetilde{\omega}^{(k)}$ в (8) вещественны. Поскольку $\widetilde{\omega}(\xi) \in i\mathbb{R}$ при $\xi \in i\mathbb{R}$, ряд (8) не содержит слагаемых с четными k. Теперь из (8) следует разложение

$$u^f(z) = \Re w(z) = \Re\omega(\zeta(z)) = \Re\widetilde{\omega}(\sqrt{\zeta(z)}) = \sum_k c_k \Re\big(\zeta(z)^{k+1/2}\big) \tag{9}$$

в окрестности точки A в $\overline{\mathbb{D}}$; здесь $c_k = \widetilde{\omega}^{(2k+1)}$. Поскольку $\nabla u^f \in H \subset \vec{L}_2(\mathbb{D})$, ряд (9) не содержит слагаемых с отрицательными k.

Положим

$$y_- := \frac{2}{\pi}\Re\zeta^{-1/2}, \quad y_+ = \chi \circ \zeta \Re\zeta^{1/2} + \widetilde{y}_+,$$

где $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ это гладкая срезка, равная единице вблизи нуля и диаметр носителя χ достаточно мал, а $\widetilde{y}_+$ является решением задачи

$$\Delta\widetilde{y}_+ = [\chi\circ\zeta, \Delta]\Re(\zeta^{1/2}) \text{ в } \mathbb{D}, \qquad \widetilde{y}_+ = 0 \text{ на } \mathbb{T}.$$

Отметим, что $y_- = 0$ в $\widetilde{\Gamma}_D = \zeta^{-1}((-\infty,0))$ и $\partial_\nu y = 0$ на $\widetilde{\Gamma}_N = \zeta^{-1}((0,+\infty))$. Поскольку $\Delta\widetilde{y}_+$ гладкая на $\overline{D}$, функция $\widetilde{y}_+$ является гладкой на $\overline{D}$ по теореме о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач. Поэтому $y_+ \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}\backslash\{A\})$ и $y_+ - \sqrt{\zeta}$ является гладкой в точке A. Теперь разложение (9) можно переписать в виде

$$u^f(z) = cy_+ + \widetilde{u}^f \qquad (\widetilde{u}^f \in H^2(\mathbb{U})), \tag{10}$$

где U – достаточно малая окрестность точки A в $\overline{\mathbb{D}}$. Для того, чтобы найти коэффициент c в (10), подставим асимптотику (9) в формулу Грина

$$0 = (\Delta u^f, y_-)_{\mathbb{D}_\epsilon} - (u^f, \Delta y_-)_{\mathbb{D}_\epsilon} = (\partial_\nu u^f, y_-)_{\partial\mathbb{D}_\epsilon} - (u^f, \partial_\nu y_-)_{\partial\mathbb{D}_\epsilon}$$

(где $\mathbb{D}_\epsilon = \{z\in\mathbb{D} \mid |\xi(z)| \geqslant \epsilon\}$) и перейдем к пределу при $\epsilon\to 0$. В результате получим

$$c = (\partial_\nu u^f, y_-)_{\partial\mathbb{D}_\epsilon} - (u^f, \partial_\nu y_-)_{\partial\mathbb{D}_\epsilon} = (\partial_\nu u, y_-)_{\widetilde{\Gamma}_N\backslash\Gamma_N} - (u^f, \partial_\nu y_-)_{\widetilde{\Gamma}_D\backslash\Gamma_D}.$$

Если $f|_{\Gamma_D} = \mathrm{const} \neq 0$, разложение (10) остается в силе, но в последней формуле для c следует заменить u^f на $u^f - \mathrm{const}$.

Положим

$$c(\nabla u^f) := (\partial_\nu u^f, y_-)_{\widetilde{\Gamma}_N\backslash\Gamma_N} - (u^f, \partial_\nu y_-)_{\widetilde{\Gamma}_D\backslash\Gamma_D} + \langle u^f\rangle_{\Gamma_D}(1, \partial_\nu y_-)_{\widetilde{\Gamma}_D\backslash\Gamma_D},$$

где $\langle f\rangle_Q$ означает среднее значение f на Q. Тогда c это корректно определенный (т.е., $c(\nabla 1) = 0$) непрерывный функционал на H, который совпадает с коэффициентом разложения (10) для любого $\nabla u^f \in \widetilde{H}$. Оператор

$$\mathfrak{K}_A:\ \nabla u^f \mapsto c(\nabla u^f)\nabla y_+,$$

ассоциированный с ДН-точкой A, компактен. Если $\nabla u^f \in \widetilde{H}$, то вектор $\mathfrak{K}_A\nabla u^f$ наследует ту же особенность в ДН-точке A, что и у ∇u^f (и никаких других особенностей на $\overline{\mathbb{D}}$).

3) Рассмотрим случай, когда $\Gamma_1 = A\smile B$ и $\Gamma_2 = C\smile D$ это дуги и их пересечение пусто (тогда $P_{\Gamma_1\cap\Gamma_2} = 0$ и $f_{1\cdot 2}\equiv 0$). Для определенности, рассмотрим точку A. Тогда $f_2 - f_{1\cdot 2} = 0$ в окрестности A, $f_1 - f_{1+2} = 0$ в $\mathrm{int}D\smile A$ и $\Lambda(f_1 - f_{1+2}) = 0$ в $\mathrm{int}A\smile B$. Значит, векторы $\nabla u^{f_2 - f_{1\cdot 2}}$ из $(P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1\cap\Gamma_2})H$ являются гладкими в окрестности A и A является ДН-точкой для подпространства $(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1\cup\Gamma_2})H \ni \nabla u^{f_1 - f_{1+2}}$. Пусть

$\mathfrak{K}_A$ ($\mathfrak{K}_B$ и т.д.) – компактный оператор, ассоциированный с ДН-точкой A (B и т.д.), тогда $\mathfrak{K}_A(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})\nabla u^f$ имеет ту же особенность в точке A, что и $\nabla u^h = \mathcal{K}\nabla u^f$, и никаких других особенностей на $\overline{\mathbb{D}}$. Повторяя те же рассуждения для остальных точек B, C, D, получаем, что образ оператора

$$\widetilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K} - (\mathfrak{K}_A + \mathfrak{K}_B)(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}) - (\mathfrak{K}_C + \mathfrak{K}_D)(P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})$$

содержится в $H \cap \nabla H^2(\mathbb{D})$. Поскольку вложение $H^2(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ (а значит, и вложение $H^2(\mathbb{D})/\mathbb{C}1 \equiv \nabla H^2(\mathbb{D}) \subset \nabla H^1(\mathbb{D}) \equiv H^1(\mathbb{D})/\mathbb{C}1$) компактно, это означает, что $\widetilde{\mathcal{K}} \in K(H)$. Поскольку $\mathfrak{K}_A, \mathfrak{K}_B, \mathfrak{K}_C, \mathfrak{K}_D \in K(H)$, отсюда следует, что $\mathcal{K} \in K(H)$.

4) Теперь рассмотрим случай, когда пересечение $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ это дуга $C\smile B$. Рассуждая так же, как в предыдущем случае, получаем, что $\mathfrak{K}_A(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})\nabla u^f$ (соотв., $\mathfrak{K}_D(P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})\nabla u^f$) имеет ту же особенность в A (соотв., D), что и ∇u^h и никаких других особенностей на $\overline{\mathbb{D}}$. Далее, из (6), (7) следует, что $\Lambda(f_1 - f_{1+2}) = 0$ в окрестности точки C, $f_2 - f_{1\cdot 2} = 0$ на $A\smile C$ и $\Lambda(f_2 - f_{1\cdot 2}) = 0$ на $C\smile B$. Значит, векторы $\nabla u^{f_1 - f_{1+2}}$ из подпространства $(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})H$ являются гладкими в окрестности C и C является ДН-точкой для подпространства $(P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2})H$. Значит, $\mathfrak{K}_C(P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2})\nabla u^f$ имеет те же особенность в точке C, что и $\nabla u^h = \mathcal{K}\nabla u^f$, и никаких других особенностей на $\overline{\mathbb{D}}$. Аналогично, $\mathfrak{K}_B(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2})\nabla u^f$ имеет те же особенность в точке B, что и $\nabla u^h = \mathcal{K}\nabla u^f$, и никаких других особенностей на $\overline{\mathbb{D}}$. Значит, оператор

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K} &- \mathfrak{K}_A(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}) - \mathfrak{K}_B(P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}) \\ &- \mathfrak{K}_C(P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}) - \mathfrak{K}_D(P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2})\end{aligned}$$

является сглаживающим, и, следовательно, компактным. Поскольку $\mathfrak{K}_A, \mathfrak{K}_B, \mathfrak{K}_C, \mathfrak{K}_D \in K(H)$, отсюда следует, что $\mathcal{K} \in K(H)$.

5) Случай, когда $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ состоит из двух дуг, рассматривается аналогично. Рассмотренными случаями исчерпываются все взаимные расположения дуг Γ_1 и Γ_2 при условии, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ не содержит изолированные точки. Рассуждения в случае, когда Γ_1, Γ_2 это мультидуги (при том же условии на $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$) отличаются от приведенных выше лишь числом ДН-точек.

Отметим, что рассуждения леммы не обобщаются на случай, когда $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ содержит изолированные точки потому что такие точки не являются ДН-точками и мы не можем выписать асимптотику вида (10) для u^h в их окрестностях. $\square$

Из леммы 3 и равенства

$$P_{\Gamma_1}(P_{\Gamma_1} + P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}) = P_{\Gamma_1} P_{\Gamma_2} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}$$

вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Для любых (мульти)дуг* Γ_1, Γ_2, *пересечение* $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ *которых не содержит изолированных точек, операторы* $P_{\Gamma_2} P_{\Gamma_1} - P_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}$, $[P_{\Gamma_1}, P_{\Gamma_2}]$ *компактны.*

Следствие 5. *Коммутатор любых двух эйконалов компактен.*

Доказательство. Из формулы (3) следует, что

$$[\mathfrak{E}(f, \Gamma.), \mathfrak{E}(g, \Upsilon.)] = \int\limits_{[0,1]^2} [P_{\Gamma_t}, P_{\Upsilon_s}] d\mu(t,s), \quad d\mu(t,s) = df(t) dg(s). \tag{11}$$

Поскольку концы дуг P_{Γ_t}, P_{Υ_s} гладко зависят от t, s, множество $\mathfrak{Q}$ таких (t,s), при которых один или два конца дуг Γ_t, Υ_s совпадают, не более чем одномерно. Поэтому $\mu(\mathfrak{Q}) = 0$ и можно считать, что область интегрирования в (11) это $[0,1]^2 \backslash \mathfrak{Q}$. Ввиду следствия 4 имеем $[P_{\Gamma_t}, P_{\Upsilon_s}] \in K(H)$ при $(t,s) \in [0,1]^2 \backslash \mathfrak{Q}$. Поскольку $\|[P_{\Gamma_t}, P_{\Upsilon_s}]\|_{B(H)} \leqslant 2$ и $f, g \in C([0,1])$, интеграл в (11) сходится в $B(H)$. Поскольку $K(H)$ замкнуто в $B(H)$, отсюда имеем $[\mathfrak{E}(f, \Gamma.), \mathfrak{E}(g, \Upsilon.)] \in K(H)$. $\square$

§5. Неприводимость

Пусть $\mathcal{A}$ – C^*-подалгебра в $B(H)$. Коммутантом алгебры $\mathcal{A}$ называется множество $\mathcal{A}'$ всех операторов в $B(H)$, которые коммутируют со всеми элементами $\mathcal{A}$. Легко видеть, что $\mathcal{A}' = (cl_s(A))'$, где $cl_s(A)$ – сильное замыкание алгебры $\mathcal{A}$. Говорят, что $\mathcal{A}$ неприводимо действует в H если $\{0\}$ и H это единственные подпространства в H, инвариантные относительно $\mathcal{A}$ или, что эквивалентно (см. теорему 4.1.12, [5]), если $\mathcal{A}' = \mathbb{C}I$.

Лемма 6. $\mathscr{E}, \widetilde{\mathscr{E}}, \mathscr{P}$ *неприводимо действуют в* H.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Gamma_{t,p}$ – произвольная дуга. Введем непрерывную функцию f_ϵ равенствами $f_\epsilon(s) = 1$ при $s < t$, $f_\epsilon(s) = 0$ при $s > t + 1/n$ и $f_\epsilon(s) = 1 - n(s-t)$ при $s \in [t, t+1/n]$. Тогда последовательность эйконалов $\mathscr{E} \supset \{\mathfrak{E}(f_n, \Gamma_{\cdot,p})\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся сильно к P_Γ и потому сильные замыкания всех трех алгебр $\mathscr{E}, \widetilde{\mathscr{E}}, \mathscr{P}$ совпадают. Значит, $\mathscr{E}' = \widetilde{\mathscr{E}}' = \mathscr{P}'$.

Пусть $a \in \mathscr{P}'$. Для любой дуги Γ имеем $[a, P_\Gamma] = 0$; в частности, H_Γ это инвариантное пространство a. Пусть $H_\mathbb{T}$ – подпространство в $H^{-1/2}(\mathbb{T})$, составленное из функций с нулевыми средними

$$\langle f, 1\rangle_{H^{-1/2}(\mathbb{T})\times H^{1/2}(\mathbb{T})} = 0.$$

Тогда $\beta: \nabla u^f \mapsto \partial_\gamma f$ есть изоморфизм H и $H_\mathbb{T}$. Введем оператор $\widetilde{a} := \beta \circ a \circ \beta^{-1} \in B(H_\mathbb{T})$; тогда условие $aH_\Gamma \subset H_\Gamma$ принимает следующий вид: если $\mathrm{supp} h \subset \Gamma$ и Γ – дуга, то $\mathrm{supp}(\widetilde{a}h) \subset \Gamma$.

Пусть $\Gamma_0 = \{e^{i(\varphi-\varphi_0)} \mid \varphi \in [0, \psi_0]\}$ – некоторая дуга. Выберем какую-нибудь функцию $e \in H_\mathbb{T}$, равную единице на Γ_0. Пусть $\psi_1 \in (0, \psi_0)$ и $f \in H_\mathbb{T}$ – любая функция, равная единице на на дуге $\Gamma_1 = \{e^{i(\varphi-\varphi_0)} \mid \varphi \in [0, \psi_1]\}$ и нулю на $\Gamma_0 \backslash \Gamma_1$. Тогда носитель f (и значит, носитель $\widetilde{a}f$) содержится в дуге $\overline{\mathbb{T}\backslash(\Gamma_0\backslash\Gamma_1)} \supset \Gamma_1$, а носитель $e - f$ (и значит, носитель $\widetilde{a}(e-f)$) содержится в дуге $\overline{\mathbb{T}\backslash\Gamma_1} \supset \Gamma_0\backslash\Gamma_1$. Значит, $\widetilde{a}f = 0$ на $\Gamma_0\backslash\Gamma_1$ и $\widetilde{a}f = \widetilde{a}e$ на $\mathrm{int}\Gamma_1$. Таким образом, $\widetilde{a}f = (\widetilde{a}e)\cdot f$ на Γ_0 (вне зависимости от поведения f вне Γ_0). Поскольку линейные комбинации таких f (функции, кусочно постоянные на Γ_0) плотны в $H_\mathbb{T}$ и оператор $\widetilde{a}$ непрерывен, имеем

$$\widetilde{a}h|_{\Gamma_0} = (\widetilde{a}e)|_{\Gamma_0} h \qquad (h \in H_\mathbb{T}).$$

Подставляя в последнее условие всевозможные гладкие h с носителями, содержащимися в Γ_0 и пользуясь условием $\langle \widetilde{a}h, 1\rangle_{H^{-1/2}(\mathbb{T})\times H^{1/2}(\mathbb{T})} = 0$, получаем $(\widetilde{a}e) = \mathrm{const} = \lambda$ на Γ_0. Поворачивая дугу Γ_0 (меняя φ_0), получаем $\widetilde{a} = \lambda I$. Таким образом, $\mathscr{P}' = \mathbb{C}I$. □

Следствие 7. *$\mathscr{E}$, $\widetilde{\mathscr{E}}$, $\mathscr{P}$ содержат идеал $K(H)$.*

Доказательство. Напомним (см. теорему 2.4.9, [5]), что пересечение $K(H)$ и неприводимой подалгебры $B(H)$ это либо $\{0\}$, либо все $K(H)$. Ввиду леммы 6, все три алгебры $\mathscr{E}$, $\widetilde{\mathscr{E}}$, $\mathscr{P}$ неприводимо действуют в H, а ввиду следствия 4 все они содержат компактные операторы. Значит, все они содержат $K(H)$. □

§6. Факторалгебры и представления

Напомним некоторые определения и факты из теории C^*-алгебр. Говорят, что $\mathscr{A}$ это CCR-алгебра (GCR-алгебра), если для любого ее ненулевого неприводимого представления $(\phi, \mathcal{H})$ выполнено $\phi(\mathscr{A}) =$

$K(\mathcal{H})$ ($\phi(\mathscr{A}) \supset K(\mathcal{H})$). Примерами CCR-алгебр являются $K(H)$ и любые коммутативные C^*-алгебры (в самом деле, любое нетривиальное неприводимое представление $K(H)$ эквивалентно тождественному, а любое неприводимое представление коммутативной алгебры одномерно). Если $\mathscr{I}$ это идеал в $\mathscr{A}$, то $\mathscr{A}$ это GCR-алгебра если и только если таковыми являются $\mathscr{I}$ и $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ (теорема 5.6.2, [5]). Представление $(\phi, \mathcal{H})$ любой GCR-алгебры определяется, с точностью до унитарной эквивалентности, своим ядром $\mathrm{Ker}\phi$ (теорема 5.6.3, [5]). В частности, представление с тривиальным ядром унитарно эквивалентно тождественному.

Ввиду следствия 7, факторалгебры $\mathscr{P}/K(H)$, $\mathscr{E}/K(H)$, $\widetilde{\mathscr{E}}/K(H)$ корректно определены. Ввиду следствия 5, факторалгебры эйконалов $\mathscr{E}/K(H)$, $\widetilde{\mathscr{E}}/K(H)$ коммутативны. Поэтому $\mathscr{E}$, $\widetilde{\mathscr{E}}$ это GCR-алгебры.

Пусть $(\phi, \mathcal{H})$ это нетривиальное (не нулевое и не эквивалентное тождественному) неприводимое представление $\mathscr{E}$ ($\widetilde{\mathscr{E}}$); тогда $\mathscr{I} = \mathrm{Ker}\phi$ это замкнутый ненулевой идеал $\mathscr{E}$ ($\widetilde{\mathscr{E}}$). Очевидно, что оператор $a \in B(H)$ тождественно равен нулю если и только если $ap = 0$ для всех одномерных проекторов $|x\rangle\langle x| = p \in B(H)$. Поэтому $\{0\} \neq \mathscr{I}K(H) \subset \mathscr{I} \cap K(H)$ и $\mathscr{I} \cap K(H)$ это замкнутый ненулевой идеал в $K(H)$. Поскольку в $K(H)$ нет замкнутых идеалов, отличных от $\{0\}$ и самого $K(H)$, имеем $\mathscr{I} \supset K(H)$. Тогда ϕ имеет вид

$$\phi(a) := \chi(a + K(H)), \tag{12}$$

где χ – характер (коммутативной) факторалгебры $\mathscr{E}/K(H)$ ($\widetilde{\mathscr{E}}/K(H)$). Обратно, формула (12) (где χ это характер на $\mathscr{E}/K(H)$ или $\widetilde{\mathscr{E}}/K(H)$) определяет неприводимое представление $\mathscr{E}$ или $\widetilde{\mathscr{E}}$.

Будем обозначать спектр C^*-алгебры $\mathscr{A}$ через $\widehat{\mathscr{A}}$. Поскольку спектр GCR-алгебры гомеоморфен ее примитивному спектру (наделенному топологией Джекобсона, [5, см. теорему 5.6.4]), из уже доказанного следует, что

$$\widehat{\mathscr{E}} = \widehat{\mathscr{E}/K(H)} \sqcup [Id], \qquad \widehat{\widetilde{\mathscr{E}}} = \widehat{\widetilde{\mathscr{E}}/K(H)} \sqcup [Id]. \tag{13}$$

§7. Построение морфизма ι

Обозначим через $\mathcal{I}_Q$ характеристическую функцию множества Q. Определим отображение ι правилом

$$\iota(\mathfrak{P}) := \mathfrak{P}(\mathcal{I}_{\Gamma_1}, \ldots, \mathcal{I}_{\Gamma_n}) \tag{14}$$

на всех полиномах

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(P_{\Gamma_1} + K(H), \ldots, P_{\Gamma_n} + K(H)),$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ – произвольные мультидуги.

Ввиду следующей леммы, ι корректно определено на всех указанных полиномах и продолжается по непрерывности до сюрьективного C^*-морфизма $\iota : \ \mathscr{P}/K(H) \mapsto L_\infty(\mathbb{T})$.

Лемма 8. *Пусть* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ *– произвольные мультидуги. Тогда для любого полинома* $\mathfrak{P}$ *от элементов* $P_{\Gamma_1} + K(H)$, $\ldots$, $P_{\Gamma_N} + K(H)$ *справедливо неравенство*

$$\|\iota(\mathfrak{P})\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant \|\mathfrak{P}\|_{B(H)/K(H)}. \tag{15}$$

Равенство в (15) *достигается если пересечение любых двух мультидуг* Γ_k, Γ_l *не содержит изолированных точек.*

Доказательство. 1) Граничные точки мультидуг $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ разбивают окружность $\mathbb{T}$ на дуги $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_M$ с попарно не пересекающимися внутренностями. По построению, функция $\iota(\mathfrak{P})$ постоянна на каждой внутренности $\mathrm{int}\Upsilon_j$ и $|\iota(\mathfrak{P})|$ достигает своего максимума на некоторой внутренности $\mathrm{int}\Upsilon_{j_0}$. Пусть $\Upsilon \subset \mathrm{int}\Upsilon_{j_0}$ – дуга и $\iota(\mathfrak{P}) = C$ на $\mathrm{int}\Upsilon_{j_0}$. Тогда для каждого k выполняется либо $\Gamma_k \cap \Upsilon = \Upsilon$ либо $\Gamma_k \cap \Upsilon = \varnothing$; в первом случае $P_\Upsilon P_{\Gamma_k} = P_\Upsilon$, во втором – $P_\Upsilon P_{\Gamma_k} \in K(H)$ по следствию 4. Отсюда следует, что $(P_\Upsilon + K(H))\mathfrak{P} = CP_\Upsilon + K(H)$.

Пусть $K \in K(H)$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathrm{dim} P_\Upsilon H = \infty$ и суммарная кратность всех собственных значений λ оператора K, таких, что $|\lambda| \geqslant \varepsilon$ конечна (см. теоремы 1.4.5 и 1.4.11, [5]), существует такой $\nabla u^f \in P_\Upsilon H$, что $\|K\nabla u^f\|_H \leqslant \varepsilon$. Отсюда $\|(P_\Upsilon + K)\nabla u^f\|_H \geqslant (1-\varepsilon)\|\nabla u^f\|_H$. Поскольку $K \in K(H)$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, получаем

$$\|P_\Upsilon + K(H)\|_{B(H)/K(H)} = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{P}\|_{B(H)/K(H)} &\geqslant \|(P_\Upsilon + K(H))\mathfrak{P}\|_{B(H)/K(H)} \\ &= |C|\|P_\Upsilon H + K(H)\|_{B(H)/K(H)} = \|\iota(\mathfrak{P})\|_{L_\infty(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

т.е. выполняется (15). В частности, отображение ι корректно определено на всех полиномах в $\mathscr{P}/K(H)$, т.е. $\iota(\mathfrak{P}) = \iota(\mathfrak{P}')$ если $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ в $B(H)/K(H)$. Из условия (14) следует, что ι линейно, мультипликативно и уважает инволюцию алгебры $\mathscr{P}/K(H)$ (т.е., $\iota(\mathfrak{P}^*) = \overline{\iota(\mathfrak{P})}$). Поскольку все указанные полиномы плотны в $\mathscr{P}/K(H)$, из оценки

(15) следует, что ι продолжается по непрерывности до C^*-морфизма $\iota:\ \mathscr{P}/K(H)\mapsto L_\infty(\mathbb{T})$. Сюрьективность ι следует из того, что линейные комбинации функций $\iota(P_\Gamma+K(H))=\mathcal{I}_\Gamma$ плотны в $L_\infty(\mathbb{T})$.

2) Теперь пусть пересечение $\Gamma_k\cap\Gamma_l$ не содержит изолированных точек при любых k,l. Тогда в силу следствия 4 любой моном в $\mathfrak{P}$ допускает представление

$$(P_{\Gamma_{l(1)}}+K(H))\dots(P_{\Gamma_{l(k)}}+K(H))=P_{\Gamma_{l(1)}\cap\dots\cap\Gamma_{l(k)}}+K(H).$$

Поэтому полином $\mathfrak{P}$ допускает представление

$$\mathfrak{P}=\sum_{k=1}^{L}c_kP_{\Upsilon_k}+K(H), \tag{16}$$

где $c_k\in\mathbb{C}$ и $\Upsilon_1,\dots,\Upsilon_L$ – некоторые мультидуги. Отметим, что пересечения $\Upsilon_k\cap\Upsilon_l$ не содержит изолированных точек при любых k,l.

Сначала докажем равенство в (15) в предположении о том, что мультидуги $\Upsilon_1,\dots,\Upsilon_L$ в разложении (16) образуют расширяющееся семейство, т.е. $\Upsilon_1\subset\dots\subset\Upsilon_L$. Тогда $P_{\Upsilon_1}\subset\dots P_{\Upsilon_L}$ это расширяющееся семейство проекторов и потому

$$Q_1=P_{\Upsilon_1},\ Q_2=P_{\Upsilon_2}-P_{\Upsilon_1},\ \dots Q_L=P_{\Upsilon_L}-P_{\Upsilon_{l-1}}$$

это проекторы и их образы $Q_1H,\dots,Q_LH$ попарно ортогональны. Поскольку $Q_1,\dots,Q_L$ это базис в пространстве линейных комбинаций $P_1,\dots,P_L$, формула (16) принимает вид $\mathfrak{P}=\sum\limits_{k=1}^{L}d_kQ_k+K(H)$ $(d_k\in\mathbb{C})$. Пусть $\nabla u^f\in H$, тогда $\sum\limits_k\|Q_k\nabla u^f\|_H^2\leqslant\|\nabla u^f\|_H^2$ ввиду попарной ортогональности $Q_1H,\dots,Q_LH$. Отсюда

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{P}\|^2_{B(H)/K(H)}&=\|\sum_k d_kQ_k+K(H)\|^2_{B(H)/K(H)}\leqslant\|\sum_k d_kQ_k\|^2_{B(H)}\\&=\sup_{\|x\|=1}\|\sum_k d_kQ_kx\|_H^2\leqslant\big(\max_k|d_k|\big)^2\\&\times\sup_{\|x\|=1}\sum_k\|Q_kx\|_H^2\leqslant\big(\max_k|d_k|\big)^2.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\iota(\mathfrak{P}) = \sum_k d_k\,\iota(Q_k + K(H)) = \sum_k d_k \Big(\iota(P_{\Upsilon_k} + K(H)) - \iota(P_{\Upsilon_{k-1}} + K(H))\Big)$$
$$= \sum_k d_k(\mathcal{I}_{\Upsilon_k} - \mathcal{I}_{\Upsilon_{k-1}}) = \sum_k d_k \mathcal{I}_{\Upsilon_k \setminus \Upsilon_{k-1}},$$

где $\Upsilon_0 = \varnothing$, $P_{\Upsilon_0} = 0$ и множества $\Upsilon_k \setminus \Upsilon_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, L)$ попарно не пересекаются. Отсюда

$$\|\mathfrak{P}\|_{B(H)/K(H)} = \max_k |d_k| = \|\iota(\mathfrak{P})\|_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

3) Для завершения доказательства осталось избавиться от дополнительного предположения $\Upsilon_1 \subset \cdots \subset \Upsilon_L$ в 2). Для этого достаточно показать, что любую линейную комбинацию (16) можно привести к виду $\mathfrak{P} = \sum\limits_{k=1}^{L'} c'_k P_{\Upsilon'_k} + K(H)$, где новые мультидуги образуют расширяющееся семейство $\Upsilon'_1 \subset \cdots \subset \Upsilon'_{L'}$. Для этого будем использовать индукцию по L (числу слагаемых в (16)). База индукции $L = 1$ очевидна. Докажем индуктивный переход $L \mapsto L + 1$. Для этого достаточно рассматривать линейные комбинации

$$\mathfrak{P} = \sum_{k=1}^{L} c_k P_{\Upsilon_k} + \widetilde{c} P_{\widetilde{\Upsilon}} + K(H), \tag{17}$$

где $\Upsilon_1 \subset \cdots \subset \Upsilon_L$ и $\widetilde{\Upsilon}$ – произвольная дуга, такая, что $\widetilde{\Upsilon} \cap \Upsilon_k$ не содержит изолированных точек при всех $k = 1, \ldots, L$. Пусть $\widetilde{L}$ – максимальный номер, при котором $\widetilde{\Upsilon} \not\subset \Upsilon_{\widetilde{L}}$. Обозначим

$$\Upsilon'_k = \begin{cases} \Upsilon_k, & k \leqslant \widetilde{L}, \\ \Upsilon_{\widetilde{L}} \cup \widetilde{\Upsilon}, & k = \widetilde{L} + 1, \\ \Upsilon_{k-1}, & k > \widetilde{L} + 1; \end{cases}, \qquad \widetilde{\Upsilon}' = \Upsilon_{\widetilde{L}} \cap \widetilde{\Upsilon};$$

тогда $\Upsilon'_1 \subset \cdots \subset \Upsilon'_{L+1}$ и $\widetilde{\Upsilon}' \subset \Upsilon_{\widetilde{L}}$. Ввиду леммы 3 имеем

$$P_{\widetilde{\Upsilon}} + K(H) = P_{\Upsilon'_{\widetilde{L}+1}} + P_{\widetilde{\Upsilon}'} - P_{\Upsilon'_{\widetilde{L}}} + K(H).$$

Поэтому сумму (17) можно представить в виде

$$\mathfrak{P} = \sum_{k=1}^{L'=L+1} c'_k P_{\Upsilon'_k} + \widetilde{c} P_{\widetilde{\Upsilon}'} + K(H), \quad c'_k = \begin{cases} c_k, & k < \widetilde{L}, \\ c_k - \widetilde{c}, & k = \widetilde{L}, \\ \widetilde{c}, & k = \widetilde{L}+1, \\ c_{k-1}, & k > \widetilde{L}+1. \end{cases} \tag{18}$$

Заменяя (17) новым разложением (18) и повторяя вышеописанную процедуру достаточное число раз, получаем разложение (18), в котором $\widetilde{\Upsilon}' \subset \Upsilon'_1 \subset \dots \subset \Upsilon'_{L'}$. Тем самым доказан индуктивный переход. Значит, любая линейная комбинация (16) может быть приведена к виду $\mathfrak{P} = \sum\limits_{k=1}^{L'} c'_k P_{\Upsilon'_k} + K(H)$, где $\Upsilon'_1 \subset \dots \subset \Upsilon'_{L'}$. □

Следствие 9. *$\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E}$ и $\iota : \ \mathscr{E}/K(H) \mapsto C(\mathbb{T})$ это (изометрический) изоморфизм.*

Доказательство. 1) Поскольку морфизм $\iota : \ \mathscr{P}/K(H) \mapsto L_\infty(\mathbb{T})$ непрерывен, для всякого эйконала $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(f, \Gamma.)$ имеем

$$\begin{aligned} \iota(\mathfrak{E} + K(H))(x) &= \iota\Big(\int_0^1 f(t) dP_{\Gamma_t} + K(H) \Big)(x) \\ &= f(1) - \int_0^1 \iota(P_{\Gamma_t} + K(H))(x) df(t) \\ &= f(1) - \int_0^1 \mathcal{I}_{\Gamma_t}(x) df(t) = f(t(x)) \end{aligned} \tag{19}$$

ввиду формулы (3); здесь $t(x)$ это такое t, при котором $\partial\Gamma_t$ содержит точку x. Поскольку отображение $x \mapsto t(x)$ гладкое, имеем $\iota(\mathfrak{E} + K(H)) \in C(\mathbb{T})$. Таким образом, $\iota(\widetilde{\mathscr{E}}/K(H)) \subset C(\mathbb{T})$ ввиду замкнутости $C(\mathbb{T})$ в $L_\infty(\mathbb{T})$. Из (19) следует, что образ $\iota(\mathscr{E}/K(H))$ содержит все непрерывные функции f, четные относительно одного из зеркальных отражений $z \mapsto a\overline{z}$ ($|a| = 1$). Множество таких функций разделяет точки окружности и потому $C(\mathbb{T}) = \iota(\mathscr{E}/K(H)) = \iota(\widetilde{\mathscr{E}}/K(H))$ по теореме Стоуна–Вейерштрасса.

2) Пусть $0 < t_1 < \dots < t_L < 1$ – произвольное разбиение интервала $(0,1)$ ранга $\max_k(t_{k+1} - t_k) \leqslant \varepsilon \to 0$. Из оценки (4) следует, что сумма

Римана $\mathbf{\Sigma} = \sum\limits_k f(t_k)(P_{t_{k+1}} - P_{t_k})$ сходится к $\mathfrak{E}$ в $B(H)$. В то же время $\iota(\mathbf{\Sigma}+K(H)) = \sum\limits_k f(t_k)(\mathcal{I}_{t_{k+1}} - \mathcal{I}_{t_k} I)$ сходится к $f \circ t = \iota(\mathfrak{E}(f,\Gamma.)+K(H))$ в $L_\infty(\mathbb{T})$. Теперь пусть $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{E}_1, \dots, \mathfrak{E}_N)$ это полином от эйконалов $\mathfrak{E}_1, \dots, \mathfrak{E}_N$. Заменяя каждый эйконал $\mathfrak{E}_k$ в $\mathfrak{P}$ его суммой Римана (с зависящим от k разбиением $(0,1)$), получаем последовательность полиномов $\mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}_k(P_{\Gamma_{k,1}}, \dots, P_{\Gamma_{k,M(k)}})$ сходящуюся к $\mathfrak{P}$ в $B(H)$, причем $\iota(\mathfrak{P}_k)$ сходятся к $\iota(\mathfrak{P})$ ввиду непрерывности ι. Поскольку точки t_k каждого разбиения отрезка $(0,1)$ допускают слабые смещения (порядка ε), можно считать, что при каждом k попарные пересечения дуг $P_{\Gamma_{k,1}}, \dots, P_{\Gamma_{k,M(k)}}$ не содержат изолированных точек. Тогда из леммы 8 следует, что $\|\iota(\mathfrak{P}_k+K(H))\|_{L_\infty} = \|\mathfrak{P}_k+K(H)\|_{B(H)/K(H)}$. Отсюда предельным переходом при $k \to \infty$ получаем $\|\iota(\mathfrak{P}+K(H))\|_{L_\infty} = \|\mathfrak{P}+K(H)\|_{B(H)/K(H)}$. Ввиду непрерывности ι последнее равенство означает, что $\iota : \ \mathscr{E}/K(H) \mapsto C(\mathbb{T})$ и $\iota : \ \widetilde{\mathscr{E}}/K(H) \mapsto C(\mathbb{T})$ это (изометрические) изоморфизмы. Поэтому отображение $\widetilde{\iota} := (\iota|_{\widetilde{\mathscr{E}}/K(H)})^{-1} \circ \iota|_{\mathscr{E}/K(H)}$ сюрьективно. Поскольку $\widetilde{\iota}(a) = a$ для любого $a \in \mathscr{E}/K(H)$, отсюда следует, что $\mathscr{E}/K(H) = \widetilde{\mathscr{E}}/K(H)$ и, значит, $\mathscr{E} = \widetilde{\mathscr{E}}$. $\square$

Доказательство предложения 1. Соотношение $\widehat{\mathscr{E}} = \widehat{\widetilde{\mathscr{E}}} \cong \mathbb{T} \sqcup \{0\}$ (где $\cong$ обозначает гомеоморфизм) вытекает из (13) и формулы $\widehat{C(\mathbb{T})} \cong \mathbb{T}$. $\square$

Доказательство предложения 2. Если σ постоянна вблизи $\partial\mathcal{R}$, то доказательство предложения 2 полностью повторяет доказательство предложения 1. Доказательство общего случая отличается только тем, что асимптотическое разложение вида (10) вблизи ДН-точек выводится с помощью результатов теории эллиптических краевых задач в негладких областях [6]. $\square$

Автор благодарит М. И. Белишева за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. M. I. Belishev, *The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method.* — SIAM Journal of Mathematical Analysis, **35**, No. 1 (2003), 172–182.

2. M. I. Belishev, *Geometrization of Rings as a Method for Solving Inverse Problems.* — Sobolev Spaces in Mathematics III. Applications in Mathematical Physics, Ed. V.Isakov., Springer (2008), 5–24.
3. M. I. Belishev, M. N. Demchenko, *Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds.* — J. Geometry and Physics, **78** (2014), 29–47.
4. М. И. Белишев, А. В. Каплун, *Каноническое представление C^*-алгебры эйконалов метрического графа.* — Известия Российской академии наук. Серия математическая, **86**, No. 4 (2022), 3–50.
5. Дж. Мерфи, *C^* алгебры и теория операторов.* — Москва, Факториал (1997), 336.
6. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* — Наука (1991), 335.

Korikov D. V. Representations of algebra of harmonic eiconals.

We describe the spectrum of the sub-algebra $\mathscr{E}$ of bounded operators on the space H of potential harmonic vector fields on the disk $\mathbb{D}$ generated by the operator integrals (eiconals) of the form $\int t dP_{\Gamma_t}$, where $t \mapsto \Gamma_t$ is an expanding family of arcs in $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ and P_{Γ_t} is a projection on the subspace of H spanned by vector fields normal to $\mathbb{T}\backslash\Gamma_t$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
имени В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: thecakeisalie@list.ru

Поступило 14 сентября 2024 г.